简明数学全书

I 基础数学

简明数学全书

(I. 基础数学)

〔德〕 W. 盖勒特 H. 奎斯特纳
M. 海尔维希 H. 凯斯特纳 著

科学顾问

K. A. 郝奇 H. 理查德

谈祥柏 华宏鸣 孙大宁 江文鹿 译
谈祥柏 张莫宙 沈 阑 黄绍元 校

上海科学技术出版社

MATHEMATICS AT A GLAN[illegible]

Editors: W. Gellert Dr. H. K[illegible]
Dr. M. Hellwich H. K[illegible]

Scientific advisors: Professor K. [illegible]
Professor H. [illegible]t

VEB Bibliographisches Institut Leipzig

1975

简明数学全书

(I. 基础数学)

W. 盖勒特 H. 奎斯特纳
M. 海尔维希 H. 凯斯特纳 著

科学顾问

K. A. 郝奇 H. 理查德

谈祥柏 华宏鸣 孙大宁 江文鹿 译

谈祥柏 张奠宙 沈 阁 黄绍元 校

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 17.75 字数 553,000
1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷
印数 1—45,500

统一书号: 13119·883 定价: (科四) 1.65元

出 版 说 明

《简明数学全书》是一本通俗简要地介绍数学学科的实用读物，内容包括数学各分支的概念、原理、实际应用，以及对数学史的回顾和对现代数学的综述等；既可用作自学，又可用作复习。本书的文字叙述，强调了数学概念的互相联系，并且与公式、定理及例题密切而有机地相结合，因此条理清晰，容易理解；文中配有大量的插图，使数学题材更为生动而形象化；编排形式也有别于一般教科书，读起来有清新感。原书出版后，深受广大读者的欢迎。

为了满足我国读者的需要，我们决定组织翻译本书。但因原书篇幅较大，故分两部分出版，第一部分为基础数学，第二部分为高等数学及现代数学，各自独立成册。书中用 **I.** 或 **II.** 来表示本书的第一部分或第二部分。

原书名《数学小百科全书》，英译作《数学概观》，根据本书的内容，我们改用现名。在版式方面，我们采用不同字体和符号来体现原书的特点，以求醒目。如重要的定义和公式组加粗线框，例题用黑括号，定理在文字下加点线；原文中的黑体、斜体和正体，现采用黑体、活体和宋体。

本书对具有中等文化程度的学生、教师以及对数学有兴趣的读者来说，是一本有价值的参考书。

在出版工作方面如有不足之处，热切希望广大读者批评指正。

序

在我们的时代，科学和技术不借助数学工具，无疑是不可能掌握的；科学和技术的运用范围又日益扩大，直至日常生活的许多领域。这就普遍要求对数学的成果能有全面的了解，并要求采用非常规的方法，以便有可能填补我们知识的空白。欲达此目的，光靠罗列定理或搜集公式看来是不行的，因为这样做的话，势必会过于强调由数学符号和字母构成的符号语言的作用，而忽视数学概念的作用，但恰恰是数学概念，才是真正起决定作用的东西。我们的任务是尽可能简明扼要而又精确地叙述数学的内在关系。鉴于数学材料的浩瀚，不消说，我们所做的并非是把数量繁多的各数学分支的教科书的细目编制起来而已。我们的目的是为尽可能多的读者阅读专业的文献铺平道路。本书的德文版已销售七十多万册，故可企望我们达到了这一艰难的目标。

本书广泛利用色彩来帮助读者阅读*，还有充足的例题以帮助读者理解一般的论述。通常将数值计算分开书写，这样可将问题当作注释阅读，不需参阅计算；而计算又可看作有解题细节的例子。有些例子中的物理单位使用国际单位制(SI 制)，因为国际单位制正越来越成为法定的实用单位。日常生活中的例子使用日常单位，既有公制，也有其他单位制。

本书将题材按系统分目，并给出许多简明的段落标题和数表，以使读者能迅速而可靠地掌握题意。

谨向各章作者，特别是应邀参预校正与常用术语不符的措词，以使全书通俗易懂而做出贡献的人致以谢意。在此简短的说明中特别需要指出，有很多条目，尽管作者是有关方面的专家，但也感到仅靠浅涉条目，很难做到令人满意。

我们应特别感谢我们的顾问——伦敦大学玛丽女王学院的 K. A. 郝奇 (K. A. Hirsch) 教授和柏林洪博尔特大学数学系 H. 理查德(H. Reichardt) 教授，他们孜孜不倦地为本书作了修改，帮助我们撰写了这样一部著作，使读者们能从中取用可靠的资料。这也将使我们大家相信，数学从其本质来说是一门简明易学的学科。

编者和出版者

* 现中译本改用不同字体和符号以示区别。——译者注

目　录

引言 ……………………………………………………1
第 1 章　有理数的基本运算……………………………9
第 2 章　高级算术运算 ………………………………65
第 3 章　数系的扩展…………………………………105
第 4 章　代数方程……………………………………125
第 5 章　函数…………………………………………175
第 6 章　百分数、利息和年金 ………………………232
第 7 章　平面几何……………………………………243
第 8 章　立体几何……………………………………309
第 9 章　画法几何……………………………………343
第 10 章　三角学……………………………………372
第 11 章　平面三角学………………………………411
第 12 章　球面三角学………………………………452
第 13 章　平面解析几何……………………………493

引　言

技术上绚丽多彩的伟大成就深刻地影响着每个人的生活，使人们普遍认识到数学的重要性。人人都知道，或至少相信，没有数学，就不能产生这一系列的成就。因此，人们对数学的兴趣便不断增长，从而造成对这门科学的资料的需求日益增长。

现在，数学在很多方面，特别是在提出问题和解答问题方面，已经成了一门特殊的科学。尽管在医学、动物学、植物学、地理学和地质学方面，或是在语言学、历史学、天文学方面，一位博闻广见、精熟当代学识的学者，可以成功地向一个门外汉讲解他的研究的绝大部分问题及其成果，甚至还可以介绍他特别感兴趣的方法和基本原理，使人对这一领域的内容有一定的了解，但是在当代化学和物理方面，他想达到这一目的，就会感到困难得多，而在数学方面则几乎是不可能的。这不仅是因为数学成果在数量上有了极为可观的增长，而且也因为数学问题太难解、太深奥，即使是数学家，对数学的全局也只能有一个肤浅的认识而已。

为了不使数学分成许多**特别的分支**，人们便尽可能地从各个不同的领域中概括出共同的特性，尽管这些特性有时从表面上看来是互不相关的，以此创立新的更加抽象的理论。正是通过这种努力，人们在那些初看起来相去甚远的领域之间建立了新的纽带。这可以看成是一个反复抽象的过程：既然象代数和几何这些基本原理是来源于对日常生活经验的抽象，人们就可以对代数和几何作进一步的抽象，以得出一个统一的理论，而且在某些情况下，这种抽象的过程可以一环套一环地反复进行。这里“抽象”这个词要严格地理解为“去除”的意思，也就是去掉那些对有关问题的来龙去脉或对某特定目的来说是非本质的东西。例如，在研究几何图形时不去考虑其色彩，尽管色彩在装潢方面很有用处。

这一切说明，即使要使门外汉对当代数学的全貌有一孔之见也是不可能的。在这里，**门外汉**不只是指知识仅限于教学大纲所规定的内容的人，取得毕业文凭或获得理学士学位的数学家和数学教师也都可以看作是许多专门的数学分支的门外汉。要想通过三、四年的学习，掌握数学各

个分支的专业知识，简直是不可能的。因此，本书的局限性势在难免，我们并不奢望它能广涉数学各领域的专门知识。

在历史上数学最初是以非常朴素的方式发展起来的。它从数 1，2，3，…和直观易见的几何图形如点、线段、直线、空间中的平面、角、三角形、圆等出发，逐步发展成具有数域和图形域的较为复杂的结构，这些数域和图形域的研究并不各自成一体系，而是通过测量这个概念来相互联系着的。正是在这种从直观简单明了的问题到较为复杂的问题的发展中，才产生了数学，这在巴比伦和埃及就可见一斑。巴比伦人和埃及人在天文方面取得了惊人的成就，比如，他们能预言月食。但是，将数学发展到一个崭新的阶段的却是希腊人，因为他们总觉得不能光是向前探索，更应回顾思索：在数学的研究方面，人们究竟干了些什么？其结果是，通过他们的努力，数学才发展成为具有现代观念的一门科学。一方面，他们已认识到，(数学)**证明**就是将数学命题通过最简单的合乎逻辑的推论，归纳为其他一些已知事实，即归纳为那些常为现实或经验证实、足以令人信服的东西。另一方面，他们也已意识到，这种归纳过程不可能无限进行下去，而只能局限于数或图形的某些最简单的性质，这些性质的可靠性又可由直观或经验来确定。

就这样，他们第一次有意识地收集了一系列的**基本事实**，如过两点只能引一条直线等，并将其编纂成集，他们还奠定了逻辑学的基础。这两方面的专著使几何学由简单到复杂地建立起来了。

长期以来，一本欧几里得(Euclidean)几何学除了作过几个小的增补之外，一直是这门学科的典范。但是约两千年以来，却没有人试图用同样方法来处理代数和稍晚的解析问题。希腊人对**自然数**的基本性质相当清楚，对可除性问题和有关质数的问题也感兴趣。他们知道如何处置**普通分数**，但却未曾试图引入**负数**的概念。但是，在研究直角等腰三角形时，他们却碰上了这么一个问题，即分数不足以表述所有量的比。他们发现，在这样的三角形中，直角边对斜边的比不能用分数来表示。可惜他们并未由此得出结论，即分数域必须扩大，以使该比值和其他所有可能出现的几何比都可以在数值上用更大的数域中的新数来表述。恰恰相反，他们使代数几何化。诚然，由此曾得出一个与我们的实数理论等价的理论，但是这种几何化的做法造成了极大的麻烦，使希腊数学走进了死胡同。

几个世纪以后，天文学家和航海家的实际工作迫切需要三角计算，而

这种计算只有借助某种三角函数表才能进行。由于观察值只能测量到有限的精度，故对需计算的量只要给出**近似值**即可，这就逐步导致有尽小数的发明。事实证明，有尽小数比普通分数更利于实际计算。很可能就产生了这种想法，即小数位数越取得多，结果便越精确，甚至认为任何预定精度均可通过充分多的小数位数来求得。归根结底，这个方法毕竟抓住了**实数**的本质，于是数学家们对无限多位的十进小数不再避而不谈。要是这个理论一直发展下去的话，本来是可以得出精确的实数理论的。

一个有趣的、具有十分重要意义的例子说明，早在阿基米德(Archimedes)设法计算平面上某些以曲线为边界的区域的面积时，上述想法就以大同小异的形式在他的研究工作中表现出来了。首先，阿基米德用其著名的**逼近法**成功地计算了以抛物线的某一段及其弦为边界的图形的面积。结果发现这类图形的面积有一个确定的比值 1/3，这个比值意义重大。但是，阿基米德却未能成功地为圆面积求出一个相应的简单结果，因为要解决这个问题，他就得算出 π 的值。现在我们知道，仅有分数知识，他是不可能算出的，他所能证明的只是，π 的值介于两个分数，即 $3\frac{1}{7}$ 和 $3\frac{10}{71}$ 之间。为了计算圆的面积，他反复利用了毕达哥拉斯(Pythagoras)定理，计算了圆的内切和外切正凸96边形的面积，得出了圆面积的近似值。显然，他当时已经意识到，只要将边数和顶点数取得充分大，就可以将 π 限制在越来越小的范围内，并能将它计算到任何指定的精确度。用分数可以将一个数的近似值计算到预定精确度，这正是实数的一个特性。

随着时间的流逝，实数的这一性质已在很多不同场合为人们所熟识。例如早在微积分计算创立之前，在对数表的编制中，在笛卡尔(Descarte)的解析几何中，用坐标表示平面或空间的点，人们就已经牢固地确定了对这一性质的认识。后来在微积分计算的发展中，这种认识又有了进一步的加深。微积分计算始于莱布尼兹(Leibniz)和牛顿(Newton)，后来，似乎是为发现的欢乐所陶醉，伯努利(Bernoulli)、欧拉(Euler)、费马(Fermat)、柯西(Cauchy)、高斯(Gauss)和其他一些人又相继发展了它。现在再没有人认为对实数理论的建立还需作进一步深入细致的研究了。

但是，建立实数理论的问题也曾在数学的另外两个分支，即几何和代数中起过作用。如已经指出的，**欧几里得几何**是以一组非常简单的几何命题为出发点的，从这些简单的几何命题中可以推导出其他的定理。这

些称为**公理**的简单命题集中表现着当时的几何知识，从直观上看来极为显然，以致无人认为需加证明。唯有**平行线公理**(或**公设**)是一个例外。这个公理说：过一已知直线外的一已知点，有且仅有一条直线不与已知直线相交。是否能将它排除在公理之外，而用其他公理来加以推导呢？两千年来，数学家们为此绞尽脑汁，却一无所获，直到德国的高斯、俄国的罗巴契夫斯基(Lobachevskii)和匈牙利的波约（Bólyei）才成功地证明了平行线公理是独立于其他公理的。这一结果的重要意义只有在与其他方面的发展联系起来时才能看清。

在**代数**中，从二次方程根的公式可以得到表达式$\sqrt{-1}$。这个式子乍看起来毫无意义，但是，只要将它按一般的根式，如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$或者$\sqrt{\pi}$一样进行计算，所得结果却都有意义。这就无可置辨地令人相信$\sqrt{-1}$这个式子的合法身份，并采用符号 i 来表示它。差不多过了三百年，高斯和其他一些人才证明，人们一直沿用着的做法可以用一个完全有意义的方式来解释，即将**实数域扩大**，这样一来，就产生了一个新数，其平方等于-1。

尽管高斯对实数非常熟悉，能够毫无顾忌不加证明地使用它们，但只是到了柯西和当时的其他数学家在阐明**极限**概念的过程中遇到了一些困难时，实数才成了认真考虑的对象。当时大家都认识到，实数理论实际上可以用不同方式通过对分数的归纳来建立，反之，分数又可以归纳为自然数。从而再次表明，在自然数领域中，自然数的所有性质都可以归纳为少数几条十分显然的基本事实，即**皮亚诺**(Peano)**公理**。

对自然数的这种归纳，为实数和复数理论提供了依据，也为整个实数和复数的**解析**理论，乃至几何学提供了依据；因为解析几何所阐明的是如何用坐标表示基本的几何对象，特别是点，而坐标都是实数。

本书还提及数学的另一个发展。这一发展系于一百五十年前才初步开始。众所周知，数的乘法和加法的某些法则在形式上非常相似。同样，在其他**数学运算**中，例如在连续进行几种运算时，也可以看到一些形式上非常简单的规律。但是，数学家们却非常缓慢地才跨出合乎逻辑的第二步，即概括出这些共同的基本性质，并从这些性质出发，通过纯粹的逻辑推导，使得这一领域逐步发展成了今天的**群论**。在这儿正象在欧几里得几何中一样，人们再次看到了随着后来的各种发展而出现的一个公理体系。

现代数学的一些大的分支，特别是代数，以及在越来越大的程度上分

析和几何，都是建立在公理体系上的。其建立过程大致如下：已知为一组数学对象(通常称为集)、该集的各个*元素*和用于描述这些数学对象的基本性质的一组公理，接着就提出下列工作：首先由这些公理推出尽可能多的推论，即尽量将这一数学结构的理论扩展到最大范围；然后将有关公理体系的所有处理方法进行全面考察。可能发生的情况基本上是：仅有**一种**可能的处理方法；或有数种乃至无限多种处理方法；也可能**不存在**任何处理方法。例如，当给定公理互相矛盾时就是这样。如存在数种处理模式，即对这些公理有若干种处理方法，则应寻求一些**特征**，以便利用这些特征，经过有限步的推导，有效地将各种可能性彼此分辨开来。对于某些数学结构，这些工作早已完成，但对另一些数学结构，则离解决之日尚相去甚远。这种情况也表明了公理学和数理逻辑彼此交织得有多么紧密！

本世纪初，在一个新的结构理论——集论中产生了矛盾，这就更加迫切需要有一个有效的数理逻辑。**集论**是最简单的**结构理论**，因为它涉及的是完全任意的集合，如点、数、运动、函数、图形，同样还可以是人、星球、椅子以及其他种种东西，这些集合的元素不受任何公理的约束。因为没有做出任何结构上的假设，所以如果两个这样的集具有相同数量的元素，就可以看成是等价的，或**等势**的。在有限集的情况下，这方面的含义是显而易见的。但是，甚至对无限集也确定了诸如所谓幂，即基性的元素的数目，那确是个了不起的成就。当然，当问题涉及有限集的元素数目时，我们所熟悉的某些性质对无限集便不复适用了，例如在等价性方面，自然数的个数和分数相等，但是分数的个数则少于实数的数量，线上的点的集合与面上的点的集合基性相同。所有这些，从数学的严密性来说是完全无可非议的，尽管它们显然缺乏直观性。但是**矛盾**出现在集的非限定形式，例如，“所有集的集”这一概念就是自相矛盾的。然而，这并非是**数学危机**，尽管有时是这么叫的。相反，数学家们借此机会更彻底地思考了在定义数学概念时涉及到的问题。于是，一门系统的数理逻辑便发展起来了。今天，人们已完全懂得如何去回避这些矛盾。

人们可能会认为，在形成这些极为一般化的结构理论和数理逻辑的公理系统的过程中，这种高度的抽象可能会越来越偏离实事求是的应用数学。但这是绝对不会的。莱布尼兹在解决一些基本的逻辑问题而直接进行了创造性的数学工作的同时，制造了一架中用(切实可行)的计算机，这绝不是偶然的。

工厂生产的人工或电动的计算机的诞生，并没有引起重大的原则纷争。但是这一情况随着**电子计算机**的产生发生了根本的变化，因为有了电子计算机，计算速度大大提高了。诚然，这些计算机是按**简单的黑白原理**工作的，即在机器的每一个部件中，不是通电就是断电。然而，它们却能对付非其不能对付的计算问题。它们以难以想象的速度进行大量最简单的运算，因而能在不太长的时间内处理完一个程序复杂而冗长的问题。当然，这种计算的所费时间还有赖于程序编制技术。电子计算机发明以前，人们已做过一些初步工作，并很快发现程序编制要遵循一定的规则，这些规则在数理逻辑，例如**算法理论**中也起着作用。这再次表明某些仅仅为了理论上的需要而发展起来的纯数学研究的实用价值。计算技术方面的这一情况为纯数学和应用数学在本质上密切相关提供了一个确实的典型例子。

本书还适当地强调了数学问题的**理论可解性**和**实际可解性**之间的区别。在数学中，讨论的常常不是个别的、有给定数值的问题，而是取决于某些数据的一般性问题，这些数据的数值有很多种，实际上有无限多种取法。举一个简单的例子吧：三角形的面积取决于它的三条边，虽然有一个适用于所有三角形的面积计算公式，但每条边的长度却有无限多个可能值。

如果能给出一个公式，即一种**算法**，用它来算出各个特例的解，那么这种问题就算解决了。这里我们假定可用这个公式或程序经过有限步的运算求得数值结果。如果能做到这一点，在单纯的数学家看来，这个问题就算解决了。然而，实际上问题仍可能得不到解决，因为尽管须进行的运算步骤是有限的，但从时间和经济上来考虑却可能因为所费太大而不可解。这就会导致新的更有意义的纯数学问题，即找出更有效的计算程序，除非人们满足于近似解，或制造出更高速的计算机。

电子计算机的发明是这一方面的巨大进步，其结果是首先在应用数学中产生了一些新的分支，一些前所未有的分支因为一开始问题就很明显，即它们所涉及的主要问题不可能在实际允许的时间内攻克或解决。“九人莫利斯舞”和弈棋问题是原则上可解问题的两个例子。说它们在原则上可解，是因为根据法则，它们只可能有有限多种玩法。而现在九人莫利斯舞在实际上也已是可解的了，因为在玩的时候可以先给第一个游戏者以严格的训练，使他懂得如何应付对手的各种可能的动作，以便能赢得

每一局。在下棋时，同样有个走白子者能否一直占先的问题。尽管这是个有限性的问题，但至今未获解决。而且，即使动用当今世界上所有的电子计算机一起来解这么一个弈棋问题，恐怕也得不出问题的解，这可能需要比现在的计算机运转得不知快多少倍的计算机才行。

以上粗略地谈了数学的发展，它从数、运算、图形和测量的最简单的基本概念发展到今天包括大量高度抽象结构的完全公理化的形式，发展到现代计算机，但其发展远未到顶。将数学的这一发展和本书的目录表作一比较就可以看出很多直接和间接的关系。

第一部分“**基础数学**”的题材，在很大程度上同从古代经中世纪直到建立微积分计算之前数学的发展相吻合。所不同者仅是算术、数论和几何并非同时列出，而是按顺序先后排列的。我们从自然数和**初等运算**法则开始，就是因为它们对一般人来说是显而易见的，随后便建立一整套的**公理学**系统，从自然数起直到引入复数为止。

即使对这些简单的概念，现行数学符号却是为从前的希腊人所未知的，正因为如此，就产生了极其烦琐、笨拙的用字母代替数字的方法。今天，学校里已理所当然地采用了这种符号。这儿，数学符号与数学基本概念极为吻合，但是由于它过于简单易学，有时竟会产生轻率而机械地搬弄字母的危险。对于这种潜在的影响必须坚决反对，特别是在学校里；必须坚持数学概念第一，运算技巧第二，而绝不能反其道而行之。关于这个问题，高斯在 1850 年 9 月 1 日给斯库马柯 (Schumacher) 的信中写道：“现代数学的一个特征……就是在我们的符号和名词的语言中，有一个杠杆，通过这个杠杆可以将非常复杂的论证简化成某一个机理……尽管在大多数情况下，这样做的实质就是默认某些假设，然而机械地使用这个杠杆，却是多么的屡见不鲜。我认为，每当进行计算，每当运用概念时，我们都必须始终不忘初始条件，决不应把通过这种机理得出的结果，看成是超出明确规定范围的数学性质。”

有很多问题要求从已知量求得未知量。一般说来，采用字母能使我们简单明了地表达这类问题。常有这样的情况，有些问题初看起来完全不同，却能得出形式完全相同的最终方程或方程组。这再次表明数学解题方法和抽象之间的相似，所谓抽象者，即不计已知量和需解量的含义，仅保留其数学内核而已。

函数概念乃是现代数学的一个重要特征。这就是说，现代数学是研

究函数关系的数学，即研究一些量对另一些量的依赖关系。例如，三角形的面积或角对它的边长的依赖关系。在分析函数概念时，我们将会熟悉这类问题的另一些例子。

*初等几何*是研究平面或空间中的点、线段、角、直线、三角形、四边形、圆、四面体等问题的。由于需要对物体进行测量，所以在这里起主要作用的是前面讨论过的数的概念。当然，不应由此而忽视纯几何概念，特别是在解题时。人们试图用纯几何方法，即作图法来解几何问题。如何用平面作图法处理空间问题，这是*画法几何*的内容。几何和数值计算在*解析几何*中融合得最为紧密：凭借坐标概念，可以将几何问题化为数值问题。这样一来，几何就成了应用广泛的解析法的入门。

解析基本原理放在第二部分“*高等数学*”中加以讨论。虽然极限概念已在初等数学中以直观的方式作过使用，但高等数学却恰恰是从严格的*极限理论*开始的。这样极限一方面是*无穷数列*和函数理论的基础，另一方面又是函数的连续性概念和*微积分计算*的基础。连续函数和微积分的重要性不仅在于是整个数学结构的基础，而且在物理、技术等方面都有很重要的应用。很多几何物理问题本身都是以*微分方程*的形式出现的，也就是以一个函数和它的微商的关系式出现的。这个理论发展至今已有很大篇幅，这里只能粗略地谈及其中最简单的一些部分。*微分几何*也是一个引人入胜的数学分支，它是微积分计算在平面和空间曲线及空间曲面理论中的应用。

前面我们已经注意到，一个问题的理论解法常常与其直接应用的一些特例迥然不同，因为必要的数值计算往往过于累赘。*图示法*和*数值法*的任务就是将理论解变成直接可以应用的解。此外，*概率论*和*统计学*在实际应用中也起着很重要的作用。

最后一部分是“*现代数学简介*”。这一部分的目的是使读者对现代数学的若干研究领域有所了解。正如文首所述理由，不可能对各问题分别作较详尽的讨论，也不可能将现在仍处于萌芽阶段或仍处于深刻变革过程中的那些领域收编进本书之中。读者如欲更透彻地了解各数学分支，可以参阅专著，这对前两大部分同样适用。

汉斯·理查德

第1章　有理数的基本运算

1.1　自然数N ……………………9
　数和数字 ……………………9
　自然数N的计算 ………14
　初等数论……………………21
1.2　整数Z ……………………27
　基础知识……………………27
　整数Z的计算……………29
1.3　有理数Q……………………32
　基础知识……………………32
　普通分数的计算…………35
　十进小数……………………39
　小数的计算…………………42
1.4　比例性和比例……………46
1.5　数值变量的运算…………51
　代数和的运算……………53
　含变量的分数……………60

1.1　自然数N

数和数字

什么是自然数?　有两种活动使得我们的祖先感到掌握数的必要性;这也就引起了基数和序数的产生。

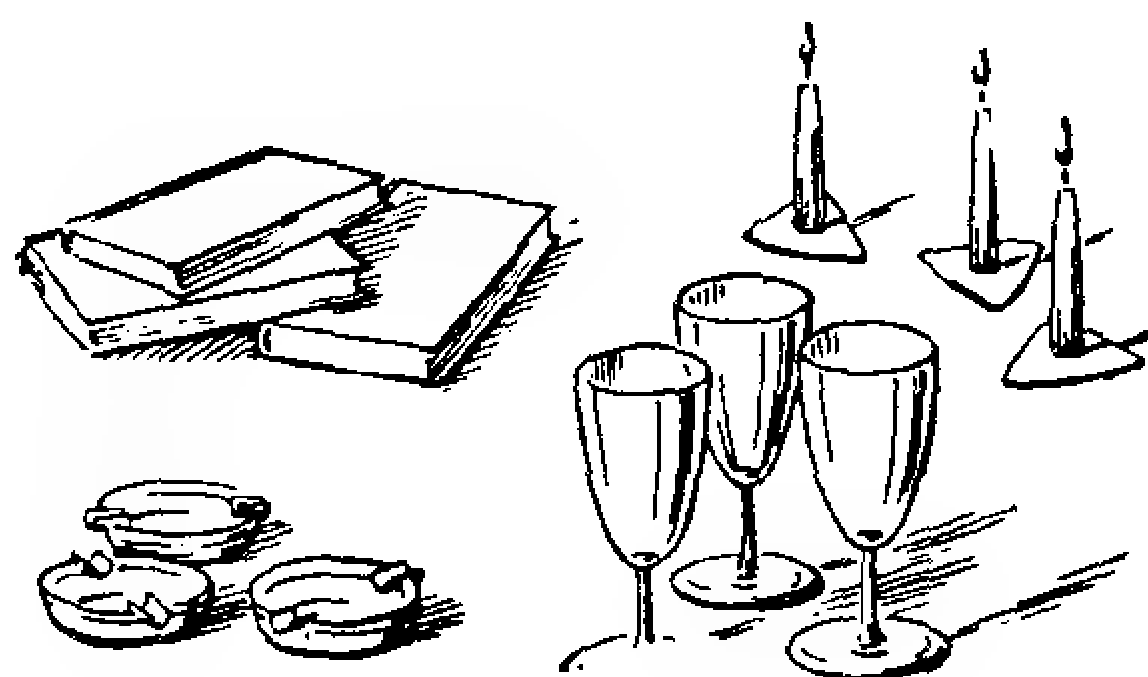
基数。以前人们必须对各种不同事物,例如燧石、狗、狩猎伙伴等的集合进行比较,才能弄清楚哪一集合包含的元素(成分、成员)较多。今天,一般说来,人们是通过对所得量的计数和对照来比较事物的多少的。这就意味着要有计数能力,也就是要有数的知识。但是有一个较为简单的方法:例如,如果人们想知道在场的人和马是否数量相等,就可简单地让每匹马上骑上一个人。换句话说,在人和马之间建立起搭配对应关系。这种搭配可以符合得很好——即人和马正好数量相等,人们就说,这两组事物是等量的;也可能其中一组有剩余,即一组数量较多(见图1.1-1,1.1-2)。在安排餐桌时,人们在茶杯、碟子、调羹等物品之间建立起对应关系。这样建立了成对搭配关系的各组事物就有一个相应的数作为共同性质(见图1.1-3)。甚至直到今天这还是我们的儿童获得基数概念的方法。



图1.1-1　人和马——未搭配



图1.1-2　人和马——经搭配多一人



基数是计数的数	1, 2, 3, …

序数是记顺序的数	第一，第二，第三，……

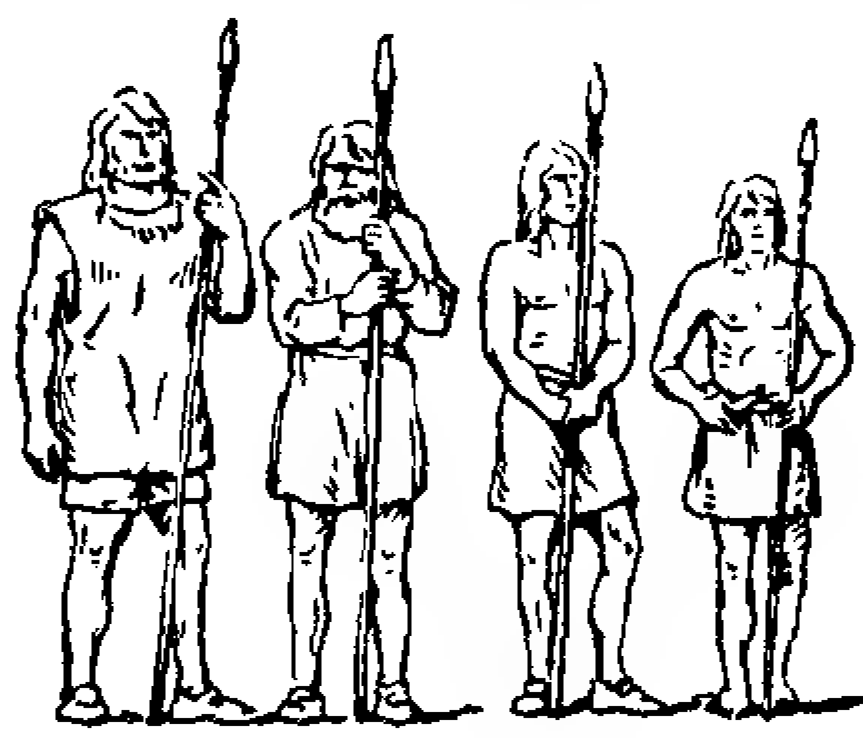
图1.1-3　公共数3

抽象在文化发展的整个阶段并非都达到一定程度。有些原始部族在谈论不同事物时，使用不同的数词。例如，**两个妇女**不同于**两支箭**，在这里数尚未从各组事物的其他性质中抽象出来。

序数。人们的第二种需要是在完全相同的一组事物中建立*次序*。例如，必须按照某种观点——譬如说，骑士的身长、年龄或勇敢的程度——



(*a*)



(*b*)

自　然　数　**N**	0, 1, 2, 3

图1.1-4　四个猎人的集合：(*a*) 无次序；(*b*) 按身长为序的排列

来确定在打猎时，谁应该一马当先，谁是第二个，第三个……骑上马(见图1.1-4)。人们在点数某一集合中的元素时，遇到十分类似的情况，只不过这样得到的次序一般说来并无特别意义。序数就是这样产生的。

基数和序数的发展是密切相关的，它们构成了自然数的两个方面，通常习惯上，零(或无)既可算作基数，也可算作序数。

数词和数的符号　为着口头和书面交流以及便于记忆，需要有表示基数和序数的*数词*及*数的符号*，特别是数的符号对于缩写和方便计算是必不可少的(见图1.1-5～1.1-7)。相应的基数和序数在各种语言和书面形式上都极其相似，这是它们密切相关的象征。在英语中，大多数序数词的词尾都有-th(four—the fourth; a hundred—the hundredth)，在书写时要加一句号(例如，牛顿生于25.12.1642)。在美国，月份放在日期的前面：12/25，1642。

由于基数和序数十分相似，所以在以后的讨论中我们只限于注意基数就够了，相应的论证也适用于序数。

数　词：九
数　符：卌|||| 或 IX 或 9

图1.1-5　数词"九"的三种符号

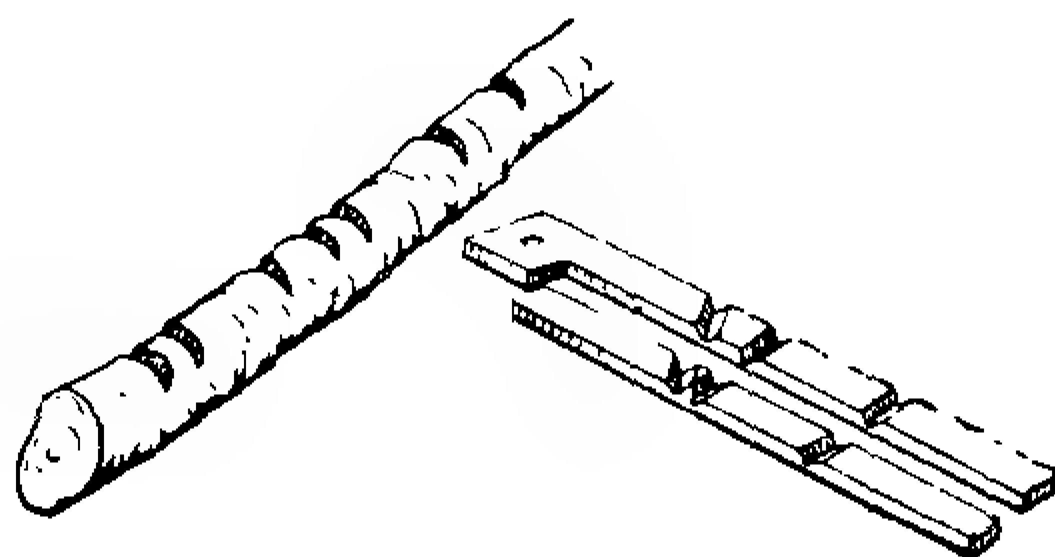


图1.1-6　符木

基本符号：	I	X	C	M
	1	10	100	1000
辅助符号：	V	L	D	
	5	50	500	

例：MDCCLXVIII　1768

图1.1-7　罗马数字符号

数的表示法。数的最简单的表示法是用*符木*(见图1.1-6)，即在木条上刻上刻痕来记录帐目。通常将符木分成两半，双方各持一半。当年鲁宾逊计算日期所用的*刻度法*仍有使用，特别是用于一些单调的计数。但是

过不了多久，当数字变大时，这种表示法就失去它的清晰性：这可通过适当的安排来弥补。当要构成**新的数词**，或发明新的符号的时候，也会出现十分类似的情况：对于每一个数都要引进一个全新的词和一个新的符号，这将是极不经济的。代表较大数字的词和符号由表示较小数字的词和符号组合而成，而这种积木本身也是由更小的单元和组合组成的。根据这种组合方法和符号排列，可以区分为**加法制**与**位置制**。

加法制。人们最熟悉的加法制的例子是**罗马书写数字法**。在基本符号中，每个符号的十倍组成更高一级的符号，每两级之间有一辅助符号(见图1.1-7)。顺便说一句，这些符号的来源并不十分清楚。有些符号，例如M(mille)表示1000，直到中世纪才被这样采用。罗马人曾用C|Ɔ表示1000。加法制的实质是用尽可能少的几个符号(在我们举的例子中有七个符号，见图1.1-7)，通过适当组合组成所有数的符号。有一规则为：**大数的符号总是放在较小数的符号的左边**。为了尽量少用符号，此规则有一例外，数字九可以表示成VIIII(5+4)或IX(10−1)。后者是人们爱用的写法。因此，假如代表较小数字的符号放在左边，那么相应数字必须减去，而不是加上。但是，**不允许将几个基本符号或一个辅助符号放在前面**：用MCMLIX表示1959；CML(不用LM)表示950。加法制有其不方便的地方：一般说来，数的符号太长，因此不够明晰；当数字增大时(在本例中，超过10000)，就要发明新的符号以避免表达式过长；按加法制进行书面计算特别麻烦。

位置制。我们现在用的**位置制**要追溯到印度人，是他们从近东传给我们的(阿拉伯数字)。就其完美性而言，这是在数字表示法的历史发展中相当晚的成就。在位置制中，十个个位数(单位U)组成一组新的数，叫十位数，用T表示，而还是这十个数字又组成百位数，用H表示，等等。为了表示更大些的数，不要(象在罗马制中那样)引进任何新的符号，它们的区别由它们在整个数值符号中的位置来确定。在罗马符号中，用三个字母XXX表示三十，每一个字母X具有相同的数值10，因为这是加法制，所以整个数是由这三个数值相加而得。用符号444表示四百四十四时，这三个数字也具有相同的数值四；但是在整个符号中，它们处于不同的位置，因此具有不同的位置值；最右边的位置表示个位数。

321　意思是：　　3H+2T+1U，

CCCXXI　意思是：100+100+100+10+10+1。

由于每一位数都有十个数，所以人们称之为**十进制**(decimal system，拉丁文 *decem* 表示 10)，或叫十进位置制 (decadic positional system，希腊文 *deka* 表示 10)。相应地称罗马数字制为十进加法制。数字十称为数制的**基数**。位置值是十的幂，有些十的幂具有自己的特有名称。如 $10^6=1000000$，叫一百万(million)，10^9 叫十亿(milliard)，10^{12}叫一万亿(billion)，10^{18} 叫一百万兆(trillion)。下面还有 10^{24} (quadrillion)、10^{30} (quintillion)等，每次增加六个零。有些形式如 10^{15} 叫一千兆(billiard)，很少使用。在美国、苏联和法国，10^9 叫做 billion，10^{12} 叫 trillion 及 10^{15} 叫 quatrillion。选 10 作为基数很可能与我们的手指数是十个有关，但不能肯定。在老的计量单位(一打，一罗①)中，我们能找到以十二为基数的十二进制的点滴痕迹。法语称八十为**四个二十**，这是一个以二十为基数的(非位置制的)数制。score 这个词表示20个物体的组合，至今仍然使用。时间的量度 (1 小时=60 分，1 分=60 秒)，以及整个圆周角分为 360°，使人回忆起**巴比伦人的六十进制** (以 60 为基数)。这个数制已经清楚地呈现出位置制的某些特点。由于一直没有引进表示空位的符号 0，阻碍了这一数制的充分发展。零的引入是印度人最伟大的成就之一 (约在公元 800 年)。

不仅 10，12，20 或 60 适于做位置制的基数，每个自然数 $b>1$ 都能用作基数，因为任一个数 a 都可以严格地有一个 b **进位表示法**：$a=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0$，式中的自然数 a_i，$i=0, \cdots, n$ 都满足 $0\leqslant a_i<b$，a_i 称为 a 的**数字**。每个位置制都正好需要有 b 个不同的数字。

二进制。在技术上具有特别重要意义的是二进制。在这个数制中，位置值是基数 2 的幂，也就是 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, …这些位置值较十进制的位置值彼此大大接近；因此表示数的符号也变得较长。另一方面，我们只需用二个数字：0 和 1。常用记号 L 表示二进制的单位：

$$7=1\cdot4+1\cdot2+1\cdot1=1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0=\mathrm{LLL},$$

$$9=1\cdot8+0\cdot4+0\cdot2+1\cdot1=1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0=\mathrm{L00L},$$

$$\begin{aligned}22&=1\cdot16+0\cdot8+1\cdot4+1\cdot2+0\cdot1\\&=1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0=\mathrm{L0LL0}。\end{aligned}$$

二进制常用在数字计算机中。

---

① 一打(dozen)为 12 个，一罗(gross)为 12 打。——译者注

自然数 N 的序　每一个自然数都有一个紧跟着的后继数；例如 96 是 95 的后继数。这就意味着自然数列没有最后数，也永远没有尽头。数字 0 不是一个后继数；每一个非零的自然数必有一个紧挨着的前趋数；这就是说自然数列有起点，其第一个数是零。

对于任意两个自然数 n_1 和 n_2，一定满足如下关系式中的一个：$n_1 < n_2$，就是说 n_1 比 n_2 小，例如 $3<7$；或 $n_1 = n_2$，就是说 n_1 和 n_2 相等，例如 $5=5$；或 $n_1 > n_2$，就是说 n_1 大于 n_2，例如 $8>6$。

如果要表示一个数 n_1 最大等于 n_2，则写为 $n_1 \leqslant n_2$，表示 n_1 小于或等于 n_2。相应地 $n_1 \geqslant n_2$，则表示 n_1 大于或等于 n_2，其意思是 n_1 至少等于 n_2；因此，$4 \leqslant 19$ 和 $11 \leqslant 11$ 都是正确的表达式。

这些关系式有一个性质叫做传递性；对于小于关系，有：由于 $n_1 < n_2$ 和 $n_2 < n_3$，则 $n_1 < n_3$。“大于”和“小于”关系都可分别对自然数排出“线性”顺序。这种线性顺序的一个实例是**数轴**（见图 1.1-8）。在数轴上，自然数用一些孤立（分立）点来表示。n_1 小于 n_2，这就意味着在数轴上表示 n_1 的点在表示 n_2 的点的左边。

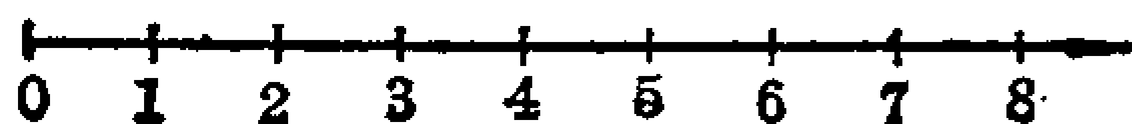


图1.1-8　数轴



图1.1-9　两组事物的合并，“5+3=8”

自然数 N 的计算

加法和减法　加法是自然数的最简单的运算，减法是它的逆运算。它们是**第一级**算术运算。

加法。加法反映两组事物的联合，**合并**（见图 1.1-9）。运算符号是 + （读作加）。加法也可以看作是连续计数的缩写：5+3 可以看作 5+1→6+1→7+1→8。被加的两个数叫作**加数**，其结果叫作它们的**和**。

加　法	加数 3	加 +	加数 2	等于 =	和 5

加法的交换律
$a+b=b+a$

和这个名词有两种含意: 8 是 5 与 3 的和; 表示式 $5+3$ 是一个和。两个自然数相加总是可以进行的,这就是说,两个自然数总能定出第三个自然数,即它们的和。自然数的加法有几个规律。

交换律。加数的先后次序对结果无影响; 例如 $5+3=3+5=8$。因为加数的可交换性对所有自然数都成立,所以可以简单地写为:

$$a+b=b+a。$$

这里以及在下文中, a 和 b 是代表任意自然数的符号。

结合律。在开始时, 我们仅以两个加数来定义加法。如果有三个数要相加,则应将其中的两个先加起来,所得之和与第三个数相加则将构成一个新的含两个加数的加法。在这里,数相加的次序对结果无影响。

结合律也适用于一切自然数。这就是说括号可以省去: $5+3+4=12$。同样,三个以上加数的加法也可以不用括号写出来。

加法的结合律
$(a+b)+c=a+(b+c)$

【例】 1. $5+3+4=(5+3)+4=8+4=12$。

2. $5+3+4=5+(3+4)=5+7=12$。

单调律。在两个数上各加上一个相同的数时, 这两个自然数的"小于"关系保持不变; 例如,由于 $3<4$, 就有 $3+7<4+7$。这个定律也适用于所有自然数。

加法的单调律	由于 $a<b$, 就有 $a+c<b+c$

减法。这个运算过程与加法的运算过程相反, 即从一个数取走或减去另一个数, 就是这个算术运算。其运算符号是 $-$ (读作减)。减法也可以看成是**倒计数的一个缩写**, 例如, $7-3$ 可以看成是 $7-1\to6-1\to5-1\to4$ (见图 1.1-10)。假如已知两数之和求其中的一个加数, 便由加法得到减法; 例如, $4+x=7$; $x=7-4$。相应地说减法是加法的**逆运算**。从一个数中减去另一个数,前者叫**被减数**;后者叫**减数**,其结果叫**差**。

减法				
被减数	减	减数	等于	差
7	−	3	=	4

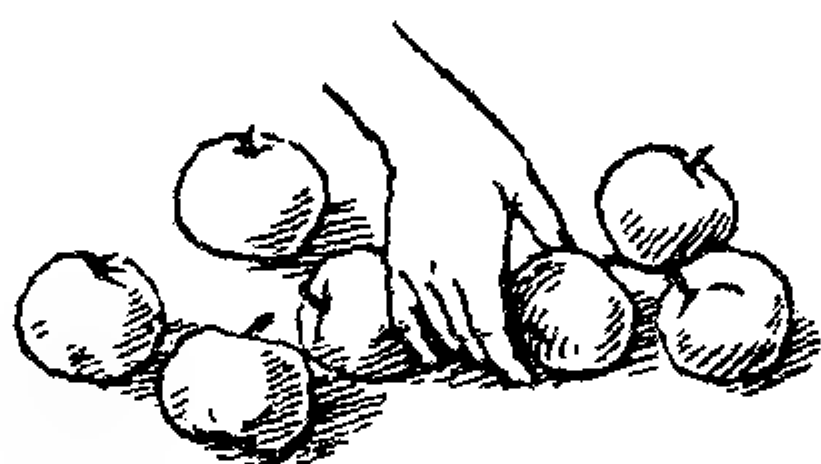


图1.1-10　7－3＝4

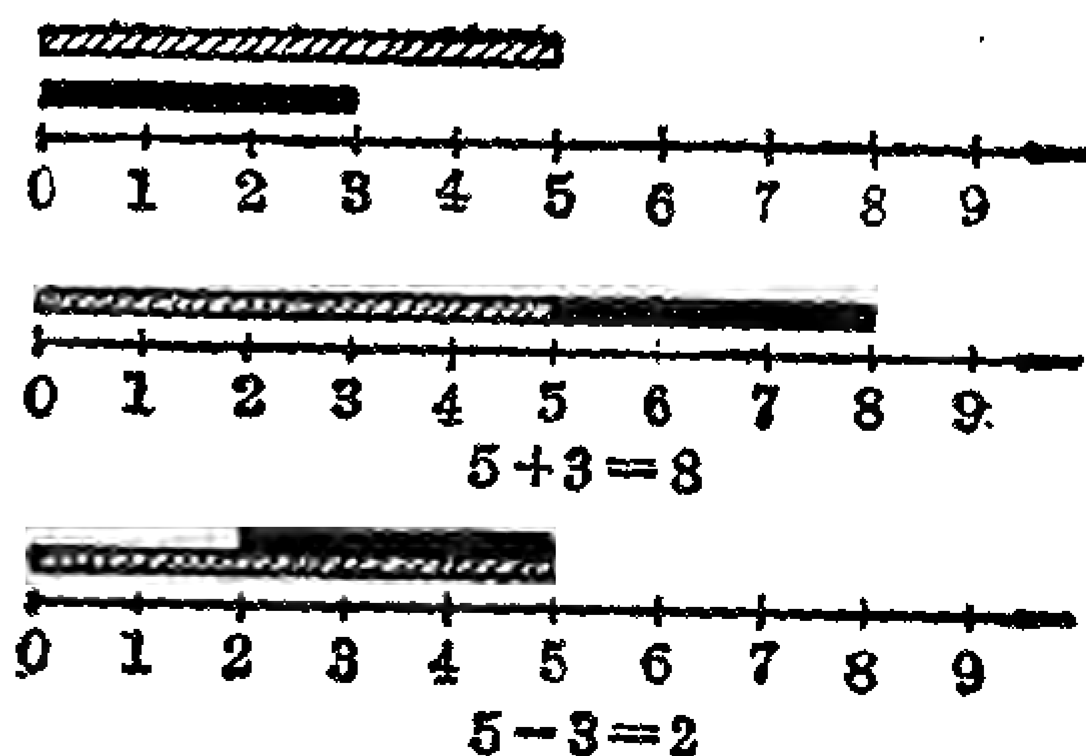


图1.1-11　在数轴上的运算

与“和”这个词一样，“差”也有两方面的含意：7与3的差是4；表达式7－3是一个差。

与加法不同，两个自然数的减法不总是可以进行的；例如，问题2－9没有一个自然数的解。有解的条件：被减数一定不能小于减数。

在数轴上进行第一级运算。自然数的加法和减法可以表示成数轴上的线段的加和减(见图1.1-11)。

加法算式。将加数一个写在另一个的下面，使位置值相同的数字放在同一列。从个位数开始加起，根据交换律可按任何次序相加，然后从右向左相继地向更高的位置值加去。如果某一列的和超过下一个位置的单位值，相应的数也要加上去：

【例】

```
Th H  T  U           Th H  T  U
 7  3  6  2           7  3  6  2              7  3  6  2
+1  6  8  4     或 +  1  6  8  4    写作  +   1  6  8  4
   ①  4  6           ①①                     ----------
   --                 -------------           9  0  4  6
①  0                 9 ①0①4  6
--
9
```

两个以上加数的加法按相同的方式进行。

减法算式。减法可按两个略有不同的方式进行：(t)取走法：7去掉3得到4；(s)补充法：从3补到7是4。

与这两个方法相应的减法算式都是常用的。在此两种方法中，减数都是写在被减数的下面(个位数在个位数的下面，等等)，并从个位数减起。下例说明在求十位数时的差别。

$$\begin{array}{r} 74627 \\ -\ 3193 \\ \hline 71434 \end{array}$$

【例】

$$\begin{array}{r} 6311 \\ -\ 768 \\ -\ 229 \\ -1046 \\ \hline 4268 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70003 \\ -11628 \\ \hline 58375 \end{array}$$

方法(t)：从 2 减去 9 是不能进行的；将一个一百分解成十个十，那么现在是从 12 减去 9 得到 3。接下去，原来的 6 个一百仅剩下 5 个一百了，由 5 个一百再减去 1 个一百得 4 个一百。

方法(s)：从 9 补充到 2 是不能进行的。从 9 补到 12 的数是 3。被分离的一百不从被减数中取出，而是加到减数上。从 200 补到 600 是 400，这就得到相同的结果。

(s) 法较容易懂；例如，假如问题中被减数连续包含几个零，需要多次做位置值分离。这个方法可以一步做几个减数的减法。在上例中，个位数的心算过程是：$6+9+8=23$；从 23 到 31 是 8。三个分离出来的十加到减数上；则对于十位数的计算是 $3+4+2+6=15$，从 15 到 21 是 6，等等。

乘法和除法　乘法和除法是第二级算术运算。

乘法。乘法可以用几种不同的方法来实现，例如，看成几个相等加数的加法，$12+12+12=3\times 12=36$（见图 1.1-12）。其运算符号是·（读作乘）或写个×号。

乘		法		
被乘数	乘	乘数	等于	积
3	·	12	=	36
因子	乘	因子	等于	积

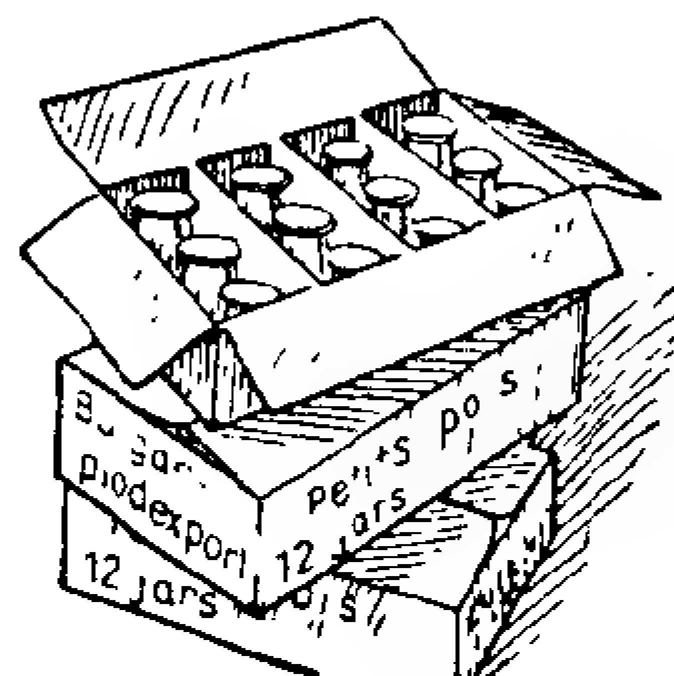


图1.1-12　$12+12+12=3\cdot 12=36$

由于乘数和被乘数可以互换，所以它们都叫因子。同样，乘积这个词也有两方面的含意：36 是 3 与 12 的乘积；表达式 $3\cdot 12$ 是一个乘积。两个数

相乘总是可以进行的，也就是说，两个自然数总是可以确定第三个自然数，即它们的乘积。对于任何自然数 a 都有:

$$a\cdot 0=0\cdot a=0 \quad \text{和} \quad a\cdot 1=1\cdot a=a。$$

交换律。$3\cdot 4=4+4+4=12$ 和 $4\cdot 3=3+3+3+3=12$，因此，$4\cdot 3=3\cdot 4$。乘积的因子可以互换，其结果不变。这对于一切自然数的因子都是正确的:

乘法的交换律
$a\cdot b=b\cdot a$

乘法的结合律
$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

结合律。假如三个数相乘，先将其中的两个乘起来，然后再将其积与第三个数相乘。这里结合因子的次序对结果无影响。例如，

$$3\cdot 4\cdot 7=(3\cdot 4)\cdot 7=12\cdot 7=84,$$
$$3\cdot 4\cdot 7=3\cdot(4\cdot 7)=3\cdot 28=84。$$

这个定律也适用于一切自然数。因此括号可以省去: $3\cdot 4\cdot 7=84$。对于三个以上的因子，处理过程相似。

单调律。由 $3<4$ 得出 $3\cdot 8<4\cdot 8$，但是 $3\cdot 0=4\cdot 0$。这对于一切自然数 a, b, c 都是正确的:

乘法的单调律	由 $a<b$ 和 $c>0$，便有 $a\cdot c<b\cdot c$

除法。在日常生活中有两类问题会导致另一个第二级基本算术运算——除法:

(i) 分配: 十二个梨子等分给四个人，每人得三个梨子（见图1.1-13）。

(ii) 求含量: 在12 cm 中含有 4cm 的几倍?——3 倍（见图 1.1-14）。

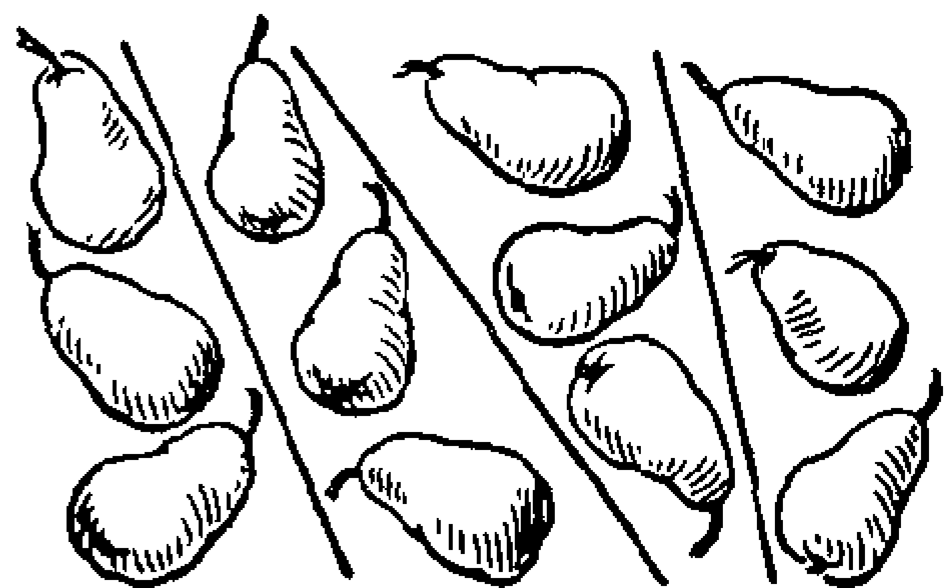


图1.1-13　分配: 12 个梨子分成 4 等分

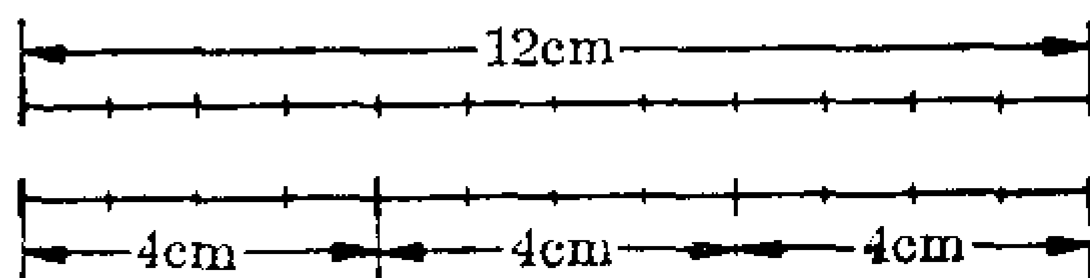


图1.1-14　包含量

在数学上,除法是作为乘法的逆运算得到的：已知积和一个因子,求另一个因子;由 $3\cdot x=15$ 和 $x\cdot 3=15$,都得到 $x=15:3$。

除　法	被除数	除以	除数	等于	商
	15	:	3	=	5

由于因子可以互换，所以与分配和求含量相应的两类问题都能导致同样的除法问题。运算符号是:(读作除以)。同样，商一词也有两方面的含意：**15 除以 3 的商是 5；表示式 15:3 是一个商。**

除法的适应性。两个自然数相除在自然数的范围内并非总是能进行的;例如,没有一个自然数 n 能满足 $3n=17$,因为 $3\cdot 5=15$ 而 $3\cdot 6=18$,因此 17 不能被 3 除尽。等号用在书写形式 $17:3=5$ 余 2 中是不严格的;而表达式 $17=3\cdot 5+2$ (被除数等于除数乘以商加余数) 是无可非议的。一个数被零除是不可能的;例如 $5:0=n$ 这就意味着必有 $n\cdot 0=5$,但是不管 n 是什么数,与零的乘积总是零,永远不会是 5。即使被除数是零被零除也是不可能的，因为这样的问题没有一个确定的解。人们可以说 $0:0=17$,因为 $0\cdot 17=0$;但也可以说 $0:0=193$,因为 $0\cdot 193=0$。

被零除是不能进行的。

算术运算的次序。假如在一个问题中出现不同级的运算时，运算次序可能会影响结果：例如 $7\cdot 5+3$,假如先做加法,得到 $7\cdot 8=56$;但是如果先做乘法,则有 $35+3=38$。对于减法或除法有类似情况。因此，运算次序必须满足如下规定：

较高级的运算先做。

假如在给定的问题中,运算需按不同于上述规定次序进行,那么必须引进括号。在括号中的运算先做：

$$(12+96):3-8\cdot(5-2)=108:3-8\cdot 3=36-24=12。$$

分配律。分配律反映了不同级算术运算之间的联系;例如,

$$5\cdot(4+3)=5\cdot 7=35,$$

但是还可以写成　$5\cdot 4+5\cdot 3=20+15=35;$

因此有　$5\cdot(4+3)=5\cdot 4+5\cdot 3。$

几个数的和与一个因子相乘,可先将这个因子与各个加数相乘,这个办法适用于一切自然数 a, b, c:

分　配　律
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

从分配律可导出如下关系式：

$$(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c;$$
$$(a+b):c=a:c+b:c,\ c\neq 0;$$
$$(a-b):c=a:c-b:c,\ c\neq 0。$$

对于自然数a, b, c来说，只有当减法$(a-b)$和除法$a:c$和$b:c$能进行时，这些等式才有意义。

乘法算式。乘法算式采用了分配律，所以只要有9·9乘法表的知识就够了。在原则上运算过程如下：

$$\begin{aligned}2356\cdot473&=2356\cdot(400+70+3)\\&=2356\cdot4(00)+2356\cdot7(0)+2356\cdot3\\&=9424(00)+16492(0)+7068=1114388。\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}2356\cdot473\\\hline 9424\\16492\\7068\\\hline 1114388\end{array}\qquad\text{或}\qquad\begin{array}{r}2356\cdot473\\\hline 7068\\16492\\9424\\\hline 1114388\end{array}$$

在第二式中，将一个因子分成个位数、十位数等分别与第一个因子2356相乘。然后将各部分乘积相加，如竖式所示。属于被乘数高位值各部分乘积的零不写出来，只是将数的位置作适当移动。

除法算式。在书写除法算式的过程中，将被除数分成个位数、十位数、百位数；例如：

$$86:2=(80+6):2=80:2+6:2=40+3=43。$$

由于除法是乘法的逆运算，所以商和除数的乘积一定是被除数，这对于各部分的商也同样成立。由此导出如下的除法算式：

$$\begin{array}{r}487\\23\,\overline{)11208}\\92\\\hline 200\\184\\\hline 168\\161\\\hline 7\end{array}$$

或者更简单地将各个减法运算用心算：

$$\begin{array}{r}487\\23\,\overline{)11208}\\\hline 200\\\hline 168\\\hline 7\end{array}$$

商是487，余数是7。

初等数论

可除性　12:4=3,这就是说,数 12 可以被 4 整除;但是 15 不能被 4 整除。因此, 4 叫作 12 的一个约数, 或说 4 整除 12(以符号表示$4|12$); 4 不是 15 的约数($4\nmid 15$)。一般说来, 假如有一个自然数 n 满足 $a=n\cdot b$, 我们就说自然数 a 可以被另一个自然数 b 整除; b 及 n 都叫作 a 的约数。另一方面, a 称为是 b 和 n 的倍数。数 0 可以被任何数 $a(a\neq 0)$ 整除,它是任何数的倍数。每一个不等于零的数都能被 1 及其本身整除, 这两个除数称为**假约数**。

质数。质数是只有假约数的那些数; 例如, 5 只能被 1 和 5 整除, 13 只能被 1 和 13 整除; 因此 5 和 13 都是质数。数 1 本身不算在质数范围内,所以质数数列是从 2 开始的。

质　数	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …

$$120=4\cdot 30$$

$$4=2\cdot 2 \qquad 30=2\cdot 15$$

$$15=3\cdot 5$$

$$120=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$$

因子分解。每个自然数不是本身为一个质数, 就是可以写成几个质数的乘积, 可以分解成几个质数因子。上例也可以从另一途径, 比如由 $120=10\cdot 12$ 开始,得出同样的分解。利用**欧几里得算法**可以证明将一个数分解成质数因子,除因子的次序外,结果是唯一的;换句话说,除了因子的次序以外,将一个自然数分解成质数因子的方法是唯一的(参看本章末尾的推导)。假如将 1 算作质数,这个定理的表述就不正确了。利用指数幂可使自然数的质数分解,书写更为方便,例如:

$$1008=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7=2^4\cdot 3^2\cdot 7。$$

埃拉多塞尼(Eratosthenes)筛法。埃拉多塞尼 (约公元前 276~194 年)曾经指出用如下方法可以获得某一自然数段中的所有质数: 删去 2 后面的所有隔位数(即所有能被 2 除尽的数), 接着删去 3 后面的所有隔二位的数(即所有能被 3 除尽的数),再删去 5 后面的所有隔四位的数(即所

有能被5除尽的数)等。该数段中剩下的数就是质数。在下表中我们可以看到,从1到100只需做四次删除,最后一次是除去所有能被7除尽的数。其原因是$7\cdot7=49$小于100,但已有$11\cdot11=121>100$;而11是7之后第一个没有被删除的数,因此它是紧接7之后的一个质数。

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

第一次　第二次　第三次　第四次　删除次序

假如你想知道一已知数如1303是否是质数,不需要将筛法一直做到1303,只要检查1303是否能被所有满足$P^2<1303$的质数P除尽。其理由是,假如1303果然能做因子分解$1303=m\cdot n$,那么,其中一个因子的平方最多是1303,另一个因子的平方至少要等于1303。对于1303来说只要用质数$P=2, 3, 5, \cdots, 31$试着去除就够了,因为37^2是$1369>1303$。事实上,可以证明1303是个质数。

质数数列的无穷尽性。欧几里得(约公元前300年)已经提出过这样的问题:质数数列会终止于某一数,还是存在着无穷多个质数?他间接地证明过**不可能有最大的质数**。假设有一个最大质数P;人们就可以构成一个自然数$N=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdots P+1$,所有质数包括$P$在内的乘积加1。这个数$N$不能被直到$P$的任何质数除尽,因为每一个质数和$N$相除都有一个余数1。因此,$N$本身可能就是个质数,否则它一定有一个不包含在$2, 3, \cdots, P$的质数列之内的质约数。这两者都与$P$是最大质数的假设相矛盾——因此,质数列是无穷尽的。现在知道的最大素数(质数)

是 $2^{19937}-1$; 它有 6002 位数字①。尚有一个没有解决的问题是，是否存在着无穷多个素数对，也就是说，相邻两个奇数都是质数，如 [5; 7]，[59; 61]，[641; 643]或[1451; 1453]，象这样的质数对的数列是否有尽头。

公约数和公倍数 *最大公约数*。如果 t 是 a 的一个约数，那么在 t 的因子分解中，只能含有 a 的因子分解中的质数，质数的指数最多与 a 的分解因子中同一个质数的指数相同，例如 $12|60$; $12=2^2\cdot3$; $60=2^2\cdot3\cdot5$。如果 t 是 a 和 b 的*公约数*，那么 t 只能含有 a 和 b 中的质数因子，而且最多是取 a 和 b 中指数幂较小的一个; 例如，12 是 48 和 360 的公约数; 由质数因子分解: $12=2^2\cdot3$, $48=2^4\cdot3$ 及 $360=2^3\cdot3^2\cdot5$, 可见 48 和 360 有好几个公约数: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24。其中 $24=2^3\cdot3$ 是最大的一个。我们说 24 是 48 和 360的最大公约数(gcd); $\gcd(a, b)$表示能够同时整除 a 和 b 的所有数中最大的一个。a 和 b 的每个公约数都可以整除 a 和 b 的最大公约数，因为最大公约数是 a 和 b 中所有公共质数因子的乘积，而且是取有关幂较小的一个。这是求最大公约数的基本方法，也同样适用于几个数的情况，如例所示。如果两个数 a 和 b 没有(除 1 以外)公约数，即 $\gcd(a, b)=1$，则 a 和 b 就叫*互质数*，或叫*相对质数*。

【例】
$$1260=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7$$
$$3024=2^4\cdot3^3\cdot7$$
$$5544=2^3\cdot3^2\cdot7\cdot11$$
$$\text{gcd}\quad 2^2\cdot3^2\cdot7=252$$

欧几里得算法。将较大的数分解成质数因子，这常常是件很麻烦的事，因为要做很多次试验，而且还会发生差错; 例如，23,613,864,709 是 112,843 和 209,263 二个质数的乘积。假如要想求这些数的最大公约数，最好不要用质数因子分解法，而用另外一个办法——*欧几里得算法*。这里不作证明，而以数 53,667 和 25,527 为例示范如下:

$$53,667=25,527\cdot2+2,613,$$
$$25,527=2,613\cdot9+2,010,$$
$$2,613=2,010\cdot1+603,$$
$$2,010=603\cdot3+201,$$
$$603=201\cdot3+0。$$

① 据 1979 年资料公布，目前已知最大素数为 $2^{44497}-1$，它有 13395 位数字。——译者注

因此 $$\gcd(53,667,\ 25,527)=201。$$

对于互质数的情况，有：

$$87=41\cdot 2+5,$$
$$41=5\cdot 8+1,$$
$$5=1\cdot 5+0。$$

因此 $\gcd(87,\ 41)=1$，数 87 和 41 是互质数。

如果要用欧几里得算法求两个以上的数，比如说 a，b 和 c 的最大公约数，则可一步一步地做：先求 $\gcd(a,\ b)=d$，再求

$$\gcd(a,\ b,\ c)=\gcd(d,\ c)。$$

最小公倍数。 60 是 6 和 15 的公倍数，因为 60 是 6 的倍数，也是 15 的倍数。6 和 15 还有其他公倍数，实际上有无穷多个。因为假如一个数 m 是 a 和 b 的倍数，则 m 的所有倍数也都是 a 和 b 的公倍数。6 和 15 的公倍数有 30，60，90，120，…，在这些数中以 30 为最小；我们说：30 是 6 和 15 的最小公倍数(lcm)；它能整除所有其他公倍数。假如 $m=\operatorname{lcm}(a,\ b)$，则 m 一定包含有 a 或 b 分解出的所有质数因子，而且每个因子取最高指数幂。由此可按如下方法来求三个数的最小公倍数：

【例】

$$\begin{array}{rl} 40 = & 2^3\cdot 5 \\ 36 = & 2^2\cdot 3^2 \\ 126 = & 2\cdot 3^2\cdot 7 \\ \hline \operatorname{lcm} & 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2520 \end{array}$$

对于较大的数因为要作质数因子分解，所以这个方法也不宜使用。有一个简捷的办法，是先用欧几里得算法求出 gcd，然后利用关系式

$$\operatorname{lcm}(a,\ b)\cdot\gcd(a,\ b)=a\cdot b。$$

但是，对于两个以上的数，不存在这种简单关系。

可除性法则　数 84 可以被 4 和 3 整除，因此也可以被 $4\cdot 3=12$ 整除。这个结论只有当两个除数为互质数时才成立。一般有：

假如 a 可以被 m 和 n 整除，而且 $\gcd(m,\ n)=1$，则 a 也可以被 $m\cdot n$ 整除。

求出约数，如果可能直接看出对某些数的可除性，不仅有利于素数因子的分解，特别是还有利于分数中的约分。有关法则是利用了十进制书写方式的简单规律；例如，对于 10 的倍数被 2 或 5 的整除性问题是无需

多加考虑的，因为10能被2和5整除。100的倍数被4和25的整除性问题，1000的倍数被8和125的整除性问题，也是如此。10的所有次幂，即10，100，1000等当被3或9除时都余1。按照这个法则进行余数计算，就有如下规律：例如，$600=6\times100$，则必有余数$6\cdot1=6$；对于$230=2\cdot100+3\cdot10$，则余数为$2\cdot1+3\cdot1=5$。当除数为3或9时，任一个数的**数字和**与此数的余数相同。数字和的定义是所有数字之和；7309的数字和是$7+3+0+9=19$，它不能被3或9整除。

10的所有偶次幂，即100，10000，1000000等在被11除时都有余数1，而所有奇次幂(10，1000，100000等)都有余数10或$10-11=-1$。这里**交错数字和**与数本身的余数相同。如何求交错数字和，现以下例来说明。

【例】 8 [5] 9 [7] 6

8 + 9 + 6 = 23

[5] + [7] = [12]

交错数字和 23 − [12] = 11。

因此85976能被11整除。

一个数：

如果最后一位数字能被2整除，此数能被2整除；

如果最后两位数字表示的一个数能被4整除，此数能被4整除；

如果最后三位数字表示的一个数能被8整除，此数也能被8整除；

如果末位数字能被5整除，即末位数是5或0时，则此数能被5整除；

如果末两位数字表示的数能被25整除，则此数能被25整除；

如果它的数字和能被3整除，则此数能被3整除；

如果它的数字和能被9整除，则此数能被9整除；

如果它的交错数字和能被11整除，则此数能被11整除。

准确度的检验 余数计算。如果a和b在被d除时有相同的余数r，这就写作$a\equiv b$(模d)(读作a和b对模d是等余的)，例如，$17\equiv42$ (模5)。对于余数r，则有$a\equiv r$ (模d)和$b\equiv r$(模d)。因此，$17\equiv2$ (模5)，和$42\equiv2$ (模5)。如果a能被d整除，这也可以写成$a\equiv0$ (模d)。有如

下法则:

假如有　$a_1 \equiv b_1$(模 d)

和　$a_2 \equiv b_2$(模 d),

则有:　$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2$(模 d)

$a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2$(模 d)

$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2$　(模 d)。

【例】

$22 \equiv 4$　(模 6)

$15 \equiv 3$　(模 6)

$37 \equiv 7$　(模 6) $\equiv 1$(模 6)

$7 \equiv 1$　(模 6)

$330 \equiv 12$ (模 6) $\equiv 0$(模 6)。

这两个例子还告诉我们，如何通过适当地加上或减去 d 的方法将数化简为简单的余数系 0, 1, 2, …, $d-1$(本例中为 0, 1, …, 5)。余数计算法则用于验算，只要用数对模 d 的余数去代表这些数，而不需要用这些数本身进行重复计算；为使余数容易算得，所以通常选 $d=9$，还常选 $d=11$。如果出现不相符合的情况，可以肯定有计算错误。但是当验算给出相符的结果时，并不能保证计算正确：误差可能是 d 的一个倍数；因此用 $d=2$ 进行验算是意义不大的。

弃九法。 一个数被 9 除的余数就等于这个数的数字和。这是 9 整除性法则的推广。因此，用弃九法对基本算术运算进行验算比较容易:

几个数的和(差，积)被 9 除的余数就等于各个数被 9 除的余数之和(差，积)。

加法: 化简为简单余数系。这种计算只可能相差一个 9 的倍数，例如，由于将两位数字互换。

减法: 假如余数相减，得出一个负数，则化为简单余数系就很重要。

乘法: 这里积的余数不等于各个余数的积，因此这个积不可能是正确的，正确的应为 235,694。

弃十一法。 就象一个数的数字和等于该数被 9 除的余数一样，一个数的交错数字和等于该数被 11 除的余数；要注意那些数字起交错数字和的被减数的作用，那些数字起减数作用。

【例 1】

问题		数字和		余数
412		7		7
+3 964	⇨	22	⇨	+4
+4 722		15		+6
9 098	⟶	26≡8	⟶	17≡8

【例 2】

问题		数字和		余数
7 428	⇨	21	⇨	3
−3 986		26		−8
3 442	⟶	13≡4	⟶	−5≡4

【例 3】

问题		数字和		余数
617	⇨	14	⇨	5
·382		13		·4
234 694	⟶	28≡1	⟶	20≡2

【例 4】

问题		交错数字和		余数(模 11)
2 468	⇨	12− 8= 4	⇨	4
+4 293		5−13=−8		3
6 761	⟶	8−12≡−4≡7	⟶	7

此例中两数的和只可能出现 11 的倍数的差数。如果对同一问题同时进行弃 9 和弃 11 方法，就可以对计算准确度了解到 99 的倍数范围内。

1.2 整数 Z

基础知识

为什么有整数? 在日常生活中有些情况仅靠自然数来表示量是不够的，因为有些量可能会有两种相反的**趋势**，两个相反的**方向**。例如，说温度是 23°C 是不完全的，还需说明是在冰点以上还是在冰点以下（如图 1.2-1)。金额 100 元是一笔钱数，但是假如把这笔钱和某人的财产联系起来，就需要知道这是储蓄单上的存款还是从银行借来的贷款。谈论某地的高度时，十分重要的是要说明它是在海拔 895 米的山上还是在海平面以下 895 米的洼地里。为了表征这些相反的趋势，要将有关量加上符号，例如，+23°C 和 −23°C 及 +895 米和 −895 米；在计年表中，也用 −300 和 +300 来表征纪元前和纪元后发生的事。在测量时，一定要有

个参考点。一般说来，参考点由实际观察点来定，但在原则上它是任意的。例如，有零点不同的温标(华氏)。如果一个量只在一个方向发生变化，适当选择参考点可将符号略去(开尔文绝对温标)。在理论上，地球上的高度可以从地心量起。这样**在考虑方向**时得出的**正数**+1，+2，+3，…和**负数**−1，−2，−3，…，包括0在内(严格地说 ±0)统称为**整数**。

减法的可实现性。 在数学上，为了使加法的逆运算——减法总能够进行，引进整数是必要的。例如，减法 7−11 在自然数中无解。我们说：方程 $x+11=7$ 在自然数域内是不可解的。



图1.2-1　温度23°C

在整数组成的数域中，任何减法问题都有解。

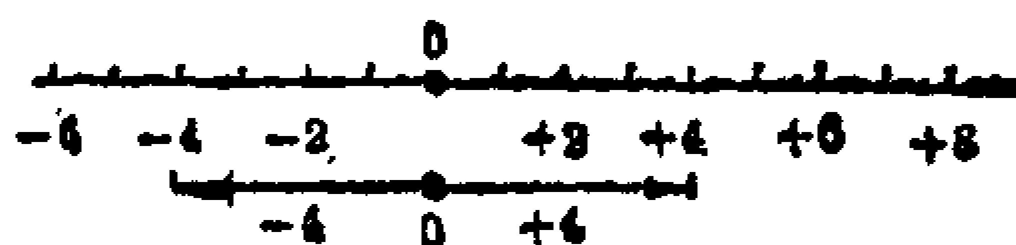


图1.2-2　数轴与数(+4)和(−4)互为相反数的示意图

相反数。 就象数轴表示自然数一样，数轴也用于表示整数(见图1.2-2)。非负整数相当于自然数。在数轴上，对于每个不为零的整数，都有一个到零点的距离相同但位于另一边的数。这样两个仅仅符号不同的数叫作相反数，例如，−4 和 +4。相反数是用一个负号作为前缀来表示的。因此有 $-(-4)=+4$ 和 $-(+4)=-4$。对于零也有 $-0=0$。

绝对值。 两个相反数在数轴上到零点具有相同的距离，我们说，它们具有相同的**绝对值**。两个数中非负数的一个就定义为它们的绝对值：

$$|a|=a,\ a\geqslant 0 \quad 和 \quad |a|=-a,\ a<0。$$

数序。 两个不同的整数，较小的一个是在数轴上更左边的一个。对于任意两个整数 n_1 和 n_2，以下三个关系必有一个成立：$n_1<n_2$，或 $n_1=n_2$，或 $n_1>n_2$。例如 $-3<+2$，$+5<+7$，$+8=+8$，$-1>-7$，$+3>-5$。每个整数都有一个紧跟着的前趋数和一个后继数，也就是说，整数数列既没有最小的数，也没有最大的数，既没有第一个数也没有最后一个数。

整数 Z 的计算

第一级算术运算 运算符号“+”和“−”与正负数的符号看上去是一样的，为了区别起见，我们用括号将整个数（包括正负号）括起来（见图1.2-4）。负号“−”还有表示相反数的作用。

整数的加法是按照自然数的加法来定义的，即 $(+3)+(+4)=+7$，因为 $3+4=7$。

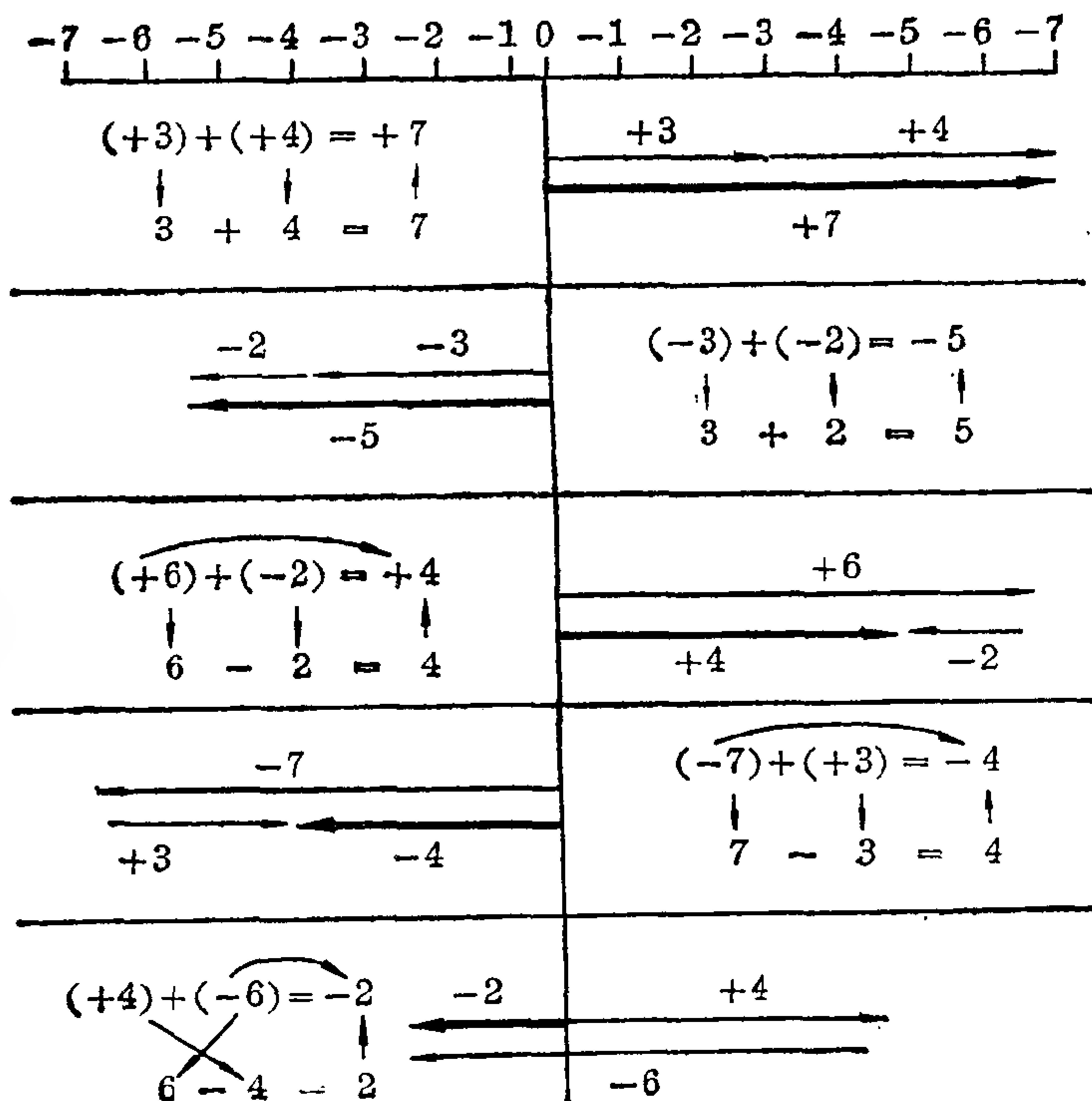


图 1.2-3 数轴上的相加

如果两个加数符号相同，它们的和就是与它们绝对值相应的自然数的和，并保留加数的符号。

在 $(-3)+(-2)=-5$ 中，和是 $3+2=5$，保留负号。

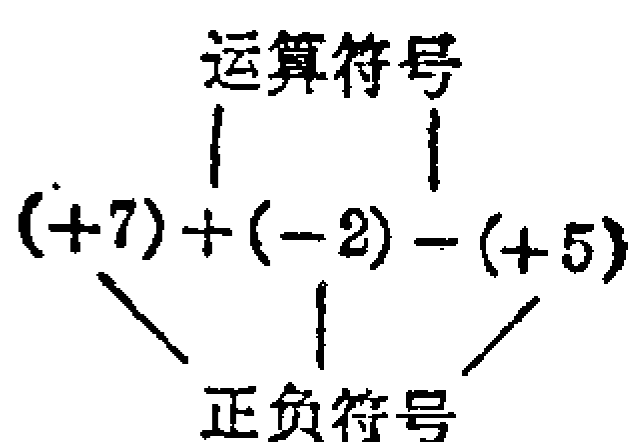


图 1.2-4 正负数符号和运算符号

如果两个加数异号，其和为它们绝对值相应的自然数的差，和的符号为绝对值较大的那个加数的符号。

在$(+6)+(-2)=+4$中，正加数$(+6)$比负加数(-2)的绝对值$+2$大；在$(-7)+(+3)=-4$中，负加数的绝对值$+7$比正加数大；在$(-6)+(+4)=-2$中，负加数的绝对值$+6$比正加数大(见图 1.2-3)。

$(+4)+(-6)=-2$和$(-6)+(+4)=-2$这两个例子说明加法的交换律仍有效。加法的其他定律也都成立，并可用任何整数来证明。

交换律	$a+b=b+a$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$
单调律	由$a<b$，有$a+c<b+c$

整数的减法必须定义为加法的逆运算；$(-7)-(+3)=x$一定与$x+(+3)=-7$具有相同的意义。但是，根据加法的定义$(-10)+(+3)=-7$，因此必有$x=-10$，即$(-7)-(+3)=-10$。

另一方面，$(-7)+(-3)=(-10)$。因此对于任何减法都有

减去一个整数可以用加上它的相反数来代替。

因此减法在整数数域中可以不受限止地进行，因为对加法没有限制，而且每个整数都有它的相反数；例如：

$$(+28)-(-16)=(+28)+(+16)=+44。$$

代数和。既然在整数中每个减法都可以用相应的加法代替，因此我们定义式中各项仅由第一级运算组成的式子叫代数和表达式。假如式中含有两个以上的加数，计算可方便地按如下方式进行：

$$\begin{aligned}&(+15)-(+27)+(-11)-(-9)+(+31) && \text{变换符号}\\ =&(+15)+(-27)+(-11)+(+9)+(+31) && \text{重新组合}\\ =&(+15)+(+9)+(+31)+(-27)+(-11) && \text{同号合并}\\ =&(+55)+(-38) && \text{最后相加}\\ =&+17\end{aligned}$$

第二级算术运算 整数的乘法也是按照自然数乘法来定义的，然后一步一步地进行运算。

假如两个因子都是正的，它们的乘积是与相应的两个自然数乘积一致的正数。

$(+4)\cdot(-7)$的积可用类似于 $4\cdot7=7+7+7+7$ 即等加数连加来说明，并由 $(+4)\cdot(-7)=(-7)+(-7)+(-7)+(-7)=-28$ 办法求出。假如乘数是负的，我们约定乘法的交换律仍适用：

$$(-7)\cdot(+4)=(+4)\cdot(-7)。$$

两个异号因子的乘积是负的，积的绝对值就是这两个因子绝对值的积。

$$(+3)\cdot(-7)=-21 \qquad (-5)\cdot(+8)=-40$$

$$3\cdot7=21 \qquad 5\cdot8=40$$

我们对至今已作出的一些规定作一比较就能看出，当一个因子的符号改变时，乘积的符号也跟着改变。因此，人们约定：

$$(-4)\cdot(-7)=+28。$$

两个负因子的积是正的，其绝对值就等于这两个因子绝对值的积。

乘法小结：

如果两个整数同号，它们的积是正数，否则是负数，积的绝对值就等于各个数绝对值的积。

交换律	$a\cdot b=b\cdot a$
结合律	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

【例】

1. $(-13)\cdot(+5)=-65$。
2. $(-8)\cdot(-12)=+96$。
3. $(+3)\cdot(-4)\cdot(-9)=(+3)\cdot(+36)=+108$。
4. $(-3)^4=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=+81$。

乘法定律。从乘法的引入和三因子相乘的例子，显然可见，对于整数 a, b, c 相乘，乘法的交换律和结合律也成立。单调律对于自然数 $(c>0)$ 成立；由 $a<b$，就有 $a\cdot c<b\cdot c$。这个定律对整数不成立；当 c 为负数时，

由 $a<b$ 而得 $ac>bc$，这可由下例说明：

$$(+5)<(+7),$$

但
$$(+5)\cdot(-3)>(+7)\cdot(-3)。$$

除法。除法是乘法的逆运算。因此 $(+12):(-4)=x$ 与 $(-4)\cdot x=+12$ 是等价的。但是此式只有当 $x=-3$ 时才成立。同样，我们可以导出任何符号组合的除法法则。一般说来：

假如被除数与除数同号，商为正，否则为负；商的绝对值就等于各数绝对值的商。

【例】 $(+72):(+6)=+12$，　$(+119):(-17)=-7$，

$(-75):(+25)=-3$，　$(-91):(-7)=+13$。

由于非负整数，即正整数和零的算术运算已被确定为与自然数一样的算术运算，所以正整数符号"+"可以省去。正整数用相应的自然数代替，可使表达式更为简单；例如

$$(+9)+(-17)-(+6)+(+21)-(-2)=9-17-6+21+2=9$$

或 $7\cdot(-9)=-63$ 或 $(-56):(-7)=8$。至于它们究竟是属于计数性质的自然数还是正整数，从有关上下文中是能看清楚的。

关于整数的历史　在希腊数学中没有负数，负数的最早踪迹可能是在丢番图（Diophantos，约公元250年）的著作中发现的。在印度（约公元700年），印度人已将负数的计算充分地发展起来了。有趣的是他们关于正和负的名词是由他们的信贷和借贷的术语中来的。在印度人的方程理论中负整数起着很重要的作用。

负数在欧洲立足较晚；其原因可能是因为在印度和欧洲之间搭起数学桥梁的阿拉伯人拒绝接受负数。米歇尔·斯蒂弗尔（Michael Stifel）在他的《整数算术》一书中取得突破(1544年)。直到1867年通过赫曼·亨凯尔(Hermann Hankel)的努力，整数才在数学中最后建立起来。

1.3　有理数Q

基础知识

什么是分数？如果将6只苹果均分给3个小孩，可以算出 $6:3=2$，这样就知道每个小孩得2只苹果。但是，如果只有两只苹果可供分配，就要解 $2:3$ 的除法问题。在自然数中这个问题不能解。然而人们还是用刀

做了这个除法(见图 1.3-1)。在此例中,每个小孩的份额可用分数 2/3 来表示。所有与此类似的分配问题都能导出分数。

说明: 每个分数都具有形式 $\frac{p}{q}$。分子 p 表示被分物件的数量,分母 q 表示分的份数。分数线是水平画的,如果不会引起混淆,用斜分数线(斜分隔线)也是允许的,如 3/4,特别是在草写的文稿中常有应用。分子为 1 的分数称为**单位分数**,例如 1/3; 1/8; 1/12。分子小于分母的分数叫**真分数**,例如 2/3, 1/7, 5/9, 10/11。分子大于或等于分母的分数叫**假分数**,例如 3/2, 16/3, 9/8, 5/5。

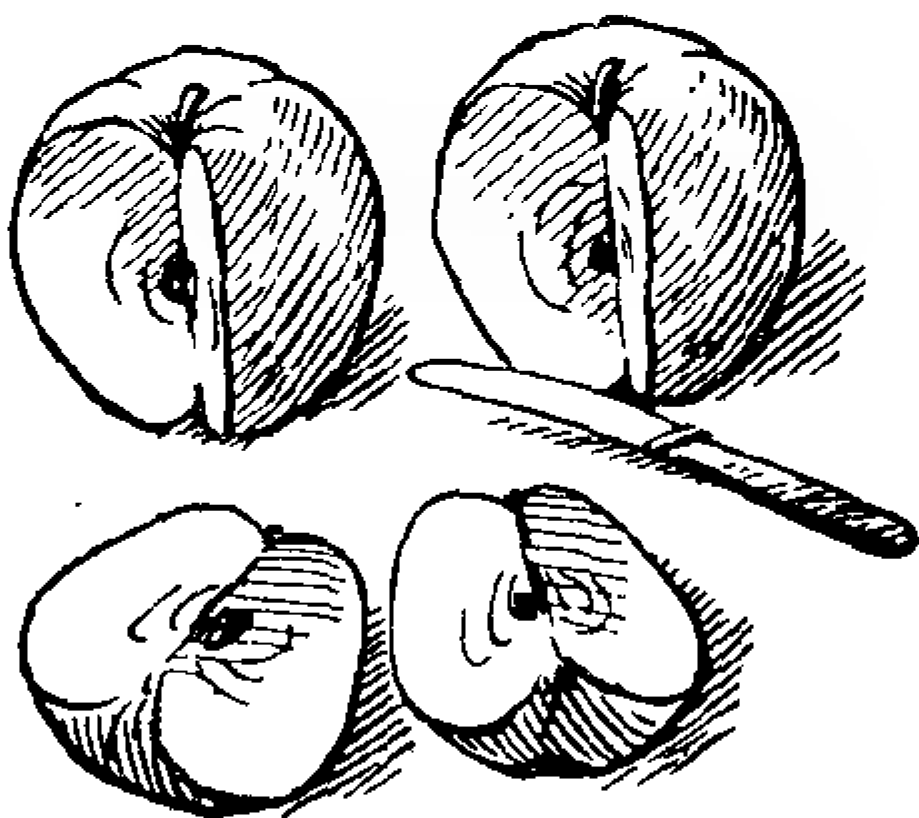


图 1.3-1　两个苹果分给三个小孩

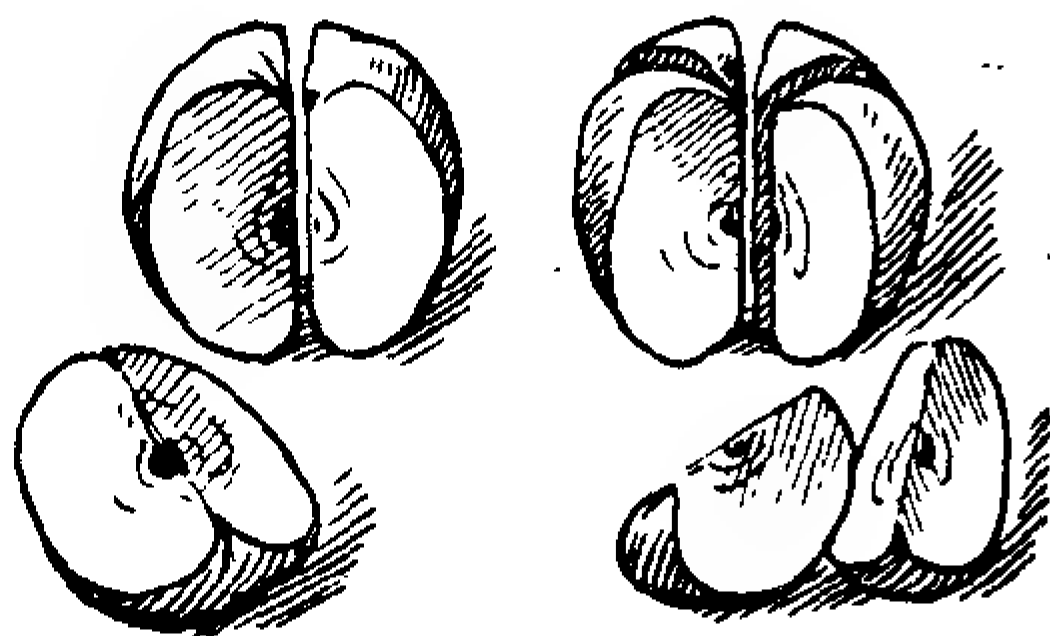


图 1.3-2　三分之一与六分之二是一样的

当要划分一个或几个实体时,就会产生分数。

分母永远不能为零。

假如一个分数的分子等于另一个分数的分母,而另一个分数的分子也等于这个分数的分母,这两个分数称为**互倒数**; 例如 3/5 与 5/3, 17/6 与 6/17。

一个分数的分子或分母可以是负数,如, $-3/5$, $-2/-9$, $7/-4$。根据整数计算的符号法则,有 $-3/5=3/-5=-3/5$, $-3/-5=3/5$。通常将负数符号写在分数线或斜分隔线的前面,而不写在分子或分母上。按照这种习惯,上述真分数和假分数的定义对负分数也成立。在下文的例子中主要是采用正分数,其目的仅是为了简化表达方式;所有一切经过适当变动,都同样适用于负分数。

等价分数　将一个苹果分成三份,每人取一份(图 1.3-2),与将一个苹果分成六份每人取两份,其数量是一样,即 $1/3=2/6$。同样有: $2/5=$

4/10, 5/3=20/12, 2/3=4/6=6/9=…=24/36=…。

扩分。假如有两个分数，一个分数的分子和分母是另一个分数的分子和分母的同一个倍数，例如8/9=40/45，那么我们就说第二个分数是由第一个分数扩张而来：

扩　分	$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$

扩分意思就是用同一个数($c\neq0$)去乘分子和分母。

约分。扩分的逆过程叫分数的约分。

约　分	$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$

对一个分数约分就是用同一个数($c\neq0$)去除分子和分母。

任一分数，当分子和分母有公因子时，就可以约分。在2/7=(2·3)/(7·3)=6/21中，从左边变到右边叫扩分，从右边变到左边叫约分。由于约分使分子和分母减小，所以通常要对分数尽可能约分。这样的分数叫**简分数**。

有理数　表示同一个量的所有分数，也就是说，通过扩分或约分或两者兼用能彼此互换的所有分数，例如3/4, 6/8, …, 27/36, …可以归并成一个数，就是所谓**有理数**。分数3/4, 6/8, 27/36仅是同一个有理数的不同表示式。习惯上将有理数写成简化形式，在此例中是3/4。因此，3/4和所有的简分数一样，具有两重意义：首先它是一个分数，其次它表示一个**有理数**，代表通过扩分能得到的所有分数，即同一个数的各种不同表达形式的总体。在计算时，有理数的任一表达形式根据需要都可以用同一数的任一其他表达形式来代替。分母为1的分数和由它们扩分来的那些分数，如3/1=6/2=…=18/6=…归在有理数的范围内，并与整数等价，如15/3=5/1=5, 8/8=1/1=1。在这里一种表达形式也可以根据需要用另一种表达形式来代替。整数0可以表示成分子为0的分数。

有理数的序。象自然数和整数一样，对于任意两个有理数r_1和r_2，只能满足如下三个关系中的一个：$r_1<r_2$，或$r_1=r_2$，或$r_1>r_2$。对于正数a, b, c，并有$a<b$时，一定有$a/c<b/c$和$c/a>c/b$。同分母的分数，分子大的代表的数大，如2/7<6/7。同分子的分数，分母小的代表的数大，如5/9<5/6。假如要比较两个正有理数的大小，先求出它们的**同分母表达式**，再比较分子；由7/12=35/60和11/20=33/60得11/20<7/12。对

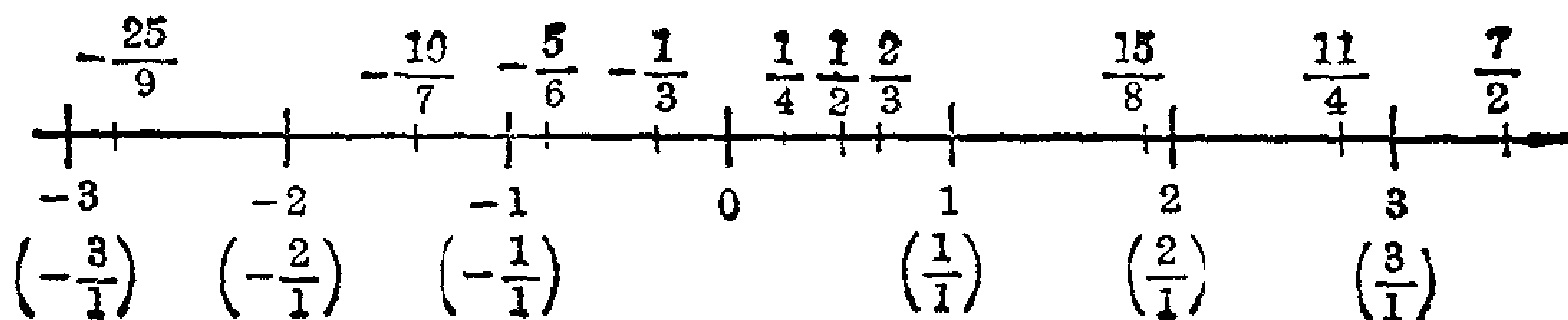


图 1.3-3　数轴

于 a/b 和 c/d 总可以找到这样两个同分母的表达式；在任何情况下两个分母的乘积 $b\cdot d$ 就是一个公分母。有关分子即为 $a\cdot d$ 和 $b\cdot c$。

如果 $b, d>0$，则当且只有当 $a\cdot d<b\cdot c$，才有 $a/b<c/d$

同样，在有理数的数域中既没有最小数也没有最大数。后继关系也不复成立了：没有一个有理数有一个最接近的前趋数，也没有一个有理数有一个最接近的后继数。

在任何两个不同的有理数 r_1 和 r_2 之间，比如说 $r_1<r_2$，总是还有数，实际上还有无限多个有理数 r 满足 $r_1<r<r_2$。

在考虑数的顺序时，有理数可以用数轴（见图 1.3-3）上的点或箭头来表示。线上的每一个点都由有理数的一个表达式给定。在表示分数时，一个有理数的所有表达形式都占据同一位置。在数轴上，较小的有理数总是在较大数的左边。

普通分数的计算

有理数的计算最初是通过将它们的表达式写成普通分数来进行的。例如，讨论异分母的分数加法时，尽管比较麻烦，较为精确的办法是先将有理数表示成同分母的分数然后再讨论它们的加法。下面的章节将用小数作为有理数的另一种表达形式，其计算方法略有不同。普通分数这个名词起先是强调对六十进分数的区别，现在是强调对小数（十进分数）的区别。

加法和减法　有关分数可以是同分母也可以是异分母的。

同分母的分数相加或相减就是将它们的分子相加或相减；分母保持不变。

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$$

【例】 1．3/7+5/7=8/7。

2．4/11−7/11=−3/11。

3．5/17+9/17−18/17+13/17−2/17=7/17。

因此，每个假分数都可以分成两个加数，第一个是整数，第二个是真分数：8/7=7/7+1/7，22/5=20/5+2/5。因此，假分数通常是写成带分数，如 $8/7=1\,^1/_7$；$22/5=4\,^2/_5$；应该想象在整数和真分数之间有一个加号。

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

异分母的分数相加或相减时，先将它们写成同分母的形式，然后再将分子相加或相减。

最简单的一种情况是一个分母为所有其他分母的公倍数；例如，对于 2/3−7/12+5/4，12 是最小公倍数。因此可以用 4 和 3 去扩张 2/3 和 5/4，使它们都具有分母 12；2/3−7/12+5/4 = 8/12 − 7/12 + 15/12= $4/3=1\,^1/_3$。一般说来，第二个和式可以直接写成一个分数的形式，该分数的分子为各个分子之和：2/3−7/12+5/4=(8−7+15)/12=4/3= $1\,^1/_3$，这样比较简单。

对于 1/6+3/10−11/15，先要求出各个分母的公倍数。这可以估计出来，比如说 60，或者通过算出分母的积来求。然后将这些分数分别用 10，6 和 4 来扩分。为了使分子尽可能小，我们选各个分母的最小公倍数(lcm)作为最小公分母(lcd)。最小公倍数按常用的方法求出，比如说，用分解质因子的方法。将最小公分母的乘积表达式略去有关分母的质因子，就得出相应分数的扩张因子(e.f.)；例如，如果最小公分母是 2·3·5，最后一个数的分母是 15=3·5，则它的扩张因子是 2。

【例】

	扩张因子
6=2·3	5
10=2·5	3
15=3·5	2
最小公分母 2·3·5=30	

$$\begin{aligned}1/6+3/10-11/15&=(5+9-22)/30\\&=-8/30\\&=-4/15。\end{aligned}$$

【例】 $3^{17}/_{21}-3/8-11/12+2=80/21-3/8-11/12+2$

	扩张因子
$21=3\cdot7$	$2^3=8$
$8=2^3$	$3\cdot7=21$
$12=2^2\cdot3$	$2\cdot7=14$
最小公分母 $2^3\cdot3\cdot7=168$	

应用对各个分母进行质因子分解法求最小公分母时，整数可以不考虑，因为整数的分母是1。例如，在求得最小公分母168之后，就有

$$\frac{80}{21}-\frac{3}{8}-\frac{11}{12}+2=\frac{640-63-154+336}{168}$$

$$=\frac{759}{168}=\frac{253}{56}=4\frac{29}{56}。$$

对于 $3/5+1/4-2/9$，各个分母没有公因子，它们**两两互为质数**。因此最小公分母就是各个分母的乘积；其结果是 113/118。

乘法和除法　对普通分数进行第二级算术运算要比第一级运算容易，因为不需要求最小公分母。不需要对同分母或异分母分数的运算加以区别。

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

分数的乘积是一个分数。其分子是各个分数分子之积，分母是各个分数分母之积。

整数也可以看成是分母为1的分数。为了避免数太大容易引起错误，在相乘之前要尽量约简。

【例】

1. $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{2\cdot3}{5\cdot8}=\frac{1\cdot3}{5\cdot4}=\frac{3}{20}$。

2. $\frac{4}{7}\cdot3\frac{9}{32}=\frac{4}{7}\cdot\frac{105}{32}=\frac{4\cdot105}{7\cdot32}=\frac{1\cdot15}{1\cdot8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$。

3. $7\cdot\frac{9}{28}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7\cdot9\cdot2}{1\cdot28\cdot3}=\frac{1\cdot3\cdot1}{1\cdot2\cdot1}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$。

4. $\frac{11}{17}\cdot\frac{17}{11}=\frac{11\cdot17}{17\cdot11}=\frac{1\cdot1}{1\cdot1}=1$。

5. 如果一个拖船的速度是 $4\frac{1}{2}$ 英里/小时，那么它在 $2\frac{3}{4}$ 小时内走过的路程是 $9/2\cdot11/4$ 英里 $=99/8$ 英里 $=12\frac{3}{8}$ 英里。

例4说明两个互为倒数的分数之积是1。这个性质可以作为有理数互倒性的简单定义：

两个有理数，当且只有当它们的乘积是1时，才互为倒数。

因此，任何不为零的有理数都有一个倒数，如 -3 和 $-1/3$ 是互倒数，因为 $-3\cdot(-1/3)=1$。

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}$$

被一个分数除就等于乘上它的倒数。

对除法的这种运算法的有效性可作如下论证：

$$\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{9};$$

既然除法是乘法的逆运算，商和除数之积一定等于被除数。实际上 $8/9\cdot3/4=2/3$，或一般写为 $\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$。

【例】

1. $\frac{7}{12}:\frac{5}{8}=\frac{7\cdot8}{12\cdot5}=\frac{7\cdot2}{3\cdot5}=\frac{14}{15}$。

2. $\frac{3}{5}:6=\frac{3\cdot1}{5\cdot6}=\frac{1}{10}$。

3. $5:\frac{6}{7}=\frac{5\cdot7}{1\cdot6}=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}$。

4. $2\frac{4}{13}:\frac{16}{39}=\frac{30\cdot39}{13\cdot16}=\frac{15\cdot3}{1\cdot8}=\frac{45}{8}=5\frac{5}{8}$。

5. $\frac{11}{12}:\frac{11}{12}=\frac{11\cdot12}{12\cdot11}=1$。

6. 一辆小摩托车在两小时一刻钟内走了 $58\frac{1}{2}$ 英里，其平均速率为 $117/2$ 英里$:9/4$ 小时$=117/2\cdot4/9$ 英里/小时$=2\cdot13$ 英里/小时$=26$ 英里/小时。

有理数除法已被转化为乘法；因此：

所有有理数除法——被零除除外——都能这样做。

繁分数。除号和分数线或斜分隔线一般可以互换，例如

$$2:3=2/1:3/1=2/1\cdot1/3=2/3。$$

因此，普通分数的除法都可以表示成一个繁分数，繁分数的分子和分母不

是整数而是分数。反之，每个繁分数都能用除法简化。但是只有当主分数线被指明时，表达式才被唯一确定，主分数线是按其长度或其紧接在等号的位置来确定的。

【例】

1. $\dfrac{3}{\dfrac{7}{5}}=3:\dfrac{7}{5}=3\cdot\dfrac{5}{7}=\dfrac{15}{7}$。

2. $\dfrac{3}{\dfrac{7}{5}}=\dfrac{15}{7}$，但 $\dfrac{\dfrac{3}{7}}{5}=\dfrac{3}{35}$。

3. $\dfrac{\dfrac{1}{3}}{9}=\dfrac{1}{3}:9=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{27}$。

4. $\dfrac{\dfrac{2}{5}}{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{2}{5}:\dfrac{3}{8}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{8}{3}=\dfrac{16}{15}=1\dfrac{1}{15}$。

在前面讨论整数时说明过的加法和乘法的交换律和结合律以及分配律也适用于有理数的运算。

十进小数

基础知识　在位置制中，一个数符中的数字除了它们的数值之外还有一个位置值；例如，在3752中5按其位置表示5个十。在十进位制中，每个位置值都是它左边位置值的$\frac{1}{10}$。只要用这个数制表示自然数或整数，个位数一定是在最后一个位置上。

这个数制可以延伸下去，超出个位数，用来表示有理数。在个位数之后，从左向右，位置值是十分之一(t)，百分之一(h)，千分之一(th)等。如果说，前面讨论的位数在右边是以个位数为界，而现在则是左右无界。这里一定要标明一个特殊位置作为参考点。为此，在个位和十分位间放一小数点。

这与处理十进制度量问题是一致的：7.5厘米意思是7厘米加5毫米，因为1毫米是十分之一厘米，3.75米是3米加75厘米，因为1米和

100厘米是等长的。

在小数点后面的各位数要一个个地读出(如2.31读作二点三一),否则会引起混淆。例如:三点十一与三点九究竟哪个大?小数点后面的位数叫**小数**。因此,第一位小数表示十分之一,第二位是百分之一等。数4.81有三位数,但只有两位小数。按十进制写出的所有数,除了整数之外,如0.375及17.8都叫小数。小数和普通分数不同,小数的分母是10的幂,即10,100,1000等,例如3/10,17/100000。

变换　将普通分数变换成小数。每个分母为10的幂的分数都可以很快地写成小数,只要在分子中按分母的要求标出小数的位数。

【例】 1. 3/10=0.3。

2. 23/100=(20+3)/100=2/10+3/100=0.23。

3. $70\frac{105}{1000}=70.105$。

由于10=2·5,所以10的所有指数幂都只含有质因子2和5。因此分母不包含其他质因子的所有分数都可以扩分,使其分母为10的幂,然后可以写成小数:7/20=35/100=0.35;$1^{3}/_{8}$=1375/1000=1.375。如果普通分数在简化形式中还包含有除2和5以外的质因子,就不能进行这种变换。这种普通分数不能写成上面形式的小数。如下论证是有用的。在自然数域内,除法2:7不能做。在有理数域中,却有两种可能性:

a) 2:7=2/1:7/1=2/1·1/7=2/7;

b) 2:7=0.28571428…

```
20
 60
  40
   50
    10
     7
    30
    28
     20
      60
      …
```

心算:

2被7除,　　商为0,2=20/10

20/10被7除,商为2/10,余6/10=60/100

60/100被7除,商为8/100,余4/100=40/1000等等。

将余数重新写成下一个10的幂,就相当于前进了一位小数。这个方法就象自然数的除法算式一样,在将被除数由个位转变到十分位时,商也要作相应的转变,也就是说,必须放上一个小数点。

除式 2:7 的两个结果是相等的，$2/7=0.28571428\cdots$。被 7 除时，余数只可能是 1, 2, 3, 4, 5, 6。余数不可能为零，因为上面这些数没有一个与 10 相乘之后能被 7 除尽的。这就是说这个小数是*无尽的*，它的数字序列永远不会中止。每当一个余数第二次出现时，这些数字也将重复出现。这个小数是*循环的*，在被 7 除时，一个*循环*最多只可能有 6 位数字。

如果 p/q 是一个最简分数，而且 q 中包含有 2 和 5 以外的质数，则相应的小数是循环的，其循环节最多为 $q-1$ 位数字。

循环性是这样表示的，即写出一个循环的数字，并在这些数字上加一横：

$$1/3=0.33\cdots=0.\overline{3};\qquad 34/99=0.\overline{34};$$
$$17/12=1.41\overline{6};\qquad 11/26=0.4\overline{230769}$$

[读法(以中间两数为例)：*零点三四，循环节为三四；一点四一六，循环节为六。*]

前两例是*纯循环小数*：循环在小数点之后立即开始。后两例在小数点和循环开始的数字之间还有几位数字，这类小数叫做*混合型的*，它们发生于分母中既含有 2 或 5 又含有其他因子的分数。

将十进小数变换成普通分数。根据小数的定义可以将一个有限小数变换成普通分数，例如：$0.17=1/10+7/100=(10+7)/100=17/100$; $6.05=605/100=121/20$。将小数的数字略去小数点和前面的零作为分子，将与小数位数相应的 10 的幂作为分母。所有循环小数也都可以变换成普通分数。对于纯循环小数，将一个循环的数字写为分子，将与循环长度相应的 10 的幂减去 1 作为分母，例如

$$0.\overline{3}=3/9=1/3;\quad 0.\overline{27}=27/99=3/11;\quad 0.\overline{253}=253/999。$$

【例】

1.	2.
$p/q=0.\overline{369}$	$p/q=0.3\overline{58}$
$1000p/q=369.\overline{369}$	$100p/q=35.8\overline{58}$
$999p/q=369$	$99p/q=35.5=355/10$
$p/q=369/999$	$p/q=(355/10)/99=355/990$
$p/q=41/111$	$p/q=71/198$

这种变换方法的依据是一个至此尚未证明的事实，即无限循环小数的计算可以按有限循环小数的方法进行。上面左边的例子显示了这种方法的应用，它也用到了解方程的某些知识。如果将数拆开并加以变换，应

用上述法则可以得到同样结果:

$$0.3\overline{58}=0.3+0.0\overline{58}=0.3+0.\overline{58}\cdot 0.1$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{58}{99}\cdot\frac{1}{10}=\frac{297+58}{990}=\frac{355}{990}=\frac{71}{198}。$$

任何普通分数都可以写成有限小数或循环小数。任何有限小数和循环小数都可以变换成普通分数。普通分数和有限或循环小数是同一类数——有理数的两种不同的书写方式。

要想避开这两种可能性——有限及循环小数——的差异，我们可作如下论证: 根据所示方法可以证明 $0.\overline{9}=1$。因此，任何有限小数和整数都可以相应地变换成循环小数，其方法是将最后一位非零数字减去1再加上一个循环数9:

$$0.84=0.83\overline{9};\quad 3.156=3.155\overline{9};\quad 17=16.\overline{9}。$$

小数的计算

这里我们只计算有限小数的问题，循环小数在计算之前必须作适当的四舍五入，或者必须用普通分数来计算。

加法和减法　在书写小数的加法和减法算式时，就象书写自然数或整数的算式一样: 相同位值的数字上下对齐，小数点对齐，从右向左一列一列地算，并要考虑作适当的进位变换，在从十分位进到个位时，把小数点写在结果中。小数的第一级算术运算比较简单，这是它比普通分数优越的主要方面。

【例】 1.
```
  713.25
+ 1.085
+22.9
-------
 737.235
```
2.
```
 38.023
-9.13
-0.0258
-------
 28.8672
```

【例】
```
 0.175·3.5
----------
     525
      875
----------
   0.6125
```

乘法　有限小数可以化为普通分数，分数的分母是10的一个指数幂。这种分数的乘法可按通常的方法进行，例如，

$$0.175\cdot 3.5=175/1000\cdot 35/10=(175\cdot 35)/(1000\cdot 10)=6125/10000,$$

不要约分。所得结果的分母还是10的一个幂; 分子是各个分子的积，当将此结果化为小数时，小数位数等于各个因子小数位数的和。按竖式计

算所得结果一样。

两个小数相乘就是先不考虑因子的小数点而看作是两个自然数相乘，然后再将结果点上小数点，小数位数等于各因子小数位数的和。

与 10 的幂相乘只要将小数点向右移，移动的位数就等于 10 的幂包含的零的个数：$7.136\cdot 100=713.6$。

除法 当被除数和除数乘以同一个数时，商保持不变(参看扩分)；例如，$12:4=48:16=120:40=1.2:0.4=6:2=3$。利用这一事实，我们对被除数和除数作适当调整，使之化为自然数的除法，其做法就是乘上一个 10 的幂使除数变成整数，例如，

$$33:6.5=330:65;\quad 6.729:13.58=672.9:1358。$$

现在这个除法就可以当作自然数的除法来做，当在被除数中从个位数转到十分位数时，在商里要点上小数点，以作出同样转移。

【例】 1. $47.275:3.1$　　2. $714.5:100=7.145$。

$$\begin{array}{r} 15.25 \\ 31\,\overline{)472.75} \\ \underline{162} \\ \underline{77} \\ \underline{155} \\ 0 \end{array}$$

3. $1.92:1000=0.00192$。

假如一个数 a 乘以(除以) 10 的一个幂 b，比如说 $b=10^k$，则 a 的小数点要向右(左)移，移动的位数就等于 b 所含零的个数，即 k。

计算的缩写法 一般说来，乘法和除法得出的结果要比原始数字的位数多。如果原始数字由于四舍五入或因有测量误差不是绝对准确，而是个近似值，那么这么多的小数位数是不可接受的，或更确切地说是没有意义的，因为它们给人以一种实际上不存在的计算或测量之精确度的假象(见 **II**. 第 15 章)。

在用近似值进行一级运算时，其结果的可靠小数位数不应该多于原始数字中小数位数最少的一个。在进行乘法和除法运算时，其结果具有的有效数字（不是小数位数!）只能与有效数字最少的原始数字所有的一样多。

一个数的有效数字是除去第一个不为零的数字前面的零以外的所有数字：例如 307.6 以及 0.0002643 都有四位有效数字。为了省去对可靠数字以外的数字的计算，我们采用缩写法，按照此方法所得结果仅保留需

要的或可接受的位数。

缩写加式和减式。如果所有加数的可靠小数位数都相同，这样的加法或减法就按常规方法进行。如果小数位数不同，则按如下方法进行：设 k 为各数中出现的最少的小数位数的数目，将具有较大精确度的各个值四舍五入至 $k+1$ 位小数，然后相加或相减，最后一位数只是由于进位而加以考虑，因为最后结果取 k 位小数。如果原来要求和或差精确到第 k 位小数，那么我们就尽可能选各个加数精确到 $(k+1)$ 位小数。

【例】

$$\begin{array}{r} 2.7362 \\ +\ 0.8749 \\ +17.53 \\ +\ 8.665 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 2.736 \\ 0.875 \\ 17.53 \\ 8.665 \\ \hline 29.81 \end{array}$$

【例】

$$\begin{array}{r} 27.8673\cdot 49.23 \\ \hline 1114692 \\ 2508057 \\ 557346 \\ 836019 \\ \hline 1371.907179 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 27\dot{8}.\dot{6}7\cdot 4.923 \\ \hline 111468 \\ \ \ 25080 \\ \quad\ \boxed{557} \\ \qquad 83 \\ \hline 1371.9\approx 1372 \end{array}$$

缩写乘式。这里关心的问题不是小数位数，而是有效数字位数。假如一个因子有 k 位有效数字，而另一个有更多的有效数字，则将后者四舍五入到 $k+1$ 位数字(即多取一位)。较为方便的办法是将有 $k+1$ 位数字的因子写作被乘数，特别是当 k 较大的，并通过适当变换使乘数的小数点前面只有个位数，例如 $27.8673\cdot 49.23=278.673\cdot 4.923$。我们将乘法的普通写法和缩写法写在一起，为的是更好地说明缩写法的后继各步骤。

在开始时将整个被乘数与乘数的第一位相乘，在求以后的各个部分积时一位一位地省去。为了避免错误，每次在仅供下一个更高位用的数字上加一圆点，作为记号。例如，第三个部分乘积的数字 6 被打上记号，其算法是：$2\cdot\dot{6}=12$(寄 1)，$2\cdot 8+1=17$，$2\cdot 7+1=15$，$2\cdot 2+1=5$。在将这些部分积最后相加时，只考虑到寄数的最后一位。如果最后结果仍比最大有效位数多一位，如在上例中，则必须再作一次四舍五入。假如要求将乘积计算到 k 位精确度，则要尽可能将各个因子取 $k+1$ 位有效数字来进行计算，然后再作四舍五入。

缩写除式。 商的有效数字位数也等于原来数字(被除数或除数)中最小的有效位数,所以一开始就可以四舍五入,多保留一位数字。假如要求商精确到 k 位,被除数和除数就要尽量选到 $k+1$ 位,商的第 k 位必须由四舍五入求得。为了说明这个方法,我们也将缩写除式和普通除式写在一起。下例是 674.283 除以 439.17,要求商计算到三位数。

在缩写式中,每次不是在余数上加零,而是将除数缩短一位。但是在计算下一个积时,这一位还要考虑在内: $2351:439=5$; $5\cdot\dot{2}=10$(寄 1); $5\cdot9+1=46$; $5\cdot3+4=19$; $5\cdot4+1=21$。下一步是: $155:44=4$,因为 $44\cdot4=176$ 比 $44\cdot3=132$ 更接近 155。

【例】

```
             1.535                   1.54
    43917 ) 67428.3         4392 )  6743
            43917                   4392
            235113                  2351
            219585                  2196
             155280                  155
             131751                  176
              235290                 -21
```

历史简述 普通分数的理论和计算发展到今天这个样子是印度人(婆罗摩笈多 Brahmagupta)的功劳。阿拉伯和意大利商人将分数从印度带到我们这里。但在亚默斯(Ahmes)(兰德草卷,约公元前1700年)的算术书中分数的计算已经有了非常好的发展。在此书中,除了 2/3 之外,只采用单位分数,所有其他分数都被变换成单位分数,例如 $5/6=1/2+1/3$。这种变换主要是依靠几个编好的表,而很少是依据一些确定的定理来求得的;因此分数计算比较烦琐。巴比伦人采用六十进位小数,这是由时间和角度的分度法导出的。从某种意义来说,这种小数是十进小数前身,因为它是建立在以 60 为基数的进位制上,但未得到充分发展。由于不要写出分母,计算变得比较简单。希腊人没有研究过分数制。罗马人的思想比较贫乏,严格地说,他们只知道以 12 为分母的分数,这是由以 12 盎司作为重量的一个单位得来的;其他分数都用以 12 为分母的分数来近似表示。在德国直到中世纪以前,普通分数都未被普遍使用。大约到 1700 年,分数计算才被列入学校教学大纲。即使在这个时候,最初也只不过给出了一些最基本的东西,好象缺乏基础的规则,而以记忆的形

式引入的。小数出现得较晚。小数理论的创立者是商人兼工程师西蒙·史德温(Simon Stevin, 1548～1620年)。他的书标志着小数发展到十进位制的重要突破。在他的书中,除了其他东西之外,还提出了各国采用十进货币制和度量衡制的主张。然而,史德温还有他的先驱者,其中有约翰尼斯·雷乔蒙达留斯 (Johannes Regiomontanus, 1436～1476年)、韦达(Vieta, 1540～1603年)和克里斯托夫·鲁道尔夫 (Christoff Rudolff, 约生于1500年)。

1.4 比例性和比例

正比　悬挂的物体越重,螺旋弹簧拉伸得越长(见图1.4-1), 在某一弹簧上挂 x 个单位重的物体引起弹簧伸长 y 个单位:

x	50	100	125	175	240	300
y	10	20	25	35	48	60

将物体的每个重量数 x 乘上0.2, 就得到每个相应的伸长数 y; 即 $y=0.2x$, 或 $y/x=0.2$。

一般说来,如果两个量 x 和 y 满足如下条件,我们就说它们成正比: 1. 一个量 x 的每个值都严格与第二个量 y 的一个值相对应, 而且, 2. 将 x 的每个值乘上同一个实数 c 就得到 y 的所有相应值。

正　比	$y=c\cdot x$　或　$y/x=c$

如果将这个关系表示在一个直角坐标系中, 则点 (x, y) 在一条通过原点的直线上。数 c 称为**比例因子**, 它是与实际情况有关的特征量。在上例中弹簧常数 $c=0.2$ 就是所用弹簧的特征常数。

反比　在(皮带轮)传动中(见图1.4-2), 如果一个轮子的直径为20英寸, 它转动一圈, 另一个轮子直径 (x 英寸) 越小, 转动的圈数 y 就越多:

x	4	5	10	15	20	30
y	5	4	2	4/3	1	2/3

x 和 y 的对应值之间恒有关系式 $y\cdot x=20$, 即 $y=20/x$。在靠摩擦传动或齿轮传动的两个轮子之间的力也满足同样的关系。

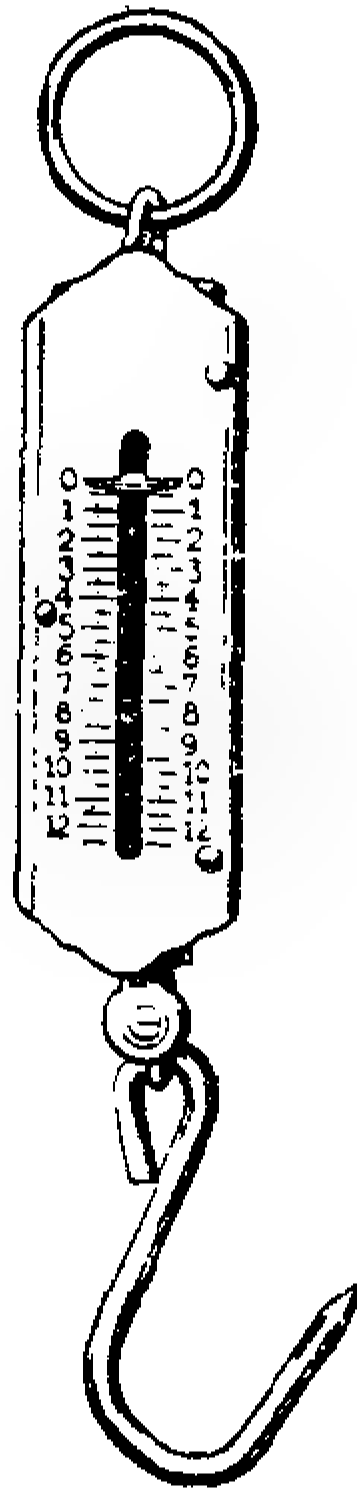


图1.4-1 弹簧秤

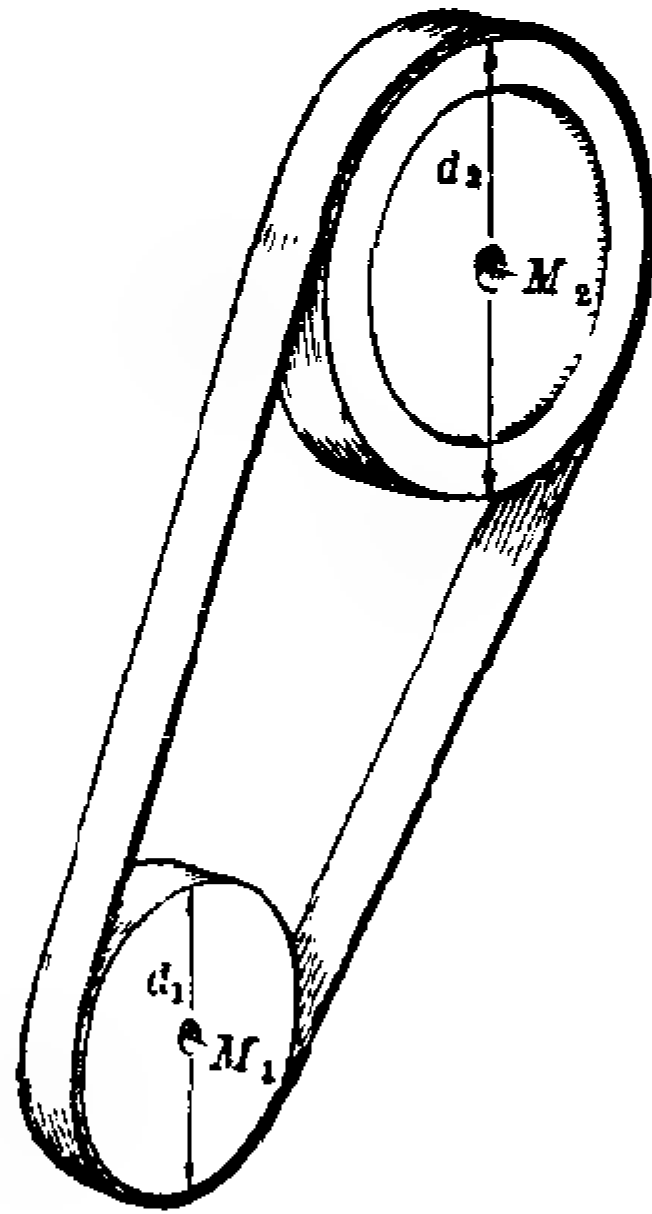


图1.4-2 传动

一般说来，两个量 x 和 y 如果满足如下条件，我们就说它们成反比：1. 对于一个量的每个值，第二个量都严格地有一个值与之相对应；2. 用 x 去除同一实数 c，就能由 x 的每个值求得 y 的相应值。

反 比	$y=c/x$ 或 $y\cdot x=c$

如果将这个关系表示在一直角坐标系中，点是落在一条等轴双曲线上。这里的常数 c 由于考虑到 $y=c/x=c\cdot\frac{1}{x}$，所以也叫**比例因子**。

比 火车一小时行 80 英里，飞机行 400 英里，也就是每小时飞机比火车多行 320 英里。比较一下就知道飞机走过的路程是火车的 5 倍。这种倍数关系与时间间隔无关。这里得到的数 5 是 400:80=5:1=5 的商，我们说，**在相等的时间内飞机与火车走过的路程之比是 5:1**。

同种类型的两个量的比就是它们的度量之商。

用数代替量，比仍然可作相应的定义；在此两种情况下比都是个(无量纲的)数。

对于不同类型的量也可以组成比，如果一个人步行 4 小时，走 11 英里，就得到一个比：11 英里：4 小时=11/4 英里/小时(读作**每小时四分之**

十一英里)。在此例中,这样构成的比引出一个新的速度概念，其度量单位是英里/小时,或英里小时$^{-1}$。

在正比例中,对应值都有相同的比，在反比例中，对应值具有相同的乘积。

由于当被除数和除数乘以或除以同一数 $c\neq 0$ 时,商不变，因此可以用不同的方法得出完全相同的比，例如: $5:1=10:2=30/6=1:0.2=650:130$。我们也常说扩张或约简一个比。一般取最小自然数的表达式:如 $5:1$。

等比或比例　两个比相等叫做成比例，例如，$2:3=1:1.5$ 或 $4/5=8/10$，读作 **4 对 5 的比值等于 8 对 10 的比值**，或简单地说 **4 比 5 等于 8 比 10**。事实上,如果等式两边的比相同,但表达形式不同,这个比例是真的,或有效的; $4:5=5:4$ 就是不成立的比例。

假如一个真比例具有相同的内项，这个量或数叫做两个外项的**比例中项**;例如,由于 $12:6=6:3$，所以数 6 是 12 和 3 的比例中项。按照乘积方程(见比例定理)，两个正数 a 和 b 的几何平均值 $m_g=\sqrt{(a\cdot b)}$ 就是它们的比例中项。

$a:c=c:b$	c 是 a 和 b 的比例中项

连续比相等	$a:b:c=d:e:f$ $a:d=b:e=c:f$

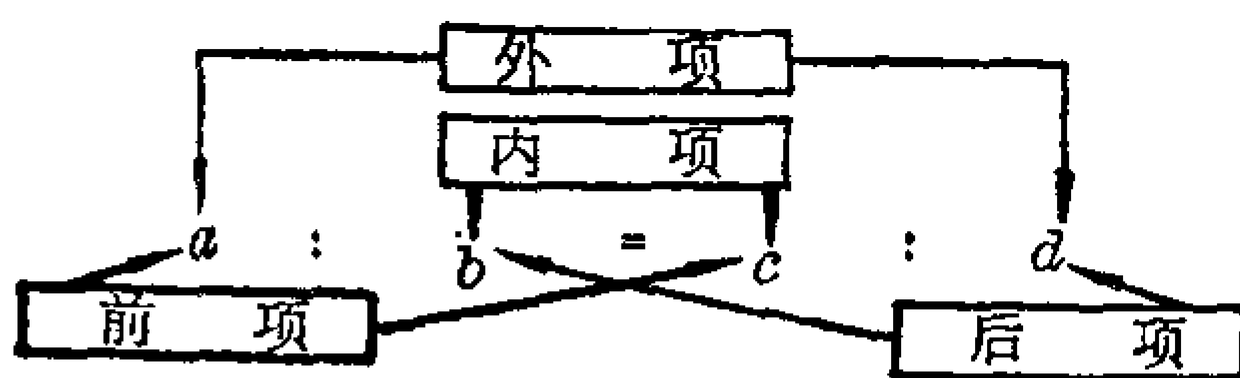


图1.4-3　比例式中的各项

如果一个比例式的后项等于另一个比例式前项，常常可以写成**连续比例式**，例如，$2:5=4:10$ 和 $5:8=10:16$，可写成 $2:5:8=4:10:16$。但是,这仅是一种符号表示法，如果把这两边看成是商式，那就会得出错误的结果 $1/20=1/40$。一般说来，$a:b:c=d:e:f$ 是 $a:b=d:e$，$b:c=e:f$ 和 $a:c=d:f$ 三个比例式的缩写，此三式中的每一式都可由另外两式推出。只要将前两式的内项互换一下,譬如说,得 $a:d=b:e$ 和 $b:e=c:f$，结果就有 $a:d=c:f$，即 $a:c=d:f$，这就是第三式。

如果用 b/d 或 c/e 去乘前两个比例式,就得出等式链 $a/d=b/e=c/f$，

反过来，由此也可以得出各个比例式。例如，平面几何的正弦定理可以写成如下形式：$a/\sin\alpha=b/\sin\beta=c/\sin\gamma$ 或 $a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$。

比例定理 每个比例式都可以象等式一样进行变换，例如可以将两边互换。但是将一个真比例式 $a:b=c:d$ 变换成另一个形式也有一些特殊法则。

如果用 bd 去乘 $a/b=c/d$ 式的两边，就得到乘积等式 $a\cdot d=b\cdot c$。

乘积等式。在每一个真比例式中，内项之积等于外项之积。

反之，由等式 $a\cdot d=b\cdot c(\neq 0)$ 也可以得出比例式。用 $b\cdot d$ 去除就得 $a:b=c:d$，用 $a\cdot b$ 去除得 $d:b=c:a$ 等。由此得到更比定理。

更比定理。在任一真比例式中，将两个外项互换，两个内项互换，或将内项和外项互换都能得到另一个真比例式。

假如在 $a:b=c:d$ 或 $b:a=d:c$ 的两边加上或减去1，那么在加1时得 $(a+b):b=(c+d):d$ 和 $(a+b):a=(c+d):c$，在减1时得

$$(a-b):b=(c-d):d。$$

设 $a\neq b$，$c\neq d$，将相应的两比例式两边相除，则得 $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$。这些公式仅是关于比例式中对应项加减的一般定理的几个最重要的特例。

对应项加法和减法	由 $a/b=c/d$，可得 $(pa+qb)/(ra+sb)=(pc+qd)/(rc+sd)$ p, q, r, s 为任意数，$ra+sb\neq 0$

令 $a:b=c:d=k$，则有 $a=bk$ 和 $c=dk$，将 a 和 c 的这个值代入上式，并消去 b 及 d，就可看出这一论断的正确性。

比例性和比例 如果两个量 x 和 y 成正比，则有 $y_1/x_1=y_2/x_2=\cdots=y_n/x_n=c$，$n$ 为与 x_i，y_i 值有关系的任意数。将内项反复互换得

$$y_1:y_2:y_3:\cdots:y_n=x_1:x_2:x_3:\cdots:x_n。$$

这表示在成正比时，y_i 和 x_i 的有关值都具有相同的比，而且任意两个值 x_i 和 x_j 之比与有关值 y_i 和 y_j 的比都相同。

当 x 和 y 成反比时，它们的有关值 x_i 和 y_i 一定满足 $x_1\cdot y_1=x_2\cdot y_2=\cdots=x_n\cdot y_n=c$。从所有这些乘积等式可以导出如 $y_1:y_2=x_2:x_1$ 的比例式，再从这些式子最后导出 $y_1:y_2:y_3:\cdots:y_n=x_n:\cdots:x_3:x_2:x_1$。这表示在成反比例时，任意两个值 x_i 和 x_j 都与相应的值 y_i 和 y_j 成反比。

比例式的解　比例式 $50:140=10:x$ 和 $x:2=50:80$ 各有一个变项。解这些式子就是要找出一些数，当用它们代入 x 时，等式两边的比相等。人们亦称这种问题叫*求第四个比例项*。对于第一个例子，立即可以看出 $x=28$，在第二个例子中 $x=5/4$。正确与否可用乘积等式来验证。对于较难的问题可用乘积等式求解。

【例1】　$(8x-7):(4x-1)=(6x-5):3x$

根据乘积等式有

$$\begin{aligned}3x(8x-7)&=(4x-1)(6x-5)\\24x^2-21x&=24x^2-26x+5\\5x&=5\\x&=1\end{aligned}$$

验算:

左边　$(8\cdot1-7):(4\cdot1-1)=1:3$

右边　$(6\cdot1-5):3\cdot1=1:3$

比较　$1:3=1:3$

【例2】　两个物体体积相等，第一物体的密度 $\rho_1=7.3$ 英两/立方英寸，第二个物体的密度 $\rho_2=2.7$ 英两/立方英寸，如果第一个物体的质量是4.8磅，第二个物体的质量为多大?

$4.8:x=7.3:2.7$，$x=1.775$。第二个物体的质量是1.775磅。

【例3】　一根金属线长 $l_1=400$ 米，直径 $d_1=4$ 毫米，质量 $m_1=36.7$ 千克，另一根同材料的金属线直径 $d_2=6$ 毫米，质量 $m_2=90$ 千克，求此线的长度。由于两金属线是由同种材料构成，所以它们的质量与体积成比例。因此有

$$m_1:m_2=(d_1^2/4)\pi l_1:(d_2^2/4)\pi l_2,\quad m_1:m_2=d_1^2/l_1:d_2^2/l_2。$$

根据乘积等式，其解为

$$l_2=\frac{m_2d_1^2l_1}{m_1d_2^2},$$

式中相应的量 (l_1 和 l_2；d_1 和 d_2；m_1 和 m_2) 必须用同一单位计算。在此例中，算得线长为436米。

【例4】　一燃料供应站如果每天卖出1000加仑汽油，还够卖24天，如果每天卖出1200加仑，问能卖几天?

$$24:x=1200:1000,\quad x=\frac{24\cdot1000}{1200},\quad x=20。$$

答：还够卖20天。

历史简述　比例理论在古代数学中居于中心地位，因为很多形形色色的问题都可以归结为比例问题。

在希腊数学中第四比例项是根据几何代数的方法作图求得的。直到15～17世纪以前，比例的计算处理和比例运算法则在欧洲还未发展起来，特别是尚未用于商业运算。这类问题是广为应用的算术教科书的主要内容之一，是算术家们的主要教学课题。在当时的算术家中最为出名的要算是亚当·瑞斯(Adam Ries, 1492～1559年)了。

比例学在欧洲文艺复兴时期供观赏的艺术中也起着重要作用。建筑物和表现人类(绘画和雕刻方面)的艺术作品必须按照特定的“准则”造型，也就是说，各个部分在整体中必须占一定的比例，这样看上去才漂亮。例如，头与身长之比为1:8; 头:面部=5:4; 躯干:大腿=大腿:小腿; 一个建筑物的高:宽=3:7等。黄金分割(见I. 第7章)也起着重要作用。甚至今天“比例适当”一词还用于表示审美方面的满足之观点。在文艺复兴时期，首先是里昂纳多·达·芬奇(Leonardo da Vinci, 1452～1519年)和阿尔布雷希特·丢勒(Albrecht Dürer, 1471～1528年)都曾致力于观赏艺术领域。

1.5　数值变量的运算

众所周知，有理数的分配律可以简单表示成 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，式中 a, b 和 c 表示任意有理数，它们是有理数的**变量**。一般说来，变量通常用字母表示，它代表一个空位，在空位中可以写进任一确定事物集合中的任一元素(或符号)。前面的字母 a, b 和 c 是数值变量(有时叫一般数字符号)，有理数集是它们特定的**变化域**。

用变量有两方面的好处：应用变量便于说明定律；用变量表示问题的解，其结果适用于任意多的特例，不需进行新的运算，只需作替代。

一个**表达式**就是数值符号、数值变量的组合，是这些符号与运算符号和括号的有意义的并列，例如，$1/4$; $12-5$; $3\cdot a$; $5\cdot(17+60)$; $(2z-13):(5z+10)$。但是 $5:0$ 或 $7+\cdot a($ 之类的组合不算作表达式; $7+8=15$ 或 $a-3<3a$ 也不是表达式而是**命题**。在表达式 $(2z-13)/(5z+10)$ 中，有理数集可以是 z 的变化域。但它不同于表达式的定义域，因为当 $z=-2$ 时，此表达式无定义(见I. 第4章)。

在**列入**表达式中的一个变量时，用变化域中的一个特定元素(或其符

号)列入式中出现的所有这一变量。不同的变量可以用不同的元素或用同一元素来列入；例如：当 $a=b=-3/7$ 时，表达式 $2a+5b$ 得出的值是 -3。

两个等价表达式包含有相同的变量，每当用相同的元素来代入这些变量时，这两个表达式取相同的值；例如 $3a+7a$ 和 $10a$ 是等价的；$a\cdot(b+c)$ 和 $a\cdot b+a\cdot c$ 也是等价的。

简单变换　将变量象整数一样直接进行计算，例如求 $2a+3b$ 的和是不可能的。变量表达式只能变换成等价表达式，例如，可将 $3a+7a$ 变成 $10a$；在适当的变化域中，适用于数值计算的同样规律在这里也适用。

交换律	$a+b=b+a$;　$a\cdot b=b\cdot a$
结合律	$a+(b+c)=(a+b)+c$;　$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
分配律	$a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

虽然对于表达式只能进行这些变换，但是也采用了和或积这类名词。

在做**加法**和**减法**时，只有同种变量的同类项可按分配律结合。例如，$5a-2a=(5-2)a=3a$；或者是加法交换律和结合律的另一应用：

$$5a+7c-3b+6c-2a-7b-5c=3a-10b+8c。$$

同样，在做**乘法**和**除法**时，不同变量的表达式，例如 $m\cdot n$ 或 $s:l$；是不能进行计算或结合的；对于相同的因子也采用指数表示法。在乘积中，习惯上省去变量之间及数字符号与变量之间的乘号，例如，用 ab 代替 $a\cdot b$ 及 $6(p+q)$ 代替 $6\cdot(p+q)$。

【例】 1．$4m\cdot3n\cdot15k=180kmn$。

2．$(-320pq):(-80q)=4p$。

3．$125c^2\cdot(-3/7d)\cdot14/75cd=-10c^3d^2$。

4．$93s^2t^4:31st^2=3st^2$。

代数和。**相反数**的概念也可用于变量和表达式。同样，减法都可以表示成加法。变量的代数和通常叫作多项式(polynomials，希腊语 *poly* 就是多的意思)，但是采用这个名字还有别的含义。**单项式** (monomial，希腊语 *mono*，单个的意思)是只有一项的表达式，**二项式** (binomial，拉丁语 *bi*，双的意思)包含两项，**三项式** (trinomial，拉丁语 *tri*，三重的意思)包含三项。

字母次序。由于交换律的适用性，所以加数和因子的次序可以是任

意的，但是为了清楚起见，习惯上将变量尽可能按字母表或字典的次序排列，在前面的各例中都已这样做了。$28b^3af^2d$ 最好写为 $28ab^3df^2$，$36vw+2.5uv-3.2uw$ 最好写为 $2.5uv-3.2uw+36vw$。如果同一变量以不同的指数形式多次出现时，通常按指数下降，或有时按指数上升排列；例如，$2s^2-3s^4+s^5-8s$ 最好写成 $s^5-3s^4+2s^2-8s$。

代数和的运算

加法和减法 在代数和的加法和减法中可能出现括号，例如，

$$(7a-3b)+(5c-3b-6a)-(7b-8a+2c)。$$

在去掉括号之前，不能并项和简化。

去括号。我们写出一个心算加减问题的数值例子来说明这个方法：

$$\begin{aligned}&227+36-213-198+29\\&=227+(30+6)-(200+13)-(200-2)+(30-1)\\&=227+30+6-200-13-200+2+30-1。\end{aligned}$$

如果括号前面是正号，括号可以省去。如果括号前面是负号，在省去括号时，括号中的所有正负数符号和运算符号都要变号。

例如，计算 $6a-(4a-b)$，需要从 $6a$ 中减去的数比 $4a$ 小 b。因此，如果减去 $4a$，就多减了 b，因此必需加上 b，这就得到 $6a-(4a-b)=6a-4a+b=2a+b$。对于其他情况可作类似论证。

【例】 $$\begin{aligned}&8p-(15r-7q+6p)+(8q-p+7r)\\&=8p-15r+7q-6p+8q-p+7r\\&=p+15q-8r。\end{aligned}$$

重括号。如果在一表达式中代数和被多次并项，要适当区分各种不同形式的括号。在这类情况下常常是先去掉内括号：

$$\begin{aligned}&17m+[6n-(3m+4n)]-\{(8m-n)-[5m+(3n-6m)]\}\\&=17m+[6n-3m-4n]-\{8m-n-[5m+3n-6m]\}\\&=17m+[-3m+2n]-\{8m-n-[-m+3n]\}\\&=17m-3m+2n-\{8m-n+m-3n\}\\&=14m+2n-\{9m-4n\}\\&=14m+2n-9m+4n\\&=5m+6n。\end{aligned}$$

如果先去外括号，得到同样结果：

$$17m+[6n-(3m+4n)]-(8m-n)+[5m+(3n-6m)]$$
$$=17m+6n-(3m+4n)-(8m-n)-5m+(3n-6m)$$
$$=22m+6n-3m-4n-8m+n+3n-6m$$
$$=5m+6n。$$

乘法　代数和可以与一个数、一个单项式、也可与一个代数和相乘。

和一个单项式相乘。这里用到分配律。对于运算符号，我们只需记住每个减法都可改成相反数的加法，反之亦然。

因为 $a(b+c)=ab+ac$，所以有

$$a(b-c)=a[b+(-c)]=ab+a(-c)=ab+(-ac),$$

因此
$$a(b-c)=ab-ac。$$

在整数计算中已知的符号法则必须遵从。

【例】　$6x+7(3x-2y)-5x(3-6y)-3y(10x+9)$
$$=6x+(21x-14y)-(15x-30xy)-(30xy+27y)$$
$$=6x+21x-14y-15x+30xy-30xy-27y$$
$$=12x-41y。$$

如果对符号和运算法则掌握得相当熟练，就可以由第一步直接做第三步。

几个代数和相乘。几个代数和相乘的算法可由反复运用分配律求得，同时要考虑符号法则(见图1.5-1)。

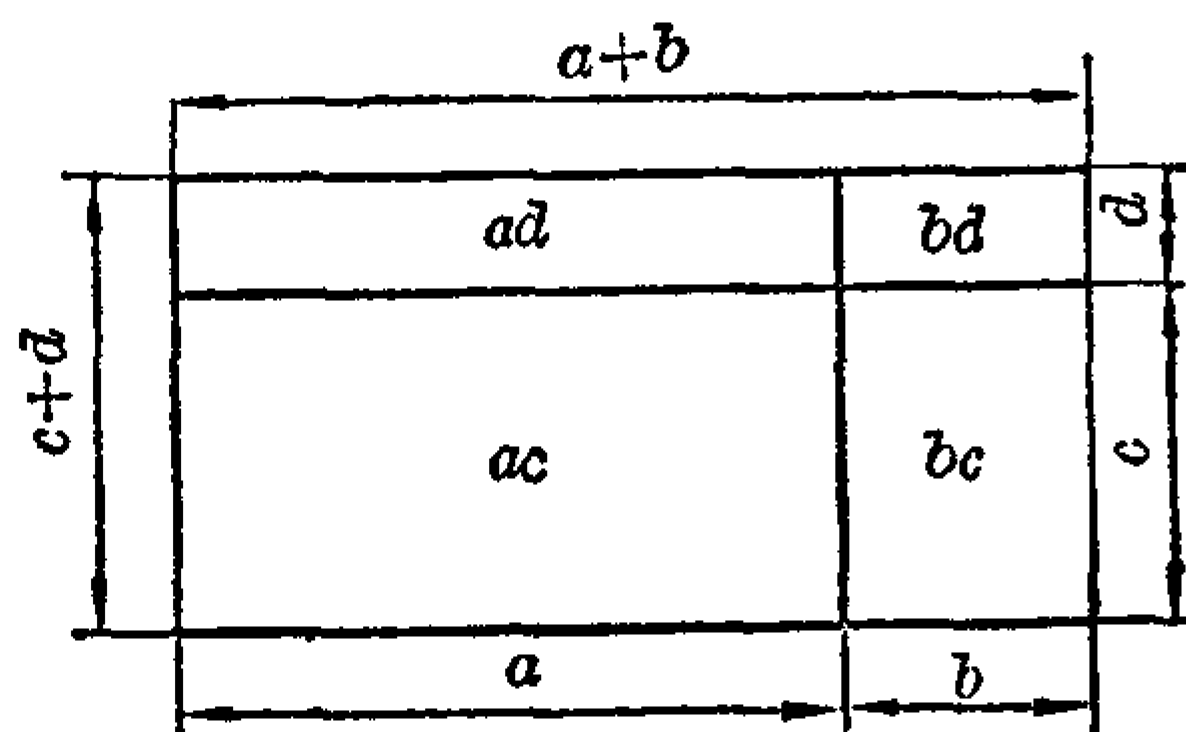


图1.5-1　两个二项式相乘的示意图，如果 a, b, c, d 都为正数，则 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=ac+ad+bc+bd$$

两个代数和相乘，是将一个代数和的各项和另一个代数和的各项相乘，然后将各个乘积相加。

在以下各例中出现了多项式的和；如果有两个以上因式，需分步进行。

【例】 1.　$(7u-3v)(4u+5v)$

$=28u^2+35uv-12uv-15v^2$

$=28u^2+23uv-15v^2$。

2.　$(2s-3t)(5r-7s+2t)$

$=10rs-14s^2+4st-15rt+21st-6t^2$

$=10rs-15rt-14s^2+25st-6t^2$。

3.　$(u+7v)(3u+v)(9u-6v)(2u-v)$

$=(3u^2+22uv+7v^2)(18u^2-21uv+6v^2)$

$=54u^4+333u^3v-318u^2v^2-15uv^3+42v^4$。

因式分解。分配律 $a(b+c)=ab+ac$，不仅可以从左到右，也可以从和到积反向使用。这个过程叫作因式分解。如果几个加数带有相同的因子，因式分解总是可能的。这个相同因子通过中间步骤可以取出。要将一个式子化为两个代数和的乘积形式通常要分几步进行。

【例】 1.　$44p-77q+99r=11\cdot4p-11\cdot7q+11\cdot9r$

$=11(4p-7q+9r)$。

2.　$54a^3b^2c^3+18a^2b^3c^2-36a^2b^2c^2$

$=18a^2b^2c^2(3ac+b-2)$。

3.　$18am-24bm-15an-20bn$

$=6m(3a-4b)+5n(3a-4b)=(3a-4b)(6m+5n)$。

二项展开式。二项展开式是表示代数和相乘的一个非常重要的特例。例如：

$$(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2。$$

二项展开式	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

严格地说，$(a-b)^2$ 的公式是多余的，因为只需在应用

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

时注意符号法则就行了。在这个式子中用 $-b$ 代替 b 也就得出 $(a-b)^2$ 的结果(见图 1.5-2)。

的指数逐项递增，在 $(a+b)^n$ 的各项中两个指数的和都是 n。每一项前面的因子都叫二项式系数 $\binom{n}{k}$（读作 n 取 k）。它表示

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}。$$

如果令 $\binom{n}{0}=1=\binom{n}{n}$，则二项式定理还可用求和符号 Σ 简化（见I.第5章）。

二项式定理	$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ $=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$ $+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$

如 $(a+b)^6$ 的第5项，也就是第4个混合项，相应于 $n=6$, $k=4$ 的值是：

$$\binom{6}{4}a^{6-4}b^4=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^2b^4=15a^2b^4。$$

帕斯卡（Pascal）三角形。 这个三角形（见图1.5-3）使那些不熟悉 $\binom{n}{k}$ 式的人也能求出二项式系数。这个三角是这样求得的：从 $(a+b)^0=1$ 和 $(a+b)^1=a+b$ 开始，并利用 $(a+b)^{n+1}=(a+b)^n(a+b)$，将各个系数一个接一个写成三角形。每一行的数都由上一行相邻的两个数相加求得，例如 $\binom{6}{4}=\binom{5}{3}+\binom{5}{4}=10+5=15$。一般说来，二项式系数之间的关系为 $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$，因为

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}$$

$$=\frac{n![(k+1)+(n-k)]}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}。$$

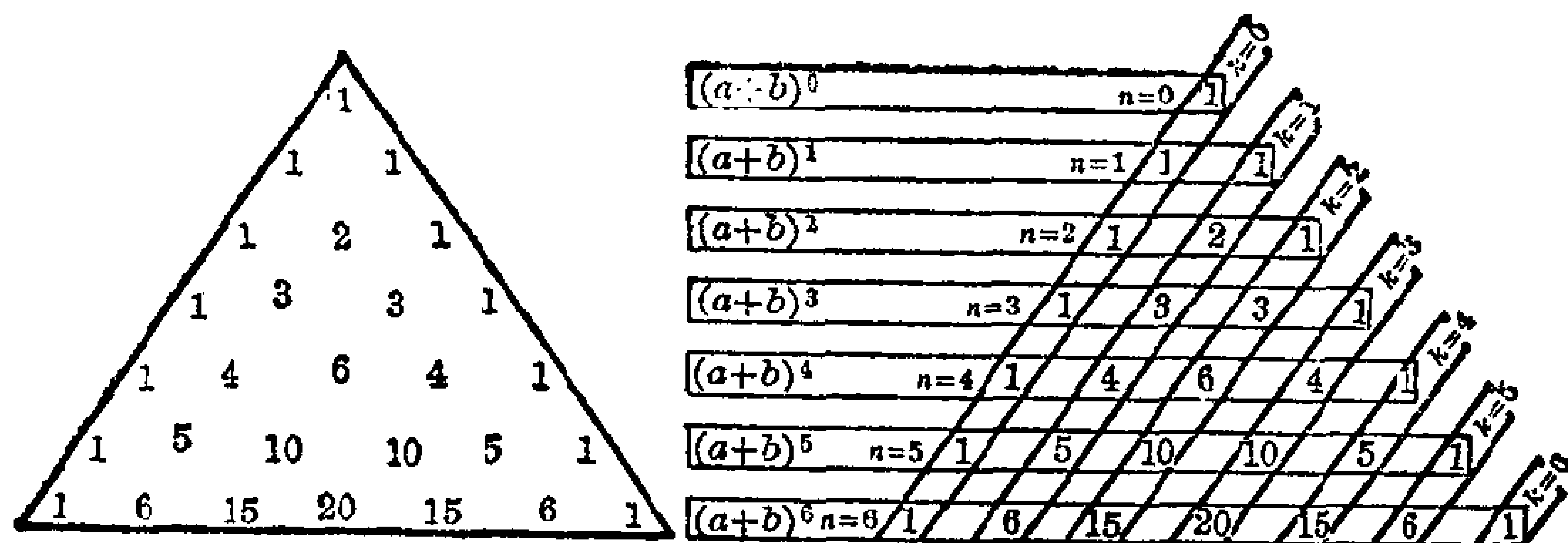


图 1.5-3　帕斯卡三角形

除法　除法，也有除数是一个数、一个单项式即只有一项的表示式和一个代数和的情况。

除数为一个单项式的除法。 令 $d=\dfrac{1}{c}$ 代入分配律 $(a+b)\cdot d=ad+bd$

$$\boxed{(a+b):c=a:c+b:c}$$

并考虑到分数线也可看成是除号，就可以得到代数和除以一个数的法则。用数去除代数和的各项，这里同样要考虑符号法则。

【例】　$(28m^2n-63m^2n^2+84mn^2):7mn=4m-9mn+12n$。

除数为一代数和的除法。 通常在解被一个代数和除的问题时，只要有因式分解和二项展开式的知识就够了。将被除数分解成适当的因子，若有必要先进行整理。

【例】　$(0.54fg-0.3eh-0.45fh+0.36eg):(0.2e+0.3f)$

$=(0.36eg-0.3eh+0.54fg-0.45fh):(0.2e+0.3f)$

$=[0.2e(1.8g-1.5h)+0.3f(1.8g-1.5h)]:(0.2e+0.3f)$

$=[(1.8g-1.5h)(0.2e+0.3f)]:(0.2e+0.3f)$

$=1.8g-1.5h$。

如果被除数不能分解因子，特别是如果要做的除法有余数，就必须采用分步相除的方法。

分步除法。 这个方法只不过是普通除式的推广，它与下例

$$286:22=13$$

所示的方法在原则上完全类似，甚至不必将每一步都写下来。

【例】 $286:22=(200+80+6)\div(20+2)=10+3$

$$\begin{array}{r} -(200+20)\qquad\quad \\ \hline 0\quad 60+6 \\ -(60+6) \\ \hline 0 \end{array}$$

【例】 $(13a^2x+3x^3-ax^2+10a^3):(2a+3x)=$

$$\begin{array}{r} 5a^2-ax+x^2\qquad\qquad \\ (2a+3x)\,\overline{\big)(10a^3+13a^2x-ax^2+3x^3)} \\ -(10a^3+15a^2x)\qquad\qquad\quad \\ \hline 0\qquad -2a^2x-ax^2+3x^3 \\ -(-2a^2x-3ax^2)\qquad \\ \hline 0\quad 2ax^2+3x^3 \\ -(2ax^2+3x^3) \\ \hline 0\qquad \end{array}$$

在做以代数和为除数的除法时，处理方法类似，要考虑到将被除数和除数按同样的方式排列。就象零可以不写一样，在做了每一步之后不需要写出被除的所有剩余项，以节省书写工作。但是必须注意不要遗漏任何一项。顺便说一句，不仅$(a^3-b^3):(a-b)$没有余数，(a^n-b^n)对于任何自然数n都能被$(a-b)$除尽而无余数，但是$(a^n-b^n):(a+b)$ 只有当n是偶数时才无余数。

【例】

$$\begin{array}{r} a^2+ab+b^2\qquad \\ (a-b)\,\overline{\big)\;(a^3-b^3)\qquad} \\ -(a^3-a^2b)\qquad \\ \hline a^2b\qquad\quad \\ -(a^2b-ab^2)\quad \\ \hline ab^2-b^3 \\ -(ab^2-b^3) \\ \hline 0\qquad \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(a^n-b^n):(a-b) \\ &=\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}}_{n\text{ 项}} \end{aligned}}$$

有余数的除法。即使除法有余数，方法也不变；其书写过程与

$$47:5=9+2/5$$

类似。

【例】

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-4x-2 \\
x^2+3x+9 & x^4-x^3-5x^2-40x+7 \\
 & -(x^4+3x^3+9x^2) \\
\hline
 & -4x^3-14x^2-40x \\
 & -(-4x^3-12x^2-36x) \\
\hline
 & -2x^2-4x+7 \\
 & -(-2x^2-6x-18) \\
\hline
 & 2x+25
\end{array}
$$

商 x^2-4x-2，余数 $2x+25$。

含变量的分数

扩分和约分 扩分和约分仅是对写成分数形式的有理数的变换。这些变换也可以用于带变量的分数。

扩分。分子和分母乘以同一因子：$a/b=(a\cdot k)/(b\cdot k)$；同样有：

$$5m/9n=(3\cdot 5m)/(3\cdot 9n)=15m/27n$$

和 $$7/(3a+3b)=(7a-7b)/(3a^2-3b^2) \quad (\text{用 } a-b \text{ 扩分})。$$

约分。分式的分子和分母除以同一个表达式，例如，$6cd/22de=3c/11e$。在此熟练掌握因式分解和二项展开式的应用特别重要，因为在代数和中是不能进行约分的：

$$\frac{15u^2-24uv}{12u^2}=\frac{3u(5u-8v)}{12u^2}=\frac{5u-8v}{4u}。$$

当然，对分子和分母的因子分解及公因子约分用心算是可以的；例如，

$$(p^4-1)/(3p^2+3)=(p^2-1)/3。$$

加法和减法 在变量计算中，同分母分式的加法和减法是不成问题的；$a/c+b/c=(a+b)/c$。

【例】 $$\frac{7i+5k}{3k^2}-\frac{5i-4k}{3k^2}=\frac{7i+5k-(5i-4k)}{3k^2}$$

$$=\frac{7i+5k-5i+4k}{3k^2}=\frac{2i+9k}{3k^2}(\text{注意括号!})$$

在这里如果你足够熟练，中间过程也可以省去。因为第二个分式是被减去的，所以要特别注意正负号和运算符号。

异分母的分式。首先要将这些分式扩分成同分母的分式。通常选最小公分母，也就是包含各个分母所有因子的最小分母。常常可以心算出来，不需要书写：

【例】 1. $\frac{2y}{3z}+\frac{5x}{6z}-\frac{y+2x}{4z}=\frac{4\cdot 2y+2\cdot 5x-3(y+2x)}{12z}$

$$=\frac{8y+10x-3y-6x}{12z}=\frac{4x+5y}{12z}。$$

2. $4+\frac{3a}{a-b}-\frac{2b}{b-a}=4+\frac{3a}{a-b}+\frac{2b}{a-b}$

$$=\frac{4(a-b)+3a+2b}{a-b}=\frac{7a-2b}{a-b}。$$

如果分母较复杂，最好将最小公分母笔算出来。

求最小公分母(lcd)。在问题

$$\frac{3}{12u-18v}-\frac{2u-v}{36u^2-81v^2}+\frac{6u-5v}{8u^2+24uv+18v^2}$$

中，与在普通的分数计算中一样，先将每个分母分解成不能再分的因子，再求出最小公分母:

	扩张因子
$12u-18v=2\cdot 3\cdot(2u-3v)$	$3\cdot(2u+3v)^2$
$36u^2-81v^2=3^2\cdot(2u-3v)(2u+3v)$	$2\cdot(2u+3v)$
$8u^2+24uv+18v^2=2\cdot\quad(2u+3v)^2$	$3^2\cdot(2u-3v)$
lcd $\quad 2\cdot 3^2(2u-3v)(2u+3v)^2$	

例如，在上例中

$$\frac{3^2(2u+3v)^2-2(2u+3v)(2u-v)+3^2(2u-3v)(6u-5v)}{18(2u-3v)(2u+3v)^2}。$$

然后将分子中的同类项合并，如果可能，再约简使分数进一步简化。

乘法和除法 由于分式的第二级运算不需要求最小公分母，所以这类运算比第一级容易一些。在做乘法和除法运算之前都要注意是否可以约分。

乘法。对于分式乘法，有 $a/b\cdot c/d=(a\cdot c)/(b\cdot d)$。

【例】 1. $\frac{32r^2}{35q}\cdot\frac{25p}{24r}=\frac{32r^2\cdot 25p}{35q\cdot 24r}=\frac{4r\cdot 5p}{7q\cdot 3}=\frac{20pr}{21q}$。

2. $\frac{7p}{15m-25n}\cdot(6m-10n)=\frac{14p}{5}$ 约去了$(3m-5n)$。

除法。除法总可以当作乘以除数的倒数来做，

$$a/b:c/d=(a\cdot d)/(b\cdot c)。$$

【例】 1. $\frac{14m}{9k^2}:\frac{7mn}{6k}=\frac{14m\cdot 6k}{9k^2\cdot 7mn}=\frac{4}{3kn}$。

2. $\frac{18s-18t}{u}:(12s^2-12t^2)=\frac{3}{2u(s+t)}$。

3. $95e^4f^3g^2:\frac{38e^2f^3g^4}{3h}=\frac{95e^4f^3g^2\cdot 3h}{38e^2f^3g^4}=\frac{15e^2h}{2g^2}$。

繁分式。如果分式的分子或分母还包含有分式，这就是繁分式：

$$\frac{\frac{a}{7}}{3b};\quad \frac{x}{\frac{y}{x}+9};\quad \frac{\frac{1}{m^2}+\frac{2}{mn}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{m}+\frac{3}{n}}。$$

象在繁分数中一样，将主分数线当作除号，以此来进行变换。

【例】
$$\frac{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{m}+\frac{3}{n}}=\frac{\frac{n^2+2mn+m^2}{m^2n^2}}{\frac{3n+3m}{mn}}$$
$$=\frac{(m^2+2mn+n^2)\cdot mn}{m^2n^2(3m+3n)}=\frac{m+n}{3mn}。$$

自然数分解成质数因子的唯一性　如何应用变量来论证数学原理对于某一定义域内的一切数的有效性，作为说明这个问题的一个例子，我们下面来证明初等数论的一个定理，即将一个自然数分解成质数因子，如果不考虑其次序，是唯一的。这个证明从欧几里得算法开始。对于13013和390或者对于两个数 a 和 b，我们用较大的数除以较小的数，然后用较小的数除以余数 r，再用每个余数除以下一个余数，如此等等，按照这一节的初等数论可以证明，数13是本数值例子的最大公约数 gcd(13013,390)，或一般地说 r_n 是 a, b 的最大公约数 $\gcd(a, b)$。每个余数 r_i 每次至少要比除数小1，因此，在除了有限多次之后一定得到一个余数 r_{n+1} 是零。当从下向上读这些等式时，可以看到 r_n 是 r_{n-1} 的约数，也是 r_{n-2} 的约数等，因此也是 b 和 a 的约数，也就是说 r_n 是 a 和 b 的公约数。由等式 $r_1=a-bq_1$ 也可以证明，a 和 b 的任一个公约数都能除尽 r_1, r_2 等，最后可以证明 r_n 包含 a 和 b 的所有公约数，因此也就是最大公约数；写作 $\gcd(a, b)=r_n$。

$$\begin{aligned}
13013 &= 390\cdot 33+143, & a &= b\cdot q_1+r_1,\\
390 &= 143\cdot 2 \ +104, & b &= r_1\cdot q_2+r_2,\\
143 &= 104\cdot 1 \ +39, & r_1 &= r_2\cdot q_3+r_3,\\
104 &= \ 39\cdot 2 \ +26, & & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
39 &= \ 26\cdot 1 \ +13, & r_{n-2} &= r_{n-1}\cdot q_n+r_n,\\
26 &= \ 13\cdot 2+0, & r_{n-1} &= r_n\cdot q_{n-1}+0。
\end{aligned}$$

由倒数第二个方程得 $\gcd(a, b)=r_n=r_{n-2}-r_{n-1}q_n$。用 $r_{n-3}-r_{n-2}q_{n-1}$ 代替式中 r_{n-1}，再用 $r_{n-4}-r_{n-3}\cdot q_{n-2}$ 代替 r_{n-2} 等，这样最后得到两个自然数 x 和 y，满足 $\gcd(a, b)=r_n=ax-by$。特别是，如果 a 和 b 是互质数，则 $\gcd(a, b)=r_n=1=ax-by$。由此得出如下定理:

如果两个数 a 和 b 是互质数，而且 b 能除尽 ac，则 b 能除尽 c。

假设有一个自然数 k 满足 $a=b\cdot k$，同时因为 $\gcd(a, b)=1$，也就有 $1=ax-by$ 或 $c=acx-bcy$，因此 $c=bkx-bcy=b(kx-cy)$，也就是 b 能除尽 c。

推论: 如果积 ab 能被一个质数 p 整除，则至少有一个因子 a 或 b 能被 p 整除。

自然数 n 分解成质数因子的唯一性现在就可以证明了。假如 $n=p_1\cdot p_2\cdots p_r=q_1\cdot q_2\cdots q_s$ 是两种分解方法，p_1 能除尽 $q_1\cdot q_2\cdots q_s$ 的积，则 p_1 也就能除尽质因子 q_i 中的一个。但是只有这两个数相等时才有可能。对 q_i 经过适当的编排，可以假定 $p_1=q_1$。同样论证也适用于 $p_2\cdot p_3\cdots p_r=q_2\cdot q_3\cdots q_s$，并能证明可以假定 $p_2=q_2$。经过反复证明，最后得到 $r=s$ 和 $p_r=q_r$。

历史简述 在数学活动的初始阶段，计算、定理和公式只是用语言来表达的，还没有写成符号形式。由于这样做太复杂而且不够明确，所以对多次重复出现的事物采用了缩写法。例如，希腊人用字母表示点、线和面。亚历山大的丢番图普遍采用字母表示未知数；应该注意希腊人总是用字母表示数字。

印度和阿拉伯数学家研究的主要是方程理论。因此尽管代数这个名词来自方程理论，常以数值变量运算的广泛意义运用于初等数学，但是印度和阿拉伯数学家的工作在这里没有提及(参看 **I**. 第 4 章)。

比萨的里昂纳多(Leonardo, 1180～1228 年)第一次较广泛地采用了字母和变量。他还采用了分数线，但是他不知道运算符号。变量相容性

计算的真正创始人是弗朗索瓦·韦达(François Viète, 拉丁文的写法是 Vieta, 1540～1603 年)，他曾是皇家法院的司法官。

笛卡尔(1596～1650 年)也强调变量的重要性，现在的指数幂表示法应归功于他。

埃格尔(匈牙利)的约翰尼斯·维德曼 (Johannes Widmann) 于 1489 年第一次在算术教科书中写进了运算符号＋和－; 1631 年威廉·奥特雷得(William Oughtred)引入乘法算符 ×。用一个点表示乘法和用两点表示除法是高特弗雷得·维尔亥姆·莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646～1716 年)引入的，等号是罗伯特·雷科达(Robert Recorde, 1557 年)引入的(参见 I. 第 4 章)。

第2章 高级算术运算

2.1 幂与根的计算……………65

幂……………………………66

平方表和立方表…………71

根……………………………73

分数指数幂的根…………77

2.2 对数计算…………………80

对数定律和对数系………80

常用对数的计算…………87

对数计算尺………………97

加、减、乘、除称为四个基本算术运算。几个相同加数连加得到一个新的算术运算，叫乘法；与此类似，几个相同因子连乘得到一个新的算术运算，叫乘方或取幂。与加法和乘法一样，取幂也有逆运算，但是这次有两个不同的逆运算：求根和取对数。

2.1 幂与根的计算

历史简述 幂早为古人所知，并已应用于几何计算及出现在二次和高次方程中。巴比伦人已经有了平方和幂的表。他们已经知道如何用2的幂来解复利问题。在亚历山大的欧几里得《原本》（公元前第四世纪）中，人们发现有$(a+b)^2$的公式，这是那个时代的惊人成就。幂的概念可以追溯到希腊数学家希波克拉底(Hippocrates，公元前五世纪)。后来幂的运用更加频繁，例如，柏拉图(Plato，公元前427～347年)就用得很多。开始时只想到二次幂。据信波伦亚(意大利城市)的邦别利(Bombelli)是第一个使用potenza（拉丁文potentia，幂，能力、才能的意思)这个词的人。他还用这个词表示过未知数的平方；现今用的幂概念的一般意义是近代才有的。我们用的幂的表示法差不多要回溯到笛卡尔的时代。但是他只用来表示大于2的整指数，他仍然将a的平方写成$a\cdot a$。分数指数幂也相当早就知道了。在尼古拉·奥莱斯姆(Nicole Oresme，1323～1382年)的著作中已经能找到分数幂计算的一些定理。

和幂一样，根也早在古代就知道了。巴比伦人已经有有理平方根表。无理数的平方根用求算术-几何平均的方法来近似计算。曾采用过的公

式是$\sqrt{(a^2+b)}\approx a+b/(2a)$。希腊人已经知道除4，9和16之外，数2, 3, …, 17的平方根是无理数。这些根的无理性的证明要归功于迈塔波特的希巴索斯(Hippasos of Metapontum，公元前450年)及赛兰纳的西奥道诺斯(Theodoros of Cyrene，公元前430年)。在欧几里得《原本》中，第二级算术运算被用于求根。

在中世纪，根的计算有了进一步坚实的发展。早在9世纪，印度人就知道二次方程的解和一个数的平方根有两个值，还知道负数的平方根不可能是实数。他们还能近似计算平方根和立方根。米歇尔·斯蒂弗尔(1487~1567年)一直写到开七次方的数值求根法。他把形为$\sqrt{a+\sqrt{b}}$式的无理性理论推广到形为$\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$的表示式。根式符号逐渐发展成为今天的形式(这是由radix中的字母r衍变来的，radix是根root的意思)，克里斯托夫·鲁道尔夫(Christoff Rudolff，十六世纪)曾用过如下符号：$\sqrt{\ }$表示$\sqrt[2]{\ }$，$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ }}}$表示$\sqrt[3]{\ }$等。还可以看出，根也可以表示成分数指数幂(这是后来才熟悉的)。

幂

幂的概念 经常发生几个相同的数相加的情况：3.7+3.7+3.7+3.7+3.7。这几个相同项的和可以写成积5·3.7。几个相同数相乘的情况也常有发生。这里也引进了一个缩写法；例如，在几何上一个边长为a的正方形的面积可由一个边a乘另一个边a算得，即$A=a\cdot a$。或简单地写作$A=a^2$(读：a的二次幂，或a自乘二次，或a平方)。相应地，一个边长为a的立方体的体积：$V=a\cdot a\cdot a=a^3$。一般说来，对于整数n有：

幂	$a\cdot a\cdots a=a^n$ n个因子a；$n>0$，是整数

(读作：a的n次幂，或a自乘n次)

这里a是底数，n是幂指数。因此，一个数的n次幂就是n个相同数乘积的缩写式；就此意义而言，有$a^1=a$。例如：$2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$。也可以说2自乘到5次幂，这种运算叫做乘方；这是同一个量的连乘。由于乘方是建立在乘法这个第二级算术运算的基础上，所以这是称为第三级运算的更高一级运算。

由于$0\cdot0=0$，所以一般有$0^n=0$，$n>0$。同样，1的指数幂还是1：

$1^n=1$, $n>0$。一般说来，在乘方时底数和指数不能互换，例如，$2^3=8\neq 3^2=9$，实际上 $a^b=b^a$，在 $a=b$ 时当然成立，但是当 $a\neq b$ 时，只有 $2^4=4^2=16$ 一例成立。

根据指数是偶数(能被 2 除尽的)还是奇数，幂被分为偶次幂和奇次幂。因此，6^4，c^{16} 及一般地说 a^{2n} 是偶次幂，而 6^7，c^{13} 及一般说 a^{2n-1} 是奇次幂。

【例】 在数学、科学和技术的许多公式和定律中常出现指数；如在几何中，$4\pi r^3/3$ 表示一个半径为 r 的球的体积，$(s^2/4)\sqrt{3}$ 是边长为 s 的等边三角形的面积；在物理中，$gt^2/2$ 是自由落体的路程-时间定律，在计算复利时，$b\cdot(r^n-1)/(r-1)$ 是年金的计算公式。

特别重要的是 10 的幂。它们正在被运用于(在粗略估计或计算尺计算等方面)求一个数的**数量级**概念，或将非常大与非常小的数写成简单明了的形式。$100=10\cdot 10=10^2$，$1000=10\cdot 10\cdot 10=10^3$，一百万$=10^6$ 等；又如 1291000 可以写成 $1.291\cdot 10^6$ 或 $1291\cdot 10^3$。测量单位也可以写成幂的形式，如 m^2 (平方米)，cm^3(立方厘米)，m/s^2 (米/秒^2)等。

底数在 0 和 1 之间的幂随着指数的增大而减小：$(1/2)^2>(1/2)^3>(1/2)^4>\cdots$，但是当底数大于 1 时，幂随着指数的增大而增大：$2^2<2^3<2^4<\cdots$。幂的增长是很快的；如下的问题见于最古老的以亚默斯(公元前 1700 年)命名的算术书中：

有 7 个人，每个人有 7 只猫，每只猫吃 7 只老鼠，每只老鼠吃七个大麦穗，每个大麦穗能产 7 合麦，问共有多少合麦？答案：有 7^5 即16807合麦。

幂的符号 既然负数可以相乘，所以幂的底数也可以是负数；根据标准的符号法则，就有如 $(-3)^4=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=+81$ 及 $(-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=-125$。显然，两个负因子的乘积是正的，三个是负的，四个又是正的，依次类推。如果负号的数目是偶数，幂为正值，若为奇数，幂为负值。指数是表示(相同)因子的数目。

负底数的幂，当指数为偶数时是正值，当指数为奇数时是负值。

为了更清楚地看出这条法则的实质，我们选(-1)为底数。同时注意到，一个正底数的幂当指数 n 为任意正整数时都取正值；这是一个十分明显的事实：

$$(+1)^n=+1,\ (-1)^{2n}=+1,\ (-1)^{2n-1}=-1$$

幂的乘法和除法　底数和指数不同的幂在做乘法或除法时不能合并，例如 a^4c^3/x^7。

同指数的幂。如果将几个数的积再自乘到某次幂，如 $(ab)^n$，我们就得到 n 个因子 $a\cdot b$，共有 $2n$ 个因子，即分别有 n 个因子 a 和 n 个因子 b。既然因子可以互换(交换律)，这个乘积可以重新安排成 n 个因子 a 和 n 个因子 b 的乘积。

【例】 1. $(2xyz)^5=2^5x^5y^5z^5=32x^5y^5z^5$。

2. $(3a)^3=3a\cdot 3a\cdot 3a=3\cdot 3\cdot 3\cdot a\cdot a\cdot a=3^3\cdot a^3=27a^3$。

3. $2^8\cdot 5^7=2\cdot 2^7\cdot 5^7=2\cdot(2\cdot 5)^7=2\cdot 10^7=20000000$。

$$\boxed{(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n}$$

幂的第一定律：将一个乘积自乘到某一次幂就是将各个因子自乘到同次幂，再将得到的幂相乘。反之，同指数的幂相乘，可以先将各个底数相乘，再将此乘积自乘到公共指数幂。

同样，底数为分数的幂 $(a/b)^n$ 是由 n 个相同因子 a/b 相乘求得，因此这个幂是一个分数，其分子由 n 个因子 a 组成，分母由 n 个因子 b 组成，即 a^n/b^n。

【例】 1. $\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 5\cdot 5}{6\cdot 6\cdot 6}=\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$。

2. $\left(\frac{5x}{2a}\right)^3=\frac{5^3x^3}{2^3a^3}=\frac{125x^3}{8a^3}$。

3. $\frac{17^4}{34^5}=\frac{17^4}{34\cdot 34^4}=\frac{1}{34}\cdot\left(\frac{17}{34}\right)^4=\frac{1}{34}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$=\frac{1}{34\cdot 2^4}=\frac{1}{544}。$$

$$\boxed{(a/b)^n=a^n/b^n}$$

将一个分数(商)自乘到某次幂，就是将分子(被除数)和分母(除数)分别自乘到同一次幂，再将所得到的幂相除。反之，同指数幂相除可以先将它们的底数相除，然后将得到的商自乘到给定公共指数的幂。

同底数的幂。根据幂的定义，同底数 a 的两个幂 a^m 和 a^n 相乘，意思就是将 m 个 a 和另外 n 个 a 合并；这样就得到 $m+n$ 个因子，即 $(m+n)$ 次幂。

【例】 1. $3^4\cdot3^2=(3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot(3\cdot3)=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^{4+2}=3^6$。

2. $56a^5b\cdot98a^7b^5\cdot14a^2b^3=2^3\cdot7\cdot a^5b\cdot2\cdot7^2\cdot a^7b^5\cdot2\cdot7\cdot a^2b^3$
$=2^{3+1+1}\cdot7^{1+2+1}a^{5+7+2}b^{1+5+3}=2^5\cdot7^4\cdot a^{14}b^9$。

$$\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$$

幂的第二定律：同底数的幂相乘就是将底数自乘到各个指数和次幂。

除法。由于任何除法的结果都可以看成是一个分数，被除数是分子，除数是分母，所以幂 a^m 除以幂 a^n 也得到一个分数，分子是 m 个因子 a，分母是 n 个因子 a。如果 n 是较小的指数，经过 n 次约分后，分母变成 1，分子少掉 n 个因子，也就是只剩 $m-n$ 个因子，因此其值为 a^{m-n}。另一方面，如果 m 是较小的指数，则经过约分后，分子变为 1，分母中还有 $n-m$ 个因子，这就得到 $1/a^{n-m}$。如果两个指数相等，经过约分后分子和分母都变为 1，不管底数为何，这样的除法其结果都是 1。

【例】1. $7^6:7^4=\dfrac{7\cdot7\cdot\overset{1}{\cancel{7}}\cdot\overset{1}{\cancel{7}}\cdot\overset{1}{\cancel{7}}\cdot\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{7}}\cdot\underset{1}{\cancel{7}}\cdot\underset{1}{\cancel{7}}\cdot\underset{1}{\cancel{7}}}=7^{6-4}=7^2=49$。

2. $11^3:11^5=\dfrac{\overset{1}{\cancel{11}}\cdot\overset{1}{\cancel{11}}\cdot\overset{1}{\cancel{11}}}{\underset{1}{\cancel{11}}\cdot\underset{1}{\cancel{11}}\cdot\underset{1}{\cancel{11}}\cdot11\cdot11}=\dfrac{1}{11^{5-3}}=\dfrac{1}{11^2}=\dfrac{1}{121}$。

$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	当 $m>n$
$\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{1}{a^{n-m}}$	当 $n>m$
$\dfrac{a^m}{a^n}=1$	当 $m=n$

与两个同底数幂相乘的结果相比较，除法得到的结果不够满意：前者积的指数是各个指数的和，这里商的指数是差 $m-n$ 或 $n-m$，甚至商还可能是数 1，初看起来好象与各个幂无关。既然除法是乘法的逆运算，因此我们可以预见，在任何情况下除法的结果都应当可以用分子的指数 m 和分母的指数 n 的差 $m-n$ 来确定；这就得出幂的第三定律。

幂的第三定律：同底数幂相除就是将底数自乘到某一指数幂，这个指数等于分子和分母的指数之差。

1867年亨凯尔提出了所谓不变性原理，按照这个原理，人们试图保持计算法则的有效性，而扩大与运算法则有关的数学对象的概念。在幂的第三定律中出现的指数差 $m-n$，初看起来只有当 $m>n$ 时才有意义。如果按照不变性原理，当 $m=n$ 和 $m<n$ 时这个定律也应有效，这样就出现了零指数及负指数，根据前面采用的定义这是没有意义的，因为前面的定义是：a^n 意思是 n 个相同因子 a。因此我们将幂的概念作如下两个定义的扩充：

幂概念的扩充	$a^0=1$　和　$a^{-n}=1/a^n$　$a\neq 0$

这样 $a^m:a^n=a^{m-n}$ 就毫无例外地始终成立，并符合上述结果。因此有：

1．当 $m>n$ 时，这就是原来的定义；

2．当 $m=n$ 时，有 $a^{m-n}=a^0=1$；

3．当 $m<n$ 时，根据新的定义 $a^{m-n}=a^{-(n-m)}=1/a^{n-m}$。

【例】 1．$a^3:a^5=a^{3-5}=a^{-2}=1/a^2$。

2．$$25\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\cdot(2n)^0\cdot 5^{-3}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^{-n}=5^{2-3}\cdot a^n\cdot a^{-n}\cdot x^{-(-n)}$$
$$=5^{-1}\cdot a^0\cdot x^n=x^n/5。$$

3．$$27a^4b^4\cdot 56a^2b^{-3}\cdot 42a^{-2}b^3=3^3\cdot a^4b^4\cdot 7\cdot 2^3\cdot a^2b^{-3}\cdot 7\cdot 3\cdot 2\cdot a^{-2}b^3$$
$$=2^4\cdot 3^4\cdot 7^2\cdot a^4b^4=(2^2\cdot 3^2\cdot 7a^2b^2)^2。$$

4．2毫克的质量亏损相当于多少千瓦小时的能量（1千瓦小时 $=3.6\cdot 10^{13}$ 克·厘米²/秒²）？——$E=m\cdot c^2$（E 表示能量，m 表示质量，c 是光速 $\approx 3\cdot 10^{10}$ 厘米/秒）。

可以得到

$$\frac{2\cdot 10^{-3}\cdot(3\cdot 10^{10})^2}{3.6\cdot 10^{13}}\text{千瓦小时}=\frac{2\cdot 9\cdot 10^{-3}\cdot 10^{20}}{3.6\cdot 10^{13}}\text{千瓦小时}$$
$$=5\cdot 10^{+4}\text{千瓦小时。}$$

因此，如果2毫克物质全部转变成能量，释放出的能量是50000千瓦小时。

负指数幂常用于测量单位和底数为10的情况；例如，$ms^{-1}=m/s$ 是速度单位，表示每秒米；$gcm^{-3}=g/cm^3$ 是密度单位，表示每立方厘米克等。人们采用10的负指数幂，是因为这种表示法能使人对非常小的数有个清

晰的形象，如基本电荷$e=1.602\cdot10^{-19}$库仑及氢原子的直径 $d=1.06\cdot10^{-8}$ cm。为了使人对氢原子的直径有个大概的了解，可以打个比喻，氢原子的直径与足球直径之比差不多等于足球直径与地球直径之比。

幂的乘方 取 a^m 的幂，也就是要计算$(a^m)^n$，意思就是按照原来的定义，去求 n 个相同因子 a^m 的积，而每一个因子 a^m 又是由 m 个相同因子 a 组成。因此一共有 $m\cdot n$ 个因子 a 相乘。这种论证同样适用于 m 个相同因子 $1/a^n$，或 n 个相同因子 $1/a^m$ 的情况，因此整数 m 和 n 也可以是负数。

$$\boxed{(a^m)^n=a^{m\cdot n}}$$

幂的第四定律：对一个幂再取幂，就是将底数自乘到某一个指数，这个指数等于原先两个指数的积。

由于因子的次序可以变换，所以指数的次序也可以变换。因此，可以将一个幂的指数分解成因子，而因子的次序是无关紧要的：

$$a^{m\cdot n}=(a^m)^n=(a^n)^m。$$

【例】 1. $(2^2)^4=(2^4)^2=16^2=256$。

2. $\frac{(-9a^2b^3)^5}{(-6a^2b)^4}=\frac{(-1)^5(3^2a^2b^3)^5}{(-1)^4(2\cdot3a^2b)^4}=-\frac{3^{10}a^{10}b^{15}}{2^4\cdot3^4a^8b^4}=-\frac{3^6a^2b^{11}}{2^4}$。

3. 三个数字仅用加法、乘法和取幂来表示的最大整数是 $9^{(9^9)}$。因为有 $9+9+9<9\cdot9\cdot9<999<99^9<(9^9)^9<9^{99}<9^{(9^9)}=9^{387420489}$。若用十进制写出这个数需要一张大纸，纸的长度差不多要从伦敦一直铺到斯德哥尔摩；或者可以装订成 33 本书，每本书有 800 页，每页写 14000 个字。

平方表和立方表

查平方表 在平方表以零开头的一行中可以找出 1.0 到 9.9（即列在最左边的开头一行）各数的平方，例如，$6.4^2=40.96$。在以 1, 2, …, 9 开头的各行中列出了所有三位数的平方，取四位有效数字（见图 2.1-1），即所有末位数为 1 的数的平方都在以 1 开头的一行中，末位数为 2 的各数平方在以 2 开头的一行中，等等。因此，6.44 的平方是在 6.4 一列和 4 开头的一行的相交处：$6.44^2=41.47$，取四位数字；而其精确值是 41.4736。这个数同时还以相同的精确度给出了 64.4, 6.44, 0.644, 0.0644 等数的平方。若作一粗略估计便可看出，譬如说，64.4^2 一定在 $60^2=3600$ 和 $70^2=4900$ 之间，因此取四位有效数字一定是 4147；同样

图 2.1-1　查平方数 $6.44^2=41.47$

0.644 一定是在 $0.6^2=0.36$ 和 $0.7^2=0.49$ 之间，根据平方表一定是 0.4147。按照同样的方法可得 $453^2=205200$ (严格说是205209) 及 $0.00908^2=0.00008245$ (精确值是 0.0000824464)。如果需要求平方的底数有**四位数**，则将相邻两个三位数的平方差在可能具有的第四位数 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 之间均匀分成十等分。例如，根据表 6.447^2 介于 $6.440^2=41.47$ 和 $6.450^2=41.60$ 之间，将此两数之差 0.13 (即第四位数相差 13 个单位)分成 10 等分，每等分得 $0.13:10=0.013$(或 1.3个单位)；因此在 6.447^2 中，底数的第四位数字是 7，相应于 $7\cdot 0.013=0.091$ (即 $7\cdot 1.3=9.1$ 个单位)。一般说来，如果差数是 d，底数第四位数字是 z 个单位，则分得的值是 $c=d\cdot z/10$ 个单位。对四位有效数字的平方表值的修正值是 0.09；因此得到 $6.447^2=41.47+0.09=41.56$。由于

图 2.1-2　查立方数 $1.57^3=3.870$

表的差值是平均分配的，所以称为**线性插值法**。鉴于平方数的轨迹是一条抛物线，我们假定在与 6.44^2 和 6.45^2 两平方数相应的点之间是一条直线，即为该抛物线的一根弦线。表上的相邻两值之差越小，则用插值法求得的值与真值相差也就越小。对于7.607，可以相继得到 $7.60^2 = 57.76, 7.61^2 = 57.91$，$d = 15$，$c = d \cdot z/10 = 15 \cdot 7/10 = 10.5 \approx 10$，因此 $7.607^2 = 57.86$。立方表的排列情况与此类似(见图2.1-2)。

根

根的概念 希腊人早已熟悉求一个面积已知的正方形边长的问题。如果一个正方形的面积是 x^2，如 4m^2，9m^2，16m^2 等，则很容易求出边长 x；由 $x_1^2 = 3^2\text{m}^2$ 及 $x_2^2 = 0.5^2\text{m}^2$，很自然就有 $x_1 = 3\text{m}$ 及 $x_2 = 0.5\text{m}$。在一般情况下，当面积为一任意正(实)数时，则无通解可得；在柏拉图的对话《哲人传》中，苏格拉底(Socrates)以冗长的几何论证说明边长为1的正方形的对角线就是面积为2的正方形的边(见图2.1-3)。在今天看来，哲人传应该以如下的表述总结对话的几何内容，即面积为2的正方形的边长 x 的值为 $x = \sqrt{2}$。这里符号 $\sqrt{2}$ (读作：2的平方根)表示数 x，当它自乘(平方)时得出值2。实际求这个数 x 的数值解的问题只有在一些特殊情况下才能解，例如，$\sqrt{9} = 3$，因为 $3^2 = 9$；或 $\sqrt{0.0144} = 0.12$，因为 $0.12^2 = 0.0144$。

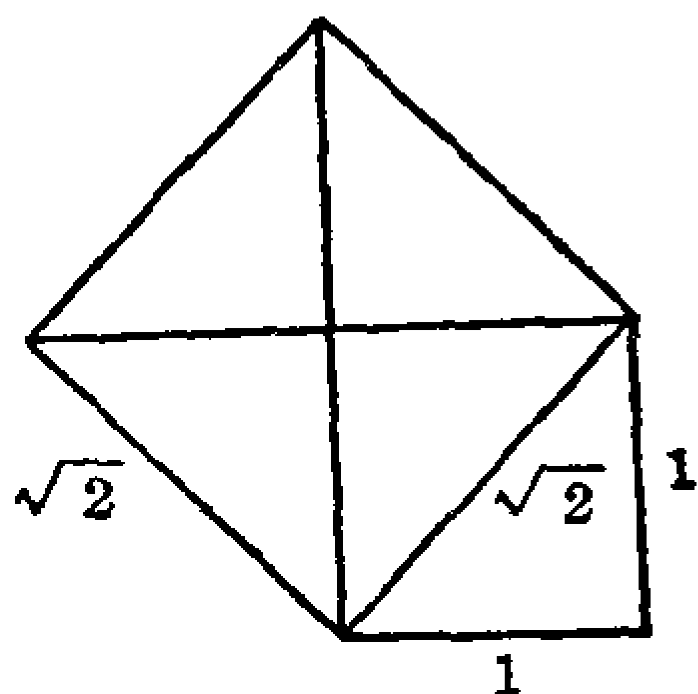


图2.1-3 正方形面积 $(\sqrt{2})^2$ 为已知正方形面积 1^2 的两倍

一个非负实数 a 的平方根 $x = \sqrt{a}$，定义为一个非负实数 x，x 的平方就是 a：$x^2 = a$。

同样，希腊数学家的**提洛**(Delian)**问题**：求一立方体的边长，该立方体的体积是边长为1的立方体体积2倍，这就得出一个**三次根**，或叫**立方根**。今天看来这个问题应表述如下：体积为2的立方体边长 e 是数 $e = \sqrt[3]{2}$ (读作：2的立方根)，它的三次幂值是2，$e^3 = 2$。只有在特殊情况下才容易求出这个数，例如，$\sqrt[3]{8} = 2$，因为 $2^3 = 8$，或 $\sqrt[3]{0.125} = 0.5$，因为 $0.5^3 = 0.125$。就象表达式 $x = \sqrt{a}$ 和 $x^2 = a$，$x \geqslant 0$ 及 $e = \sqrt[3]{a}$ 和 $e^3 = a$ 是等价的一样，当 $b \geqslant 0$ 时，$a = \sqrt[n]{b}$ 和 $a^n = b$，$a \geqslant 0$ 也定义为是等价的。

定义：一个非负实数b的n次根$a=\sqrt[n]{b}$是这样的一个非负实数a，它的n次幂a^n的值是b：$a^n=b$。

求根应看成是乘方的逆运算。待求根的数b叫做**被开方数**，它与幂相应；值a与幂的底数相应，这里的n也叫指数。

由于对任何正整数n都有$1^n=1$，所以也有$\sqrt[n]{1}=1$；又由$0^n=0$，得$\sqrt[n]{0}=0$。为了完整起见，人们还确定$\sqrt[1]{a}=a$。方程$x^2=4$有两个解，$x_1=+2$和$x_2=-2$，因为$x_1^2=x_2^2=4$。根$\sqrt[n]{b}=x$是唯一确定的。因此对于偶数n，方程$x^n=b$的两个解的差别仅在于符号。

方程$x^3=-8$有解$x=-2$。因为按照定义，被开方数要是非负数，所以一定要写成$x=-\sqrt[3]{[-(-8)]}=-\sqrt[3]{8}$。当$n$是奇数而且$b<0$时，方程$x^n=b$有一个解是$x=-\sqrt[n]{(-b)}$。通常用记号$x=\sqrt[3]{-8}$来表示$x^3=-8$的解。因此不言而喻，当$n$为奇数时，一个负数的根就是其绝对值的负根。因此只要在**正数**范围内，求根和乘方是互为逆运算。

根的计算　在运用中，平方和立方根是经常会遇到的。这就是我们在下文中专门要讨论的问题。在解给定问题时应从各种可能的方法中选择一种，以便通过最省力的计算得出有足够精确度的结果。

数值法。早在16世纪斯蒂弗尔就提出了数值法，并用它求到第七次根。今天人们已采用对数。因此我们只需说明用此法解平方根的问题就够了。

首先，对数字位数作几点说明。一个两位数，如21或85的平方有3位或4位数。一般说来，**一个n位数的平方具有$2n-1$或$2n$位数**。既然求根是乘方的逆运算，所以**一个$2n-1$或$2n$位数的平方根有n位数**。例如，$\sqrt{441}=21$，$\sqrt{7225}=85$。确定根的位数是容易的：从小数点开始，将被开方数向两边按两个数字一节来分节。根的小数点前后位数就等于被开方数小数点前后分成的节数。例如$\sqrt{39|90|06.|98|89}=631.67$，在小数点前有3节，小数点后有2节。

以441为例，我们知道它的根一定有两位数，也就是说，一定取$a+b$的形式。这里a是10的一个倍数。因此，

$$441=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

即

$$441=a^2+(2a+b)b。$$

这是在计算平方根时采用的一个办法，即先从被开方数减去a^2，然后再减去第二项$(2a+b)b$：

$$\begin{array}{rll} & \sqrt{441}=20+1=21 & \\ -a^2 & -400 & a \quad b \quad a+b \\ & \overline{41} & \\ -(2a+b)b & -41 & \\ & \overline{0} & \end{array}$$

二位数以上的根的计算方法也类似:

$$\begin{array}{rll} & \sqrt{5745.64}=70+5+0.8=75.8 & \\ -a^2 & -4900 & a \quad b \quad c \quad a+b+c \\ & \overline{845} & \\ -(2a+b)b & -725 & \\ & \overline{120.64} & \\ -(2a+2b+c)c & -120.64 & \\ & \overline{0} & \end{array}$$

近似公式。这里提到的近似方法在古代就已经知道并应用了。另外还有一些方法将在 **II.** 第8章中讨论。

如果 a 比 b 大得很多，则在表达式 $[a+b/(2a)]^2=a^2+b+b^2/(4a^2)$ 和 $[a+b/(3a^2)]^3=a^3+b+b^2/(3a^3)+b^3/(27a^6)$ 中，分母中含 a 的幂的项都很小，可以略去。这就得出平方根和立方根的近似值。

$$\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2\approx a^2+b \qquad \sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$$

$$\left(a+\frac{b}{3a^2}\right)^3\approx a^3+b \qquad \sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\frac{b}{3a^2}$$

【例】 1. $\sqrt{35}=\sqrt{(36-1)}\approx 6-1/12=5.917$，其准确值为 $5.91608\cdots$。

2. $\sqrt[3]{730000}=\sqrt[3]{(729000+1000)}\approx 90+1000/(3\cdot 90^2)=90.041$，其准确值为 $90.0411\cdots$。

求根的其他方法。根还常常借助于计算尺及对数表来求得，因为这样计算不费多大力气。用对数求根还有另外一个优点，即能很快地算出任何指数的根，而不需做太多的工作。

利用幂函数 $y^n=x$ 的图，用图解法求根。如果图画得足够准确，或对精确度的要求非常低，则在曲线结构中适当线段上的各点可以用来求 n 次根的值，即每给出一个纵坐标的正值 x，就能找出相应的横坐标值 $y=\sqrt[n]{x}$，即 n 次根的值。**诺模图**也常有应用。例如，可以将一个圆柱的长度 l，直径 d 和体积 V 之间的关系在诺模图中表示出来(见图 2.1-4)。

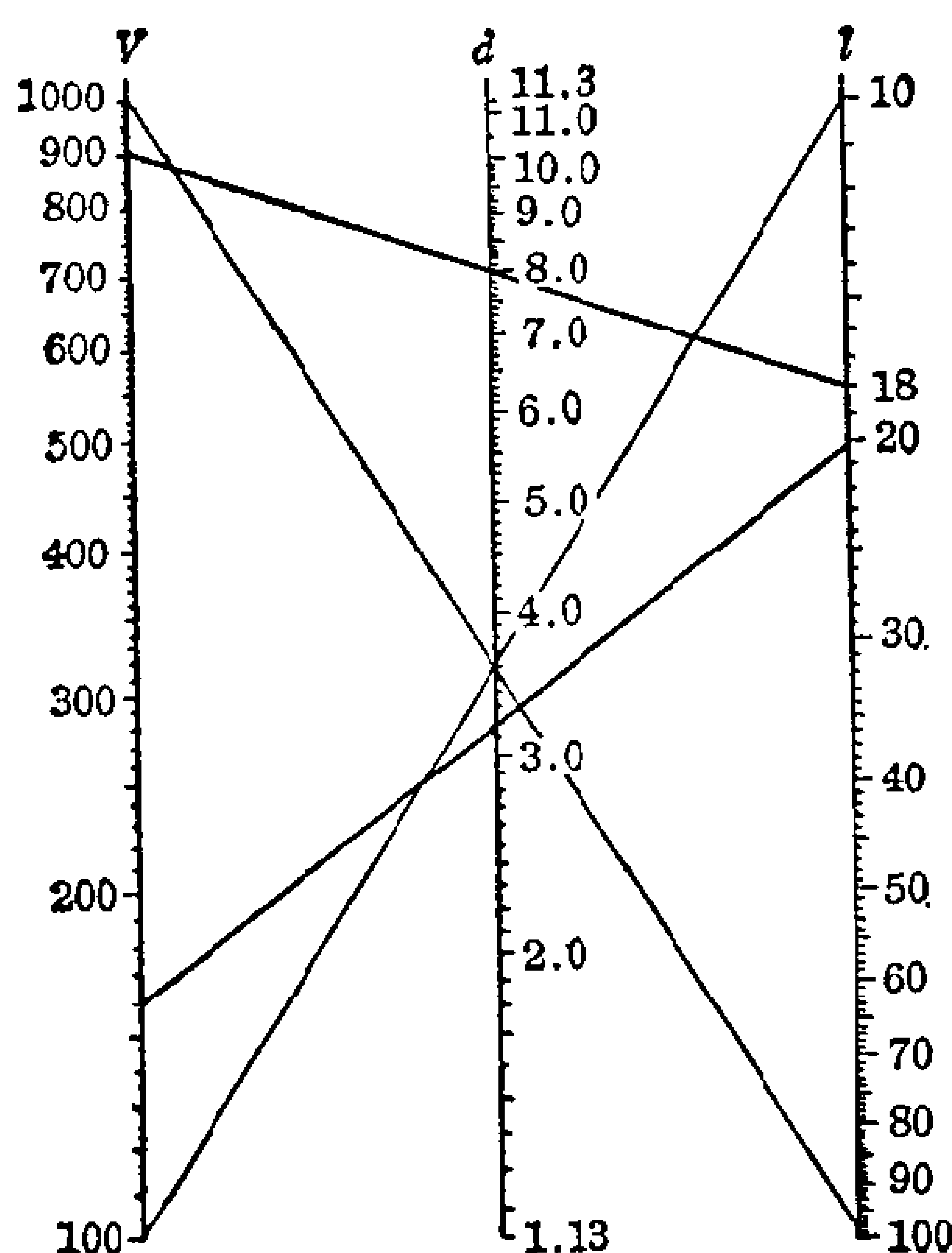


图 2.1-4　用来计算圆柱直径 $d=\sqrt{4V/(\pi l)}$ 的诺模图。如果 V 的单位是 cm^3，l 的单位是 cm，则 d 的单位是 cm

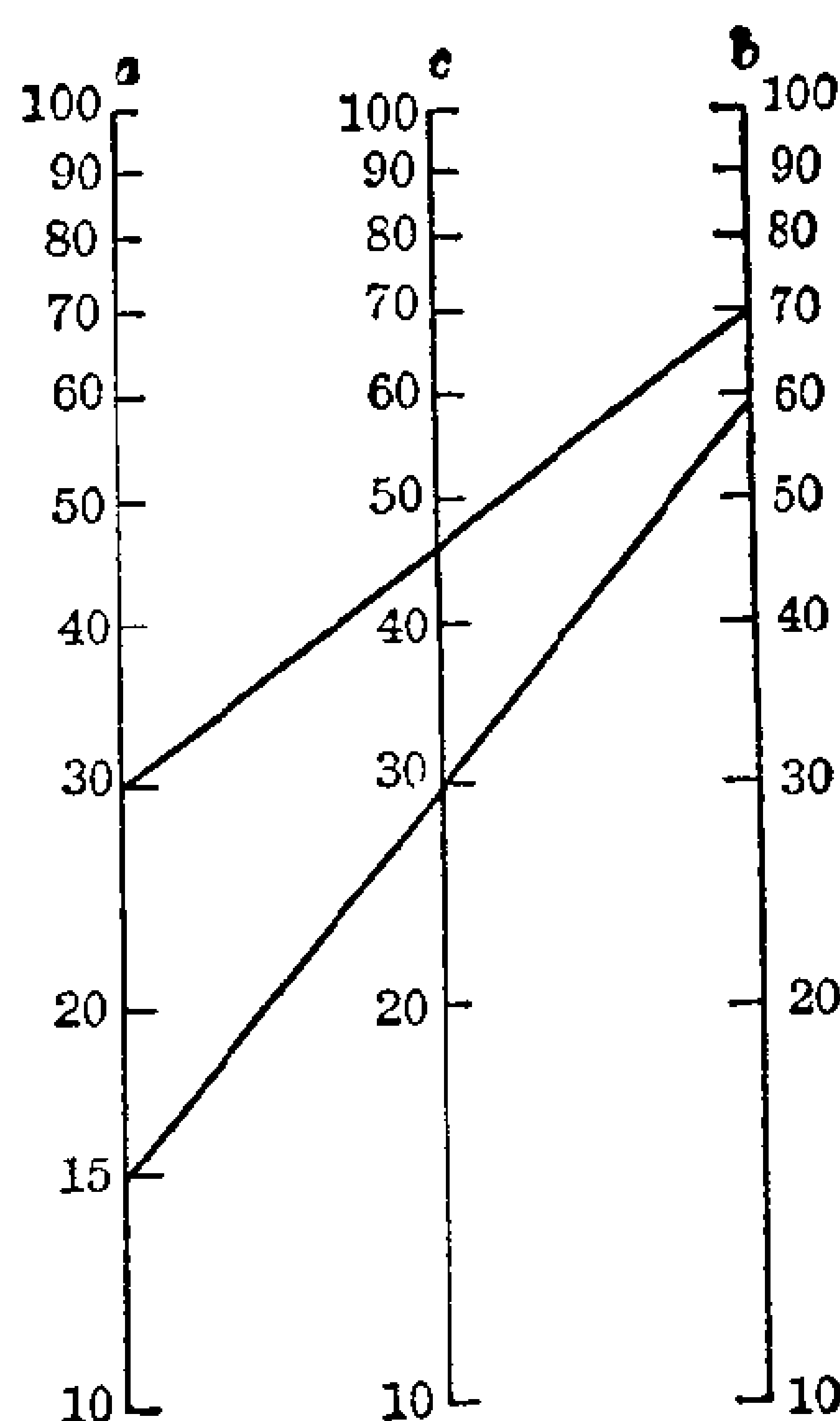


图 2.1-5　一个乘积的平方根 $c=\sqrt{ab}$

【例】 长为 20 cm 和体积为 160 cm^3 的一个圆柱的直径有多大?

在体积标尺上标出点 160 cm^3，在长度标尺上标出点 20cm，用直线连接此两点，则此直线截中间标尺于所求的直径处。在此例中直径为 3.2 cm。同样由圆柱的体积 900 cm^3 和直径 8 cm 可求得长度为 18 cm。

几何平均值也可以用图示法表示，并可用来作为计算一个乘积的平方根的诺模图(见图 2.1-5)。

用表求根。平方表列出的平方数取至四位有效数字。根据平方根的定义，这些数可以看成是被开方数。被开方数根的各个数字可由被开方数所在列的开头数和它所在行的开头数求得；例如，$\sqrt{76.39}=8.74$，$\sqrt{0.1136}=0.337$，$\sqrt{2777}=52.7$ 及 $\sqrt{2.403}=1.55$ (见图 2.1-6)。

如果被开方数介于表中两个平方数之间，则除了表中平方数的差 d 已知之外，修正值 c 也为已知，再根据查平方数的公式 $c=d\cdot z/10$，求得第四位有效数字 $z=10\cdot c/d$；例如，$\sqrt{56.90}$ 介于 $\sqrt{56.85}$ 和 $\sqrt{57.00}$ 之间，

因此所求值应在 7.54 和 7.55 之间；表的平方数差 $d=15$，修正数 $c=5$，则第四位数 $z=50/15=3$；其结果是 $\sqrt{56.90}=7.543$。同样可以求得 $\sqrt{15.78}=3.972$ 及 $\sqrt{6666}=81.64$。

图 2.1-6 查平方根 $\sqrt{2.403}=1.55$

在平方根表中读法和插值法与在平方表中一样。不过应该注意，现在是被开方数写在开头的行列中，相应的平方根写在表的中央。

【例】 $\sqrt{55.3}=7.437$。

对于平方根所作的一切讨论，对立方根也同样成立。

除了被开方数是个平方数或 n 次幂的特例之外，所有平方根或 n 次根都是无理数(参看 **I**. 第 3 章)。

分数指数幂的根

求根可以看成乘方的逆运算。如果将一个幂再取 n 次幂(n 是正整数)，也就是将这个幂的指数乘上 n。既然除法是乘法的逆运算，所以如下表达是符合不变性原理的:

$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$$

一个幂的 n 次根可由该幂的指数除以 n 求得。

这就定义了一个新的数 $a^{m/n}$，当 a 是个正实数，m 和 n 是两个正整数时，它必须满足 $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$。根据前面导出的法则，这个数的 n 次幂是

$(a^{m/n})^n=a^m$，这与 n 次根的定义相符。同时，这种表示法是唯一的：由 $m/n=m'/n'$，如 $4/6=6/9$，即得 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}}$。如果将根 $\sqrt[n]{a^m}$ 自乘到 $(m'\cdot n)$ 次幂，并且记住 $mn'=m'n$，则得 $(\sqrt[n]{a^m})^{m'n}=[(\sqrt[n]{a^m})^n]^{m'}=[a^m]^{m'}=a^{m'm}$。同样，$(\sqrt[n']{a^{m'}})^{mn'}=[(\sqrt[n']{a^{m'}})^{n'}]^m=[a^{m'}]^m=a^{m'm}$，也就是说，得出了相同的值。由此得出如下一些关系式。

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ 因为 $a^{1/n}\cdot b^{1/n}=(ab)^{1/n}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ 因为 $\dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}}=(a/b)^{1/n}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{b}}$ 因为 $b^{-1/n}=(b^{-1})^{1/n}$
4. $\sqrt[rq]{a^{sq}}=\sqrt[r]{a^s}$ 因为 $a^{sq/rq}=a^{s/r}$

【例】 1. $\sqrt[3]{24x^4}=\sqrt[3]{2^3\cdot3\cdot x^3\cdot x}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{3x}$
$=2x\sqrt[3]{3x}$。

2. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{3\cdot4}{3\cdot9}}=\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$。

3. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{64}}=\dfrac{1}{4}$。

4. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}=(x^2-a^2)^{-1/2}$。

5. $\sqrt[6]{9}=\sqrt[2\cdot3]{3^2}=\sqrt[3]{3}$。

6. $\sqrt[7]{a^5}=a^{5/7}$。　　7. $\dfrac{1}{\sqrt[7]{(14a)^3}}=(14a)^{-3/7}$。

8. $\sqrt[3]{18a^2b}\cdot\sqrt[3]{12ab^2}\cdot\sqrt[3]{16ab}$
$=\sqrt[3]{2\cdot3^2\cdot2^2\cdot3\cdot2^4\cdot a^4b^4}=\sqrt[3]{2^6\cdot2\cdot3^3\cdot a^4b^4}$
$=2^2\cdot3^1\cdot a^1\cdot b^1\sqrt[3]{2ab}=12ab\sqrt[3]{2ab}$。

9. $8\cdot\sqrt{\dfrac{13}{128}}=2^3\cdot\sqrt{\dfrac{13}{2^7}}=\dfrac{2^3}{2^3}\sqrt{\dfrac{13}{2}}=\sqrt{\dfrac{13}{2}}$。

10. $\sqrt{\left(2+\dfrac{14}{25}\right)\dfrac{a^4}{p^2q^2}}=\sqrt{\dfrac{64\cdot a^4}{25p^2q^2}}=\dfrac{8a^2}{5pq}$。

11. $12bc\sqrt{\dfrac{5a}{24b^2c}}=\sqrt{\dfrac{12^2b^2c^2\cdot 5a}{24b^2c}}=\sqrt{\dfrac{12c\cdot 5a}{2}}=\sqrt{30ac}$。

12. $(\sqrt[4]{16})^3=\sqrt[4]{(16)^3}=\sqrt[4]{(2^4)^3}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^{12/4}=2^3=8$。

13. $[\sqrt[6]{(n^2v)}]^9=[(n^2v)^{1/6}]^9=n^{2\cdot 9/6}\cdot v^{9/6}=n^3\cdot v^{1+1/2}$

$=n^3v\cdot v^{1/2}=n^3v\cdot\sqrt{v}$。

14. $\sqrt[n]{a+\dfrac{a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\dfrac{(a^{n+1}-a)+a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\dfrac{a^n\cdot a}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\dfrac{a}{a^n-1}}$;

当$a=3$, $n=2$时,这就是$\sqrt{3+3/8}=3\sqrt{3/8}$;

当$a=2$, $n=5$时,这就是$\sqrt[5]{2+(2/31)}=2\sqrt[5]{2/31}$。

15. $\sqrt[5]{\sqrt[2]{32}}=[(2^5)^{1/2}]^{1/5}=2^{5/10}=2^{1/2}=\sqrt{2}$。

16. $\sqrt[3]{a^5\cdot\sqrt[4]{a^5}}=[a^5(a^5)^{1/4}]^{1/3}=a^{5/3}\cdot a^{5/12}=a^{5/3+5/12}=a^{25/12}$

$=a^{2+1/12}=a^2\cdot\sqrt[12]{a}$。

17. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=[3\cdot(3\cdot 3^{1/2})^{1/2}]^{1/2}=3^{1/2}\cdot 3^{1/4}\cdot 3^{1/8}$

$=3^{1/2+1/4+1/8}=3^{7/8}=\sqrt[8]{3^7}$。

18. $\sqrt[3]{a^2:(\sqrt{a})^3}=a^{2/3}:a^{3/2}=a^{2/3-3/2}=a^{-5/6}=1/\sqrt[6]{a^5}$。

19. $\sqrt[5]{a^{2x}}\cdot\sqrt[6]{a^{5x}}=a^{(2/5)x}\cdot a^{(5/6)x}=a^{(2/5)x+(5/6)x}=a^{(37/30)x}$

$=a^{(1+7/30)x}=a^x\cdot\sqrt[30]{a^{7x}}$。

20. a) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{\sqrt[2]{\sqrt[5]{10}}}}=\sqrt[10]{\sqrt[10]{10}}=\sqrt[10^2]{10}=\sqrt[100]{10}=10^{0.01}$。

b) $\sqrt[10^4]{10}=10^{0.0001}$。

有理化分母。整数或有理数的根,一般说来是无理数,可用无限不循环小数来表示。因此要尽量避免被根式除,也就是说,避免分数的分母是有理数的根。在这样的情况下,我们总能找到一个数,应用这个数能将分数变换,使其分母成为有理数。假如分母是$\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}$, a是有理数,若乘上$a^m:a^{m/n}=a^{m(1-1/n)}=a^{m(n-1)/n}$,一定得到值$a^m$,即变成了有理数。例如,分数$1/\sqrt[3]{p}$一定要用$p^{(3-1)/3}=p^{2/3}$去扩分。

【例】 1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{p}}=\dfrac{1\cdot p^{2/3}}{p^{1/3}\cdot p^{2/3}}=\dfrac{p^{2/3}}{p}=\dfrac{1}{p}\cdot\sqrt[3]{p^2}$。

2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$。

形如$\sqrt{a}-\sqrt{b}$的分母要乘上$\sqrt{a}+\sqrt{b}$才能变成有理数，因为这个乘积的结果是$a-b$。

【例】
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{3+\sqrt{6}}{3-2}=3+\sqrt{6}。$$

无理数指数幂　幂是某一整数个相同因子的乘积，从这个定义出发，按照不变性原理先将其含义扩充到负指数，然后又扩充到任意有理数指数。似乎还可以进一步发展，允许有无理数指数。假设α为一个正无理数指数。问题是当给定一个底数b时，要求b^{α}。α可以表示成一个无限不循环小数，即可以写成：$\alpha=a.a_1a_2a_3\cdots a_i\cdots$，也就是

$$\alpha=a+a_1/10+a_2/10^2+a_3/10^3+\cdots+a_i/10^i+\cdots。$$

这里a是一个整数，a_i是0到9之间的数字，a_1表示十分位的数，a_2是百分位的数，等等。小数的数字不会从某一位起向下全为零，也不会按周期有规则地重复出现。例如，对于$a=\sqrt{2}=1.41421356\cdots$，有$a=1$，$a_1=4$，$a_2=1$，$a_3=4$，$a_4=2$，$a_5=1$，$a_6=3$，$a_7=5$，$a_8=6$，…，假如我们将$\alpha$的和式截止于项$a_i/10^i$，就得到一个近似值$\alpha_i$，它与真值$\alpha$相差不到$1/10^i$。现在可以证明当$\alpha_i$越来越接近无理数$\alpha$时，则对于任何正底数$b$的有理指数幂$b^{\alpha_i}$就越来越接近某一个数，这个数就定义为$b^{\alpha}$。

如α是个负指数，可对分数$1/b^{-\alpha}$的分母作同样论证，因为这个分母的指数是正的。可以证明，有了这些定义幂的运算法则对任何实数指数都有效。

2.2　对数计算

一百五十年以前曾有些诗人将对数表看成是数学的精华。"对数与数学的关系，就象数学与科学的关系"，这是努瓦尔(Noval)说的。现在对数表早已从这种地位跌落下来了，它的地位已被计算尺和计算机所代替。

对数定律和对数系

用幂作乘法　如果将一个底数譬如说2的各个指数l、幂p和它们的值n编成一个表，就可以很容易地通过指数l计算值n的乘和除；例如

$4\cdot 8=2^2\cdot 2^3=2^{2+3}=32$，或 $16:64=2^4:2^6=2^{-2}=1/4$。按照幂的定律，如果利用右边的表，我们只要计算 $2+3=5$ 或 $4-6=-2$。代替乘方，只要做乘法就够了：$4^3=(2^2)^3=2^6=64$；同样，求根可以用除法代替，例如，$\sqrt[4]{(1/16)}=2^{-4/4}=1/2$。如果将在一个问题中出现的幂用相应的指数代替进行计算，则**所有的算术运算都可以简化成较低一级的运算**。这个方法有一个缺点，就是与 2 的各个幂之间的数对应的指数不知道。但是一旦算出了对应指数的值，例如算出了 $\sqrt[100]{2}=2^{0.01}=1.006956$ 之后，也就得出了这个数的从 0.01 到 1 之间的所有指数幂的需求值；例如 $2^{0.02}=(2^{0.01})^2=1.013960$ 及 $2^{0.1}=(2^{0.01})^{10}=1.071773$。其他幂之间的中间值也可以求出。例如：

l	p	n
-4	2^{-4}	1/16
-3	2^{-3}	1/8
-2	2^{-2}	1/4
-1	2^{-1}	1/2
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8
4	2^4	16
5	2^5	32
6	2^6	64

$$2^{1.01}=2^{1+0.01}=2\cdot 2^{0.01}=2.013912$$

及 $2^{3.1}=2^{3+0.1}=8\cdot 1.071773=8.574184$。当指数是有理数而不是整数时，2 的所有这些幂是无理数；当幂 2^α 为任一给定数时，要求出指数 α 是可能的(参看本节之历史简述)。

对于某个底数 $b>1$ 和一任意正数 x，一定有一个**指数** l 满足 $b^l=x$，这是很容易证明的。当指数为足够大的正数时，$b>1$ 的幂会大于任一给定实数 $x>1$，而当指数为足够大的负数时，b 的幂会小于任一给定实数 $x(0\leqslant x<1)$。因此一定有一个整数 a 满足 $b^a\leqslant x<b^{a+1}$。如果将间隔 a 到 $a+1$ 分成**十等分**，每份长 1/10，则能在 0 到 9 之间找到一个整数 a_1 满足 $b^{a+a_1/10}\leqslant x<b^{a+a_1/10+1/10}$。如果继续不断地将上两个指数的间隔再分成十等分，就可求出一个小数作为更小的指数 $\alpha=a.a_1a_2\cdots a_i\cdots=a+a_1/10+a_2/10^2+\cdots+a_i/10^i+\cdots$。这可以是有限的，在此情况下 $x=b^{\alpha_i}$，$\alpha_i=a.a_1a_2\cdots a_i$ 是有理数，或**无限接近**一个实数 α 满足 $b^\alpha=x$。在数值上这些指数 $l=\alpha$ 可以用级数展开求得。它们被称为数 x 对于底数 b 的对数，写作 $l=\log_b x$。根据定义底数 b 一定要大于 1，数 x 要为正值。一给定底数 b 的所有对数构成**底数 b 的对数系**。

在开始时考虑的实际对数是以 2 为底的。现在可将上述结果书写如下：

$\log_2 2=1$，因为 $2^1=2$；$\log_2 4=2$，因为 $2^2=4$；

$\log_2 32=5$，因为 $2^5=32$；$\log_2(1/16)=-4$，因为 $2^{-4}=1/2^4=(1/16)$；

$\log_2 1.006956=0.01$，因为 $2^{0.01}=1.006956$；

$\log_2 1.071773=0.1$，因为 $2^{0.1}=1.071773$；

$\log_2 8.574184=3.1$，因为 $2^{3.1}=8.574184$；

$\log_2(4\cdot 8)=\log_2 4+\log_2 8=2+3=5=\log_2 32$；

$\log_2(16:64)=\log_2 16-\log_2 64=4-6=-2=\log_2 1/4$；

$\log_2 4^3=3\cdot\log_2 4=3\cdot 2=6=\log_2 64$；

$$\log_2\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{16}=\frac{1}{4}(-4)=-1=\log_2\frac{1}{2}。$$

对于任何底数 b 如下关系均成立，因为这些关系只是表示了指数幂的规律。由幂的序列…，b^{-3}，b^{-2}，b^{-1}，1，b^1，b^2，b^3，…得出 $\log_b b^2=2$，$\log_b b^3=3$，…，$\log_b b^n=n$，$\log_b b=1$，$\log_b 1=0$，$\log_b(1/b)=-1$，$\log_b(1/b^n)=-n$，也就是说1的对数永远是零，而其他值见后边的表。由于对数经常应用，所以对数计算的法则被表述成独立的规律。

对数第一定律：乘积的对数等于各个因子的对数的和。

底　　数	数 的 范 围	对 数 范 围
$b>1$	$1\cdots b$	$0\cdots 1$
	$b\cdots b^2$	$1\cdots 2$
	$b^n\cdots b^{n+1}$	$n\cdots n+1$
	$1\cdots\frac{1}{b}$	$0\cdots -1$
	$\frac{1}{b^{n-1}}\cdots\frac{1}{b^n}$	$-n+1\cdots -n$

$$\boxed{\log_b(n_1\cdot n_2)=\log_b n_1+\log_b n_2}$$

由 $l=\log_b(n_1\cdot n_2)$，$l_1=\log_b n_1$，$l_2=\log_b n_2$，得 $b^l=n_1\cdot n_2$，$b^{l_1}=n_1$，$b^{l_2}=n_2$，即 $b^l=b^{l_1+l_2}$，也就是 $l=l_1+l_2$。

对数第二定律：商的对数等于被除数和除数的对数之差。

$$\boxed{\log_b(n_1/n_2)=\log_b n_1-\log_b n_2}$$

由 $l=\log_b(n_1/n_2)$，$l_1=\log_b n_1$，$l_2=\log_b n_2$，得$b^l=n_1/n_2$，$b^{l_1}=n_1$，$b^{l_2}=n_2$，即 $b^l=b^{l_1-l_2}$，也就是 $l=l_1-l_2$。

【例】 $\log_3 1/17=\log_3 1-\log_3 17=-\log_3 17$。

对数第三定律：幂的对数等于幂的指数乘以底数的对数。

$$\boxed{\log_b(p^r)=r\log_b p}$$

由 $l=\log_b p^r$，$l_1=\log_b p$，得 $b^l=p^r$，$b^{l_1}=p$，即 $b^l=(b^{l_1})^r=b^{rl_1}$，也就是 $l=rl_1$。

【例】 1. $\log_b \frac{5^3x^2}{6^4}=3\log_b 5+2\log_b x-4\log_b 6$。

2. $\log_b b^r=r\log_b b=r\cdot 1=r$。

对数第四定律：根的对数等于被开方数的对数除以根指数。

$$\boxed{\log_b \sqrt[r]{w}=(1/r)\log_b w}$$

由 $l=\log_b\sqrt[r]{w}$，$l_1=\log_b w$，得 $b^l=\sqrt[r]{w}$，$b^{l_1}=w$，即 $b^l=w^{1/r}=b^{(1/r)l_1}$，也就是 $l=(1/r)\cdot l_1$。

【例】 $\log_b \sqrt[3]{\frac{q^5}{s^2}}=(1/3)(\log_b q^5-\log_b s^2)=\frac{5}{3}\log_b q-\frac{2}{3}\log_b s$。

对数系　在所有各种可能的对数系（底数 $b>1$）中，只有两种是常用的：自然对数和十进制对数。在高等数学中使用最多的是自然对数。它们是以超越数 e 为底的，e 的定义是极限 $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$，或无穷级数：

$$\boxed{e=2.7182818\cdots}$$

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots,$$

e 具有变量指数的幂构成指数函数e^x，它适用于描述与给定时刻出现的量成比例的增加或减少的各种事件，如放射性衰变、森林或人口的增长。实际上，十六和十七世纪的数学家们算出的第一批对数是属于这个体系的。通常用 ln 代替 $\log_e$：即 $\log_e x\equiv \ln x$。用于计算对数的级数给出了自然对数的各个值。十进制对数也叫常用对数，是以 10 为底的，它最早是布里格斯(Briggs)算出的。在实际计算中，它们的使用极为广泛，并用 lg 代

替 $\log_{10}$ 来表示这类对数。假如读者遇到符号 $\log x$，没有注明底数，在初等数学中可以认为其预期底数是10，在高等数学中认为是 e。在本书中采用的记法 $\lg x = \log_{10} x$ 已向国际推荐，并在逐步采用。常用对数的底数与数系的底数相同，依据这一点它的优点从整个数值来看是很清楚的（参看表）。这就是说，对于底数为10的对数只需要算出1到10之间的数，即只需要算出数的数字序列的对数。例如，当算出lg2.37=0.3747时，

数	对数
…	…
$1/10^3=10^{-3}$	-3
$1/100=10^{-2}$	-2
$1/10=10^{-1}$	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
…	…

也就同时算出了数23.7，2370，0.237，0.00237等，也就是值为2.37和10的某个幂的乘积的任何数的常用对数（见下表）。

由 lg 2.37=0.3747 导出的对数

数	转换	对数	首数
$23.7 = 10\cdot 2.37$	$\lg 10+\lg 2.37$	$\lg 23.7=1.3747$	1
$2370 = 10^3\cdot 2.37$	$\lg 10^3+\lg 2.37$	$\lg 2370=3.3747$	3
$0.237=1/10\cdot 2.37$	$\lg 1/10+\lg 2.37$	$\lg 0.237=0.3747-1$	-1
$0.00237=1/10^3\cdot 2.37$	$\lg 1/10^3+\lg 2.37$	$\lg 0.00237=0.3747-3$	-3

一个对数需要计算的实际数字3747称为对数的**尾数**，小数点前面的整数叫对数的**首数**。对于大于或等于1而小于10的数，其对数的首数值是0；对于10到99的数，首数值是1；一般地说，对于小数点前有 n 位数字的数，其对数首数值是 $n-1$。如果数是小于1的小数，则其首数是负数，首数的值表示小数点向右移至该数的第一个非零数字时走过的位数。

对于底数为 b 的对数，只要计算出1到 b 之间的各个数的对数值作为尾数；b 和 b^2 之间各数的对数首数是1等等。十进制对数的底数与数系的底数相同，其首数可直接读出。

从一个对数系到另一个对数系的转换。最简单的级数展开给出自然对数，但是在实际工作中要用常用对数，因此，这就需要从一个数 n 对于底数 a 的对数来计算同一个数对于另一个底数 b 的对数。假设 $l_a=\log_a n$

是已知的，而 $l_b=\log_b n$ 是需求的。设 $\bar{l}_a=\log_a b$ 是新系的底数 b 对于已知系的底数 a 的对数。按照幂的表示法，可以写出三个等式：

$$a^{l_a}=n;\quad b^{l_b}=n;\quad a^{\bar{l}_a}=b。$$

将第三个等式自乘到 l_b 次幂，即得

$$a^{\bar{l}_a\cdot l_b}=b^{l_b}=n=a^{l_a}，\text{也就是，}a^{\bar{l}_a\cdot l_b}=a^{l_a}\quad\text{即}\quad \bar{l}_a\cdot l_b=l_a。$$

这个关系称为**链式法则**。

链式法则	$\log_a b\cdot\log_b n=\log_a n$

假如自然对数为已知，则令 $a=e$, $b=10$, 便得到 $\ln 10\cdot\lg n=\ln n$。因此，常用对数可由自然对数乘以常数 $1/\ln 10=M_{10}$ 求得，M_{10} 称为**以 10 为底的对数的模**。

$\lg n=(1/\ln 10)\cdot\ln n=M_{10}\cdot\ln n$

$\ln n=\lg n/\lg e=\lg n/M_{10}$

$M_{10}=0.4342945\cdots$	$\lg M_{10}=0.6377843-1$
$1/M_{10}=\ln 10=2.3025851\cdots$	

另一方面，如果从一个已知常用对数表来计算自然对数，则在链式法则中应该令 $a=10$, $b=e$, 则得到 $\lg e\cdot\ln n=\lg n$。

实际上如果令 $n=10$, 立即可以看出 $\lg e=M_{10}$: 由 $\ln n=\lg n/\lg e$, 得 $\ln 10=1/\lg e$ 或 $\lg e=1/\ln 10=M_{10}$。

逆运算 加法和乘法各自有一个逆运算，即减法和除法，由 $s_1+s_2=s$ 得到 $s_1=s-s_2$ 或 $s_2=s-s_1$。同样，由 $f_1\cdot f_2=p$, 得 $f_1=p/f_2$ 或 $f_2=p/f_1$。但是，要想从一给定的幂 $r^q=p$ 来计算底数 r 及指数 q, 则要做两个不同的运算：**底数由根式 $r=\sqrt[q]{p}$ 求得，指数由对数 $q=\log_r p$ 求得**。对 $r^q=p$ 进行形式变换便可得到 $(\sqrt[q]{p})^q=p$, 这是根据根的定义；而等式 $r^{\log_r p}=p$, 这是根据对数定义。根作为乘方的逆运算时，**其指数一定要是有理数**；即当 $q=t/s$, t 和 s 为互质整数时，则 $r^{t/s}$ 可直接导出 $r^t=p^s$, $r=\sqrt[t]{p^s}$。但是如果 q 是无理值 α, 则根只能解释成是一个实指数的幂：$r=p^{1/\alpha}$。要计算一个无理指数 α 的幂 p 或根 r, 需利用对数。由 $p=r^\alpha$, 通过对两边取对数，比如说对底数 10，就可得到 $\lg p=\alpha\lg r$, 则有 $p=10^{\alpha\lg r}$; 或由 $\lg r=\lg p/\alpha$, 求得值 $r=10^{(\lg p)/\alpha}$。

除了底数为 b, 指数为该对数系的有理数幂以外，所有其他数的对数

都是无理数。例如，假如 $\log 2=t/s$ 是一个有理数，t 和 s 是互质整数，且 $s>t$，则由 $10^{t/s}=2$，即 $10^t=2^s$，或约简成 $5^t=2^{s-t}$，但这与整数分解成质因子的唯一性定理相矛盾。这个论证可以推广到任何底数 b 和任何整数 n，n 可以假定是在 1 和 b 之间。在方程 $b^t=n^s$ 中，矛盾在于：由于 $b>n$，b 一定还有一个除 n 以外的约数。

对数的应用　拉普拉斯 (Laplace) 就对数的发明曾说过："对数的发明将几个月的计算工作量缩短成几天的工作量，因此可以说，它无疑是延长了计算者的寿命。"

但是，对数的重要性并不全在于它使计算大大简化。对数的概念在高等数学的许多分支，例如在微积分学、微分方程中，在复变函数论、位势论和解析数论中都起着运算工具的作用。

在热力学中，一个物体或一些物体所组成的体系的熵是与热力学概率 W 的自然对数成正比的，即 $S=k\cdot\ln W$，这里 k 是普朗克-玻耳兹曼常数($k=1.380\cdot10^{-16}$ 尔格/度)。

在天文学中，星等(亮度) m 不是用射到人眼的能量来量度的，而是用能量的对数来量度的。这里 $m-m_0=-2.5\lg(I/I_0)$，式中 I_0 是 m_0 星等的辐射能，I 是 m 星等的辐射能。

【例】　如果太阳的绝对星等是 $M_0=+4.7$，而猎户星座中的参宿七的星等是 $M=-5.8$，即得 $-5.8-4.7=-2.5\lg(I/I_0)$，$10.5/2.5=4.20=\lg(I/I_0)$，即 $I/I_0\approx16000$，因此参宿七每秒钟辐射的能量约为太阳辐射能的 16000 倍。

这个定律可以看做是**韦伯-菲赫纳尔** (Weber-Fechner) **定律**的一个特例，韦伯-菲赫纳尔定律是说观察到的量与放射源强度的自然对数成正比的。换句话说，观察到的不是放射源强度的差而是商。

在测定气压的高度公式 $h-h_0=60370(\lg b_0-\lg b)$ 中，h_0 是已知高度，以英尺为单位，b_0 是此处气压计的读数，单位是英寸汞柱高，b 是另一处气压计的读数，该处的高度 h 是需求量。

【例】　测得飞机周围大气的压强是 17.60 英寸汞柱高，而地面气象站报告当地气压是 $b_0=22.15$ 英寸汞柱高，求飞机离开地面的高度。由于 $\lg b_0=1.3454$ 和 $\lg b=1.2455$，即得到 $h=60370\cdot0.1$ 英尺 $=6037$ 英尺，这就是飞机离开地面的近似高度。

复利公式 $b_n=b(1+p/100)^n$ 也可以**在生物学中**应用，例如，可用来

计算一个森林的木材量增长到某一值时所需的年数。这里 b 为开始时的木材量，b_n 为问题中的某一时期末的木材量，p 是每年增长的百分率。这个公式对按一定年百分率增长的有机体是普遍适用的。例如，在研究放射性物质时，发现在某一时刻出现的 n 个原子核中有 λn 个核衰变，λ 是 0 和 1 之间的一个数。因此有微分方程 $dn/dt=-\lambda n$，此式可以用变量分离法积分：$dn/n=-\lambda dt$，即 $\ln(n/n_0)=-\lambda t$，$n=n_0e^{-\lambda t}$，式中积分常数 n_0 是在时间 $t=0$ 时出现的原子核数。T 为半数原子核发生衰变所需的时间，称为半衰期；半衰期可由 $\ln(1/2)=-\lambda T$ 即 $T=(\ln 2)/\lambda$ 求得。

常用对数的计算

在实际运用中，**十进制对数，即常用对数**是极为重要的。对这一对数制进行的讨论已足够多了，因为将一个对数制变换成另一个对数制的关系是很简单的。上面已经证明过，**对数表**只需要列出 1 和 10 之间各数的值。在十进制中所有其他各数都可以用这些数中的一个和 10 的某次幂的乘积来表示。十的乘方的指数是整数，当幂大于 10 时，这个整数是正的；当幂小于 1 时，这个整数是负的。这个整数就叫作对数的**首数**。当数介于 0 和 10 之间时，首数为 0，它们的对数是介于 0 和 1 之间的小数。小数点后面的数字列称作**尾数**。

对数表 根据对数的无理值按四舍五入所截数字的数目，人们称为 4 位、5 位或 7 位对数。较多位数的对数很少使用，只是为了特殊目的才使用。表中最左边即**开头一行**列出数的头 2 个或 3 个或 4 个数字，也就是列出了从 10 到 99(4 位对数)，从 100 到 999(5 位对数)或从 1000 到 9999(7 位对数)的数字。在开头一行各数的后面是各个数的以 10 为底的对数尾数，尾数的第三、第四或第五个数字取 0 和 9 之间的适当值。在 5 位对数表中，很多尾数的头两个数字相同，例如对于值 lg 9.333 = 0.97002, …, lg 9.340=0.97035, …, lg 9.549=0.97996，共有 217 个尾数开头两个数字相同，都是 97！为了避免这些不必要的大量重复，人们将**这头两个共同数字写在独立一行**，放在以 0 开头的第四个数字那行的前面，只在**所有**尾数都以这两个数开头的一列的起始处写一次；在本例中(图 2.2-1)是写在 934 的右边。在此前面的尾数 002 到 030 部分写在 96 一档里，但是属于 97。因此在它们上面打有星号：*002 到 *030 (见图 2.2-1)；或用黑体字，或以其他方式表示出来。同样在 7 位对数表中，尾

930	848	853	858	862	867	872	876	881	886	890
931	895	900	904	909	914	918	923	928	932	937
932	942	946	951	956	960	965	970	974	979	984
933	988	993	997	002	*007	*011	*016	*021	*025	*030
934	97 035	039	044	049	053	058	063	067	072	077
935	081	086	090	095	100	104	109	114	118	123
936	128	132	137	142	146	151	155	160	165	169
937	174	179	183	188	192	197	202	206	211	216

图 2.2-1　5 位对数表的开头一行为 930 到 937 的各列

LOGARITHMS OF NUMBERS

x	0	1	2	3	4	5
50	.6990	6998	7007	7016	7024	7033
51	.7076	7084	7093	7101	7110	7118
52	.7160	7168	7177	7185	7193	7202
53	.7243	7251	7259	7267	7275	7284
54	.7324	7332	7340	7348	7356	7364
55	.7404	7412	7419	7427	7435	7443
56	.7482	7490	7497	7505	7513	7520
57	.7559	7566	7574	7582	7589	7597
	.7634	7642	7649		7664	7672
	.7709	7716	7723			7745

图 2.2-2　查 log 5.728 的尾数 0.7580

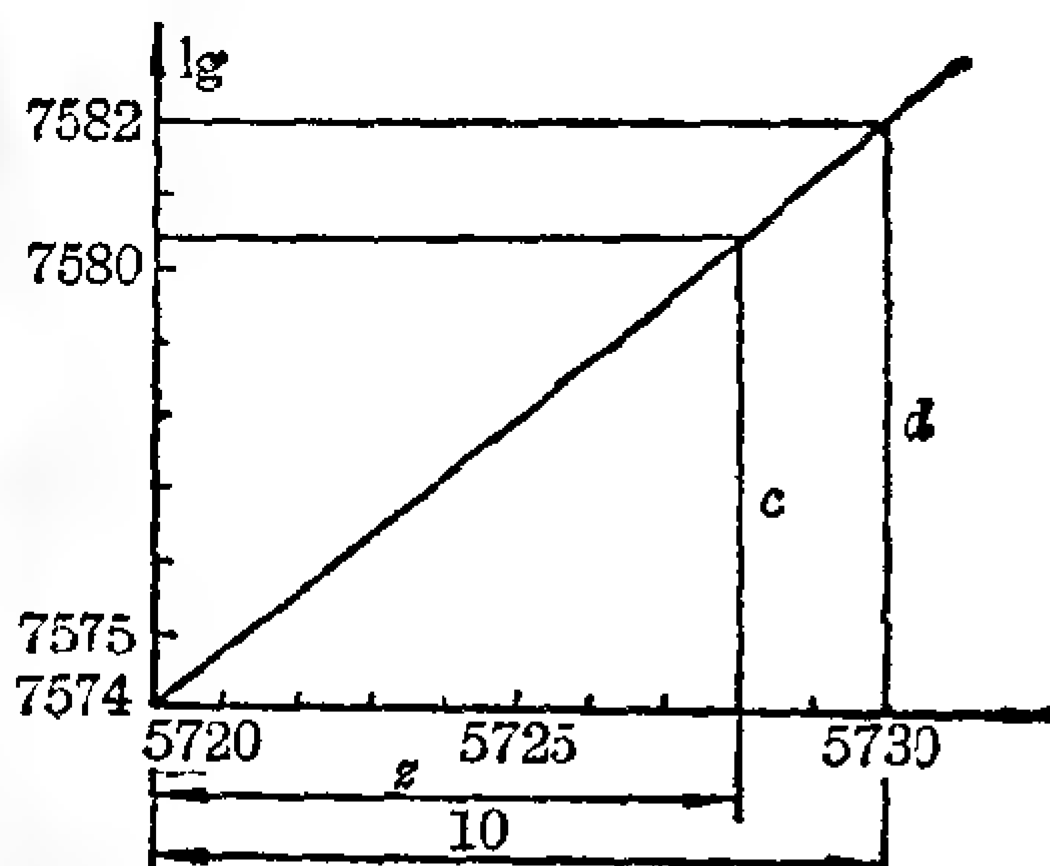


图 2.2-3　lg 5.728=0.7580 的尾数的图解插值

数的前三位数也提在前面。

数的最后一位数字 z 通常由线性插值法求得(见平方表一节)。将表的相邻尾数的差值 d 分成 10 等分 $d/10$，它的 z 倍 $z\cdot d/10=c$ 就是尾数的修正值。例如，lg 5.728 介于 0.7574 和 0.7582 之间(见图 2.2-2)，表的差值 d 是 $0.7582-0.7574=0.0008$，因为这个末位数字 z 是 8，因此尾数的修正值是 $c=z\cdot d/10=8.8/10=6.4\approx 6$,这就是小数点后第四位数的数字：$\lg 5.728=0.7574+0.0006=0.7580$(见图 2.2-3)。在 4 位对数表中 lg 5.7283 和上面的值相同，但在 5 位对数表中，它介于 $\lg 5.728=0.75800$ 和 $\lg 5.729=0.75806$ 之间，因此 $d=6$，$z=3$，所以 $c=0.6\cdot 3=1.8$，则得 $\lg 5.7283=0.75802$。当采用 5 位对数表时，lg 5.728342 的结果同上，因为数字 4 和 2 无法考虑进去。但在 7 位对数表中(见图 2.2-4)，得到 $\lg 5.7283=0.7580258$ 和 $\lg 5.7284=0.7580333$；因此表的差值 $d=75$，由表的有关部分得出数字 4 的修正值 $c_4=30$；对于 0.2，修正值 $c_{0.2}=$

1.5, 因此 42 的修正值 $c=31.5\approx32$, 所以得 lg5.728342=0.7580290。

28	758 0030	0106	0182	0258	0333	0409	0485	0561	0637	0712
29	0788	0864	0940	1016	1091	1167	1243	1319	1395	1470
30	1546	1622	1698	1774	1849	1925	2001	2077	2152	2228
5731	2304	2380	2456	2531	2607	2683	2759	2835	2910	2986
32	3062	3138	3213	3289	3365	3441	3516	3592	3668	3744

图 2.2-4 7 位对数表的开头一行为 5728 到 5732 的各列

如果已知对数, 要求相应的真数, 则除了从对数表上查得差值 d 外, 修正值 c 也是已知,下一位有效数字 z 可由 $z=10\cdot c/d$ 求得。

75		249	
1	7.5	1	24.9
2	15.0	2	49.8
3	22.5	3	74.7
4	30.0	4	99.6
5	37.5	5	124.5
6	45.0	6	149.4
7	52.5	7	174.3
8	60.0	8	199.2
9	67.5	9	224.1

【例 1】 $\lg n_1=0.5412$ 介于 0.5403 和 0.5416 之间, 因此 n_1 介于 3.47 和 3.48 之间; 这里 $d=13$, $c=9$, 因此 $z=90/13\approx7$; 结果 $n_1=3.477$。

【例 2】 $\lg n_2=0.50000$ 介于 $\lg 3.162=0.49996$ 和 $\lg 3.163=0.50010$ 之间; 这里 $d=14$, $c=4$ 而 $z=40/14\approx3$, 因此 $n_2=3.1623$。

【例 3】 $\lg n_3=0.2409357$ 介于 $\lg 1.7415=0.2409235$ 和 $\lg 1.7416=0.2409484$ 之间。这里 $d=249$, $c=122$, 由与此相应部分的表得出第六位数字 4, 因为 $4\cdot24.9=99.6$, 又因为 $122-99.6=22.4$, 所以第七位数字的值是 9, 即得 $n_3=1.741549$。

负首数通常是在小数点前面的数字上加一横(表示负号), 而不是写在数字的前面。例如, 由 lg2=0.3010, 得 $\lg 1/2=\lg1-\lg 2=-0.3010$; 这个数可以写成 $0.6990-1$ 或 $\bar{1}.6990$, 若由 lg 5=0.6990 出发, 因而有 $\lg0.5=0.6990-1=\bar{1}.6990$, 得出的结果相同。在三角函数对数表中有时采用另外一种方法, 这个方法避开负首数, 而是假定有一个 -10 的首

数写在对数的后面。按照这个表示法，$\lg 0.5 = 0.6990 - 1 = 9.6990 - 10$，表只写出前一个数9.6990。

【例1】 $\lg 0.723 = 0.8591 - 1 = \bar{1}.8591 = 9.8591 - 10$，写作9.8591。

【例2】 $\lg 0.00723 = 0.8591 - 3 = \bar{3}.8591 = 7.8591 - 10$，写作7.8591。

【例3】 要计算 $n = \dfrac{\lg 2}{\lg 1.03}$ 的值，由4位对数表得 $\lg 2 = 0.3010$ 和 $\lg 1.03 = 0.0128$。要求商 $n = \dfrac{0.3010}{0.0128}$，可以取对数：$\lg n = \lg 0.3010 - \lg 0.0128 = (0.4786 - 1) - (0.1072 - 2) = 0.3714 + 1 = 1.3714$。与此对数相应的数是 $n = 23.52$。在加一横的表示法中，计算方法为：

$$\lg n = \bar{1}.4786 - \bar{2}.1072 = 1.3714。$$

【例4】 计算 $\ln 2$ 的值。——由常用对数转换成自然对数的公式：$\ln 2 = (\lg 2)/(\lg e) = 0.3010/M_{10} = 0.3010/0.4343$。通过取对数得：$\lg(\ln 2) = \lg 0.3010 - \lg 0.4343 = \bar{1}.4786 - \bar{1}.6378 = \bar{1}.8408$。与此对数相应的数是 $\ln 2 = 0.6931$。

函数 $y = \lg x$ 的图象　列表写出所有正实数 x 的函数值 y。在笛卡尔坐标系中点出这些值，就得到函数 $y = \lg x$ 的曲线(见图2.2-5)。曲线与 x 轴交于点 $x_0 = 1$, $y_0 = \lg 1 = 0$。当 x 值由1下降到0时，曲线迅速下降，当 $x \to 0$ 时，曲线渐近于负 y 轴。当 x 值由1增加到10时，函数单调地由0增长到1。由于 $dy/dx = 1/(x \ln 10) = M_{10}/x = 0.4343/x$，所以曲线的切线和 x 轴之间的夹角 α 很小；而当 x 由1增加到10时，$\tan\alpha = dy/dx$ 由0.4343减小到0.04343。因为10到100之间各数的对数首数是1，所以在此十倍的间隔中函数增长的长度与1和10之间增长的量完

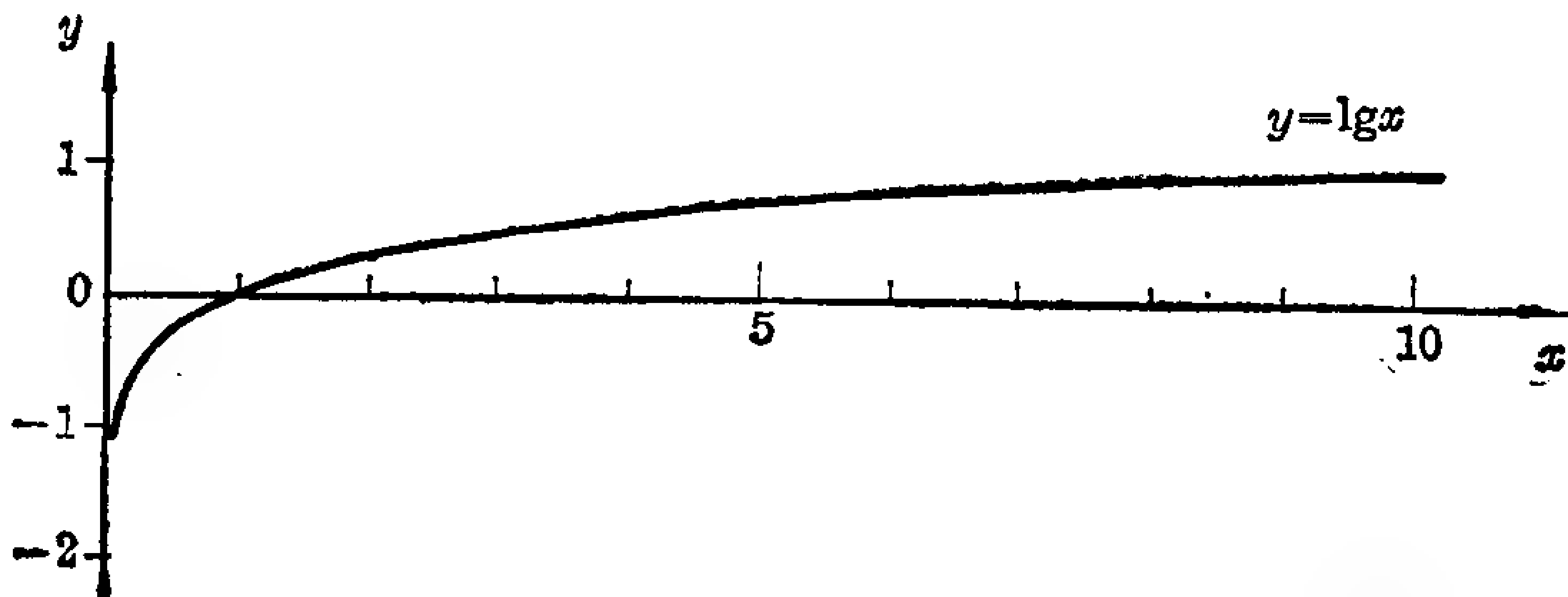


图2.2-5　函数 $y = \lg x$ 的图象

全相同，即 $\Delta y=1$。这对由 $x=1000$ 到 $x=10000$ 的间隔也同样适用。由此可见这个曲线与直线相差是很小的，从而证明在此情况下线性插值法是适用的。4 位对数表直接给出 100 和 1000 之间的各值，而 7 位对数表甚至给出了 10000 和 100000 之间的各值。

计算举例 下列数值表达式是以不同方法建立起来的。如果式中仅包含高级算术运算，可完全用对数法计算，也就是说，只靠查对数就得到最后结果。但是，如果式中含有和或差，则必需经过中间计算算出各个加数，然后求出它们的和。可能还会遇到要减去一个数的对数的问题。但在实数领域中不存在负数的对数。因此，人们通常采用这样的办法，特别是在三角计算中，即用符号 n（表示负数）或 p（表示正数）表示加于一个数上的运算，乘法常用的符号法则需作相应的改动：$(+)\cdot(-)=(-)$ 现在变成 $p+n=n$ 及 $(-)\cdot(-)=(+)$ 变成 $n+n=p$ 等。

首数和尾数。可用不同方法求得，但是只有把它们写在一起，才能代表对数的值。对于对数需进行的运算同样适用于首数和尾数的数字。例如，假如一个数 x 的对数值是 5.6，即 $\lg x=5.6$，此对数的一半是 2.8，因此 $\frac{1}{2}\lg x=\lg\sqrt{x}=2.8$，同样 $3\lg x=\lg x^3=16.8$。

在对小于 1 的正实数的对数应用这些显而易见的法则时，必须注意：这些数的对数是负值，记号与通常用法略有不同。在数轴上，不是由零向左直接到需求的数，而是走一个之字形，先越过此数到一个负整数处，然后再向右到达该数（见图 2.2-6）；例如，$-0.35=-1+0.65$，或 $-1.62=-2+0.38$。这个过程是因为在将有关数作小数展开时会出现 10 的幂而引起的；这就使得完全相同的一个数可以有几种不同的表示方式，例如，$-0.35=-2+1.65=-10+9.65$；$-1.62=-5+3.38=-20+18.38$ 等。这两例中的尾数是 65 和 38；首数包含有两个整数：一个是正数或零，另一个——通常写在第二位——是负数。在上面的例子中，首数是

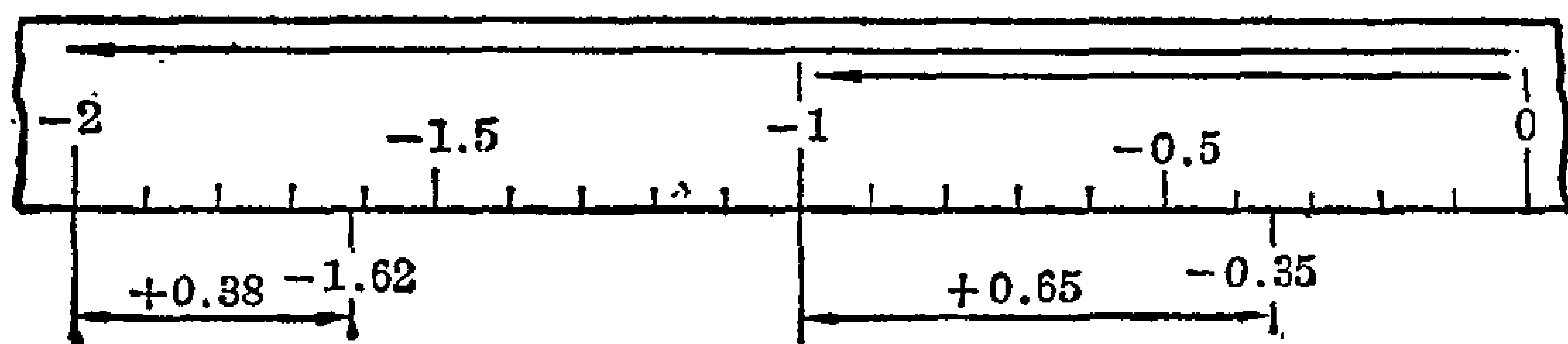


图 2.2-6 具有负首数的对数

$(0.\cdots-1)=(1.\cdots-2)=(9.\cdots-10)$ 和 $(0.\cdots-2)=(3.\cdots-5)=(18.\cdots-20)$。数的乘法、除法和乘方也就是将这些数的对数相加、相减和相乘，这是不难的，只要记住在查一个数时，要从小于此数的下一个负整数开始。在求根，也就是除对数时，我们必须这样做：选择适当的首数，使其能被根的指数除尽，以保证相除之后首数仍为整数。这总是可以做到的。

这些注意点同样适用于对数为负值的其他表示法，我们用 $\bar{k}.\cdots$ 代替 $0.\cdots-k$，并按常规方法进行算术运算，不过要记住 $\bar{k}$ 代表 $-k$。

【例1】 $x=\sqrt[3]{100}$,

$\lg x={}^1/_3\lg 100={}^1/_3\cdot 2={}^2/_3=0.6667$,

$x=4.642$。

【例2】 $x=\sqrt{0.2}$,

$$\begin{aligned}\lg x&={}^1/_2\lg 0.2={}^1/_2(0.3010-1)\\&={}^1/_2(1.3010-2)=0.6505-1\end{aligned}$$

或 $$\begin{aligned}\lg x&={}^1/_2(9.3010-10)\\&={}^1/_2(19.3010-20)\\&=9.6505-10,\end{aligned}$$

$x=0.4472$。

【例3】 $x=\sqrt[3]{1-(0.927)^5}$

$\lg 0.927=\bar{1}.9671$,

$5\lg 0.927=\bar{1}.8355$,

$(0.927)^5=0.6847$

$1-0.6847=0.3153$,

$\lg 0.3153=\bar{1}.4987$,

${}^1/_3\lg 0.3153=\bar{1}.8327$,

$x=\sqrt[3]{0.3153}=0.6807$。

【例4】 $x=\boxed{160.6}\cdot\boxed{0.2856}\cdot\boxed{0.006998}$

$=\boxed{a}\cdot\boxed{b}\cdot\boxed{c}$,

$\lg x=\lg a+\lg b+\lg c$。

在下面的表中，用纵线将数 N 与对数 lg 分开：

N	lg	
$a=160.6$ →	2.2057	+
$b=0.2856$ →	0.4558　−1	
$c=0.006998$ →	0.8450　−3	
$a\cdot b\cdot c$	3.5065　−4	
$x=0.3210$ ←	0.5065　−1	↓

【例 5】 $x=\boxed{0.07535}:\boxed{6.459}$
$=\boxed{a}:\boxed{b}$

$\lg x=\lg a-\lg b$

N	lg
0.07535 ⟶	0.8771 −2 ⟶ −
6.459 ⟶	0.8101
x=0.01167 ⟵	0.0670 −2

【例 6】 $x=\boxed{56.07}:\boxed{992.6}$
$=\boxed{a}:\boxed{b}$

$\lg x=\lg a-\lg b$

N	lg
56.07 ⟶	3.7488 −2 ⟶ −
992.6 ⟶	2.9967
x=0.05651 ⟵	0.7521 −2

【例 7】 $x=\boxed{0.002934}:\boxed{0.00008998}$
$=\boxed{a}:\boxed{b}$

$\lg x=\lg a-\lg b$

N	lg
0.002934 ⟶	1.4675 −4 ⟶ −
0.00008998 ⟶	0.9541 −5
	0.5134 +1
x=32.62 ⟵	1.5134

【例 8】 $x=\boxed{0.07440}^5$
$=\boxed{a^5}$

$\lg x=5\cdot\lg a$

N	lg
a=0.07440 ⟶	0.8716 −2 ⟶ ·5
a^5	4.3580 −10
x=0.000 002 281 ⟵	0.3580 −6

【例9】 $x=\boxed{16.24}^{\pi}$

$=\boxed{a}^{\pi}$

$\lg x=\pi\lg a$

$\lg(\lg x)=\lg\pi+\lg(\lg a)$

N	lg	lg	
16.24 →	1.2106 →	0.0830	+
π →	→	0.4971	
x=6353 ←	3.803 ←	0.5801	

【例10】 $x=\sqrt[5]{\boxed{0.009028}}$

$=\sqrt[5]{\boxed{a}}=\boxed{a}^{1/5}$

$\lg x=\frac{1}{5}\lg a$

N	lg	
0.009028 →	2.9556 −5	:5
x=0.3900 ←	0.5911 −1	

【例11】 $x=\sqrt[6]{\dfrac{\boxed{89.49}^{3.5}\cdot\sqrt{\boxed{0.006006}}}{\boxed{0.00001001}^{2}\cdot\boxed{3601000}^{4}}}=\sqrt[6]{\dfrac{\boxed{a}^{3.5}\cdot\sqrt{\boxed{b}}}{\boxed{c}^{2}\cdot\boxed{d}^{4}}}$

$\lg x=\frac{1}{6}[3.5\lg\boxed{a}+\frac{1}{2}\lg\boxed{b}-2\lg\boxed{c}-4\lg\boxed{d}]$

$x=0.01774$、

N	lg	运算	lg	
89.49 →	1.9517 →	·3.5 →	6.8310	
0.006 006 →	1.7786 −4 →	:2 →	0.8893 −2	
$a^{3.5}\sqrt{b}$			5.7203 →	17.7203 −12
0.000 010 01 →	0.0004 −5 →	·2 →	0.0008 −10	
3 601 000 →	6.5564 →	·4 →	26.2256	
$c^2\cdot d^4$			16.2264 →	16.2264
0.01 774 ←	0.2490 −2 ←	:6 ←		1.4939 −12

【例 12】 $x=\dfrac{\boxed{\sqrt[3]{\boxed{2934}}\cdot\boxed{1.843}^{2}}-\boxed{\boxed{11.55}\cdot\boxed{32.92}\cdot\boxed{0.8844}}}{\boxed{\boxed{4.321}^{3}\cdot\sqrt{\boxed{0.9428}}\cdot\boxed{0.010\,36}}}$,

$$x=\frac{\boxed{\sqrt[3]{\boxed{a}}\cdot\boxed{b}^{2}}-\boxed{\boxed{c}\cdot\boxed{d}\cdot\boxed{e}}}{\boxed{\boxed{f}^{3}\cdot\sqrt{\boxed{g}}\cdot\boxed{h}}}=\frac{\boxed{A}-\boxed{B}}{\boxed{C}}=-354.8,$$

N		N	lg	运算	lg	
	$\boxed{a}$	2934 →	3.4675 →	:3 →	1.1558	
	$\boxed{b}$	1.843 →	0.2655 →	·2 →	0.5310	
+48.62 ←	$\boxed{A}$ ←				1.6878	
	$\boxed{c}$	11.55 →	1.0626			
	$\boxed{d}$	32.94 →	1.5177			
	$\boxed{e}$	0.8844 →	0.9467−1			
−336.50 ←	$\boxed{B}$ ←		2.5270			
−287.88	$\boxed{A}-\boxed{B}$	→	2.4592n		→	2.4592n
	$\boxed{f}$	4.321 →	0.6356 →	·3 →	1.9068	
	$\boxed{g}$	0.9428 →	1.9744−2 →	:2 →	0.9872 −1	
	$\boxed{h}$	0.01036 →	0.0153−2 →	→	0.0153 −2	
	$\boxed{C}$				0.9093 −1 →	(0.9093−1)p
	x	−354.8 ←	2.5499n ←		←	(1.5499+1)n

历史简述 对数计算的来由清楚地表明了社会发展和数学发展之间的关系。通向印度的海路的发现是与天文、航海和三角的兴盛发展时期密切联系在一起的。数学是航海家必不可少的工具。随着贸易的进行，商业算法有了重大发展，在本文中主要是指**复利计算**。当时这两个领域都对职业计算家提出了特别要求；人们可以想象，天文学家开普勒(Johannes Kepler, 1571～1630 年)为了推导以他的名字命名的定律需要进行多么大量的计算。当时第一流的计算家们在寻求简化的计算方法，特别是在寻找算术级数和几何级数之间的关系，这就必须用加法来代替乘法。

数学家保尔·维特奇(Paul Wittich, 1555～1587 年)和克里斯托夫·克拉维斯(Christoph Clavius, 1537～1612 年)于 1593 年发表了一本书叫

《星盘》，他们在这本书中曾提出将两个小于1的正数 a 和 b 的乘法简化成加法，其办法是将它们看成三角函数值 $a=\sin\alpha$ 和 $b=\cos\beta$。根据加法定理(见 I. 第10章)：

$$\begin{array}{c} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \\ \hline \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos\beta=a\cdot b \end{array}$$

取 $a=0.61566$ 和 $b=0.93969$，他们得出 $\alpha=38°$ 和 $\beta=20°$，因此，$\alpha+\beta=58°$ 和 $\alpha-\beta=18°$，结果 $a\cdot b=\frac{1}{2}[0.84805+0.30902]=\frac{1}{2}\cdot 1.15707$ 即 $0.61566\cdot 0.93969=0.57854$。

数学家西蒙·史德温曾经做过荷兰军队的陆军军需兵司令兼军需局局长，他倡导过**印度-阿拉伯进位记法**，特别是**分数的十进位记法**。他制定过一些复利计算表，后来为乔斯·贝格(Jost Bürgi, 1552～1632年)继续完成，并由贝格于1620年在布拉格以《**算术和几何级数**》为书名发表。他从底数 $1.0001=1+1/10000$ 开始，这个底数的幂很容易计算，因为——按现在的话说——只需取二项展开式的少数几项就给出贝格提出的需求的10位精确度。这个底数的第10000次幂 $(1+1/10000)^{10000}$ 是2.71846，与数 $e=2.7182818\cdots$ 接近，e 的定义是极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$。因此，将这些指数除以10000就**近似地得出这些幂的自然对数**。在表的开头一行列出对数，而在现代用表的尾数的位置写着数本身(**反对数表**)。

甚至杰出的数学家耐普尔(Nepier)这位默吉斯顿庄园的第八代主人(1550～1617年)，在他1614年发表的著作《奇妙的对数规律的描述》中也只是部分地达到了他的目的。他所选用的函数，按现代的记法是 $y=ge^{-x_1/g}$，$g=1000000$。对于两个指数的和 $x=x_1+x_2$，这就得到 $y=ge^{-x_1/g}\cdot e^{-x_2/g}=y_1y_2/g$。在伦敦的数学教授亨利·布里格斯(Henry Briggs, 1556～1630年)很钦佩耐普尔，耐普尔和他一起决定采用函数 $y=10^x$。在耐普尔死后，布里格斯继续计算；1624年他的《对数算术》一书出版了，书中列出了由1到20000和由90000到100000各数的14位数对数。缺掉的对数被测量员欧兹奇尔·德·迭克尔(Ezechiel de Decker)和阿得连·滑拉克(Adrian Vlacq)算出，他们的第一部完整的对数表于1627年问世。

为了将反对数表转换成对数表，布里格斯利用了算术级数和它们的相关几何级数之间的关系，按照这个关系，对于两个数 a_1 和 a_2 的算术平均值必有相应的两个量 g_1 和 g_2 的几何平均值 $\sqrt{g_1g_2}$ 与之相对应。例如，在以 3 为底的幂的序列中，对于数 $2.5=(2+3)/2$。就有值 $\sqrt{9\cdot27}=9\sqrt{3}$ 与之相对应，因为 $3^{(2+3)/2}=\sqrt{3^2\cdot3^3}=\sqrt{9\cdot27}$。

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\\ 3 & 9 & 27 & 81 & \cdots\end{matrix}$$

选 10 为底数，并用 l_i 表示对数，用 n_i 表示幂的值，以此表示出算术级数的各项，我们就分别得到 $0<l_i<1$ 和 $1<n_i<10$ 间隔的一系列值：

$$l_1=\frac{1}{2}(0+1)=0.5 \qquad n_1=\sqrt{10}=3.162277\cdots$$

$$l_2=\frac{1}{2}(l_1+1)=0.75 \qquad n_2=\sqrt{n_1\cdot10}=5.623413\cdots$$

$$l_3=\frac{1}{2}(l_1+l_2)=0.625 \qquad n_3=\sqrt{n_1\cdot n_2}=4.216964\cdots$$

$$l_4=\frac{1}{2}(l_2+l_3)=0.6875 \qquad n_4=\sqrt{n_2\cdot n_3}=4.869674\cdots$$

$$l_5=\frac{1}{2}(l_2+l_4)=0.71875 \qquad n_5=\sqrt{n_2\cdot n_4}=5.232991\cdots$$

$$l_6=\frac{1}{2}(l_4+l_5)=0.703125 \qquad n_6=\sqrt{n_4\cdot n_5}=5.048065\cdots$$

$$l_7=\frac{1}{2}(l_4+l_6)=0.6953125 \qquad n_7=\sqrt{n_4\cdot n_6}=4.958067\cdots$$

$$l_8=\frac{1}{2}(l_6+l_7)=0.69921875 \qquad n_8=\sqrt{n_6\cdot n_7}=5.002865\cdots$$

上面列出八步得到 $\lg 5.002865=0.69921875$，这个方法指出如何利用反复求平方根的方法，最后可以将 $\log 5$ 的值计算到任意的精确度。

对数计算尺

历史简述 早在 17 世纪二十年代，埃德蒙·冈特（Edmund Gunter 1561～1626年）就指出了沿一刻度直线进行对数计算的原理。在他的尺上，乘法和除法借助一对除法器按长度的加和减来进行。过了不久，威廉·奥特雷得（1574～1660 年）利用了两条彼此可以相互滑动的冈特线，这样就不必再使用除法器了。他的线既有直线形也有圆弧形的。大约在 17

世纪中期，埃德蒙·温盖特 (Edmund Wingate, 1593～1656年) 和赛特·帕特里吉 (Seth Partridge) 采用了一个可在一固定木块的两个部分之间滑动的尺，这是一个与现代滑动计算尺相似的计算仪器。到19世纪计算尺最终定型了，19世纪末计算尺开始由工业大量生产。一些专用计算尺，例如供电工和商人用的，不久也随之产生了。

对数计算尺的结构　下图是表示科学家和工程师常用的一种类型的计算尺(见图2.2-7)。其他类型的装置略有不同，需在技术上作某些微小修正。一般说来，计算尺的尺长为25厘米。

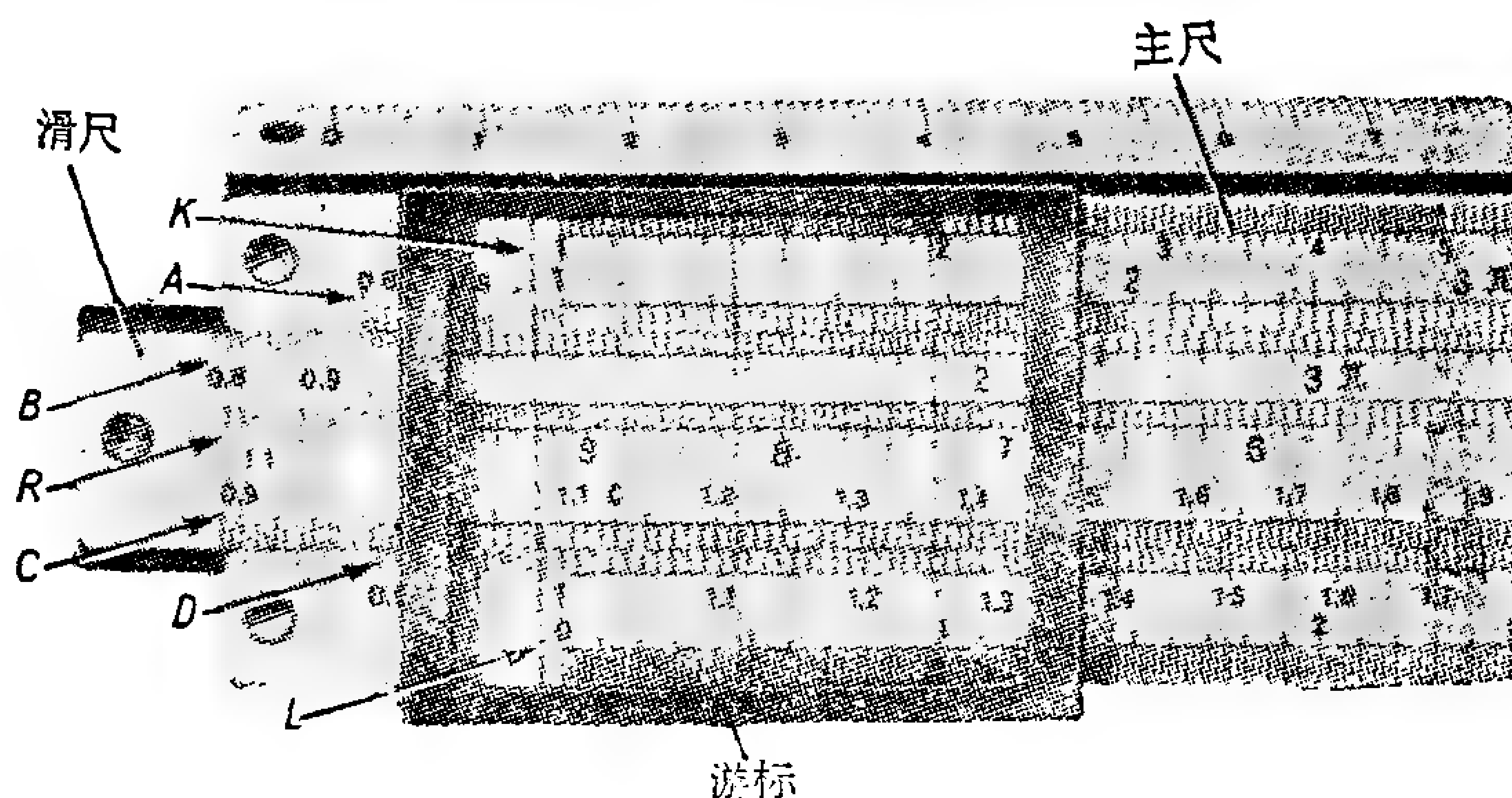


图2.2-7　对数计算尺

计算尺由三个部分组成：*主尺、滑尺和游标*。主尺包括A尺、D尺和K尺(通常还有其他尺)。滑尺在主尺的槽里移动。滑尺的正面标有C尺、R尺或CI尺和B尺，背面是三角函数尺及其他。游标上有一条或三条竖直线，可在主尺和滑尺上移动。一般采用中间一条竖直线，其他两条线在计算圆面积和圆柱体积时要用到。

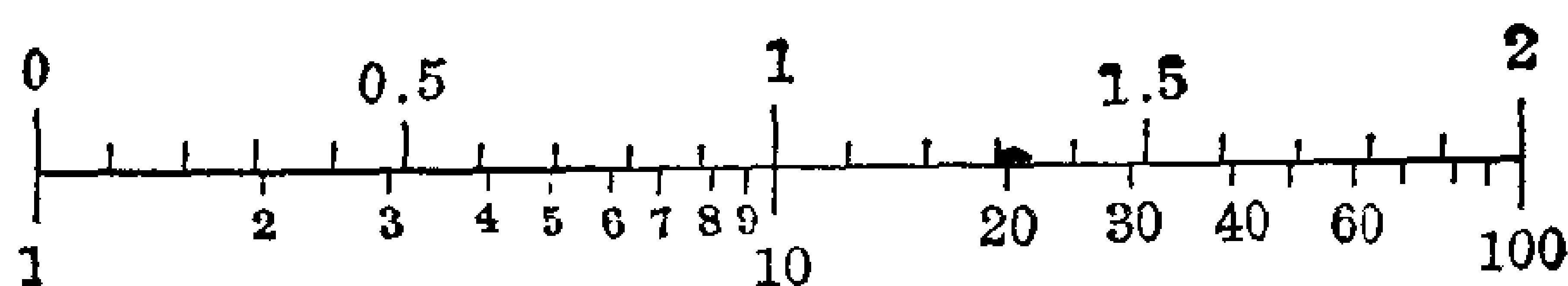


图2.2-8　上面是对数尺度，下面是线性尺度即普通尺

计算尺的标度 计算尺的标度与函数 $y=\lg x$ 有关。在对数标度尺上，刻标度数字的位置离开原点的距离与这些数字的对数成比例。**基本对数尺** C 和 D 涉及的数是 1 到 10。尺上特定点离原点的距离是通过相应数的对数乘尺的长度(250 mm)求得的。例如，从起始点 1 到点 2 之间的距离是 $\lg 2\cdot 250\ \mathrm{mm}=75.3\ \mathrm{mm}$。对数不是均匀上升的，因此对数尺的刻度也不是均匀分布的(见图 2.2-8)。我们看到，随着数的增长，它们之间的距离越来越小。

刻度尺 A **和** B 也是对数尺，它们是由等长的两个部分组成。数 1 和 10 之间的距离是 C 和 D 尺上的一半。在 D 尺上表示长为 $\lg n$ 的部分与 B 尺上表示长为 $2\lg n=\lg n^2$ 的部分相对应。这意味着，尺 A 和 B 上的数是它们下面的 C 和 D 尺上的数的平方。

与此相类似，由三个等长部分组成的 K **尺**，给出了 D 尺上数的立方。

L **尺**，通常在尺的最下方，或在滑尺背面中间，它不是对数尺，而是直接给出其上方数字的常用对数的尾数。

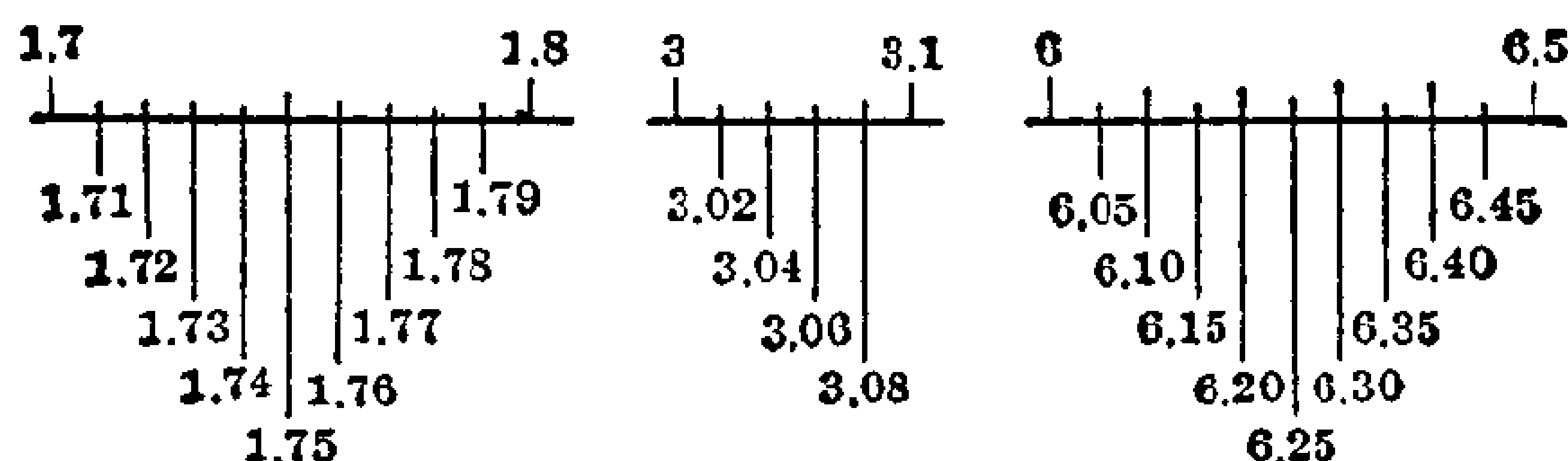


图 2.2-9 计算尺的各种分刻度

CI **尺或** R **尺上的数**是 D 尺上数字的倒数。它的刻度与 D 尺相同，但是它的数字顺序与 D 尺相反是从右向左，对于 D 尺上的每一个 x 值，它都给出倒数 $1/x$。

读数和定位。在计算尺上可以读到三位数字。读头两位数字几乎没有什么困难，并不比读一根直尺上的数字困难。读第三位数字是件麻烦事。不均匀的标度需要用不均匀的分度法。

假如我们研究一下 D 尺，就会发现有**三个部分**：第一部分是在 1.00 和 2.00 之间。两相邻的两位数之间有九条刻度线；例如，1.00 下面有 1.01, 1.02, …, **每个分刻度占十分之一**(见图 2.2-7)。

第二部分在 2 和 4 之间，**每个分度分为五份**。在两位数的两邻两刻

度线之间有四条分刻度线，每两条分刻度线之间的距离相应于第三位数的两个单位。例如，2.00下面有2.02，2.04，…，由于越向右面数之间的距离变得越小，所以在第三部分，即4和10之间，每个刻度只能分成两份，每两刻度线间的距离相应于第三位数字的五个单位。

在读数和定位过程中可借助游标上的中间刻度线的帮助。将此线准确地放在需要进行计算的数上或正好算得的数上，更为详细的用法请看下面的计算尺使用说明。假如你想在两刻度线之间定位，只有靠估计。

计算尺的使用　正如所有对数计算一样，都有一个确定首数的问题，因此每次用计算尺计算时都要作一**粗略估计**，即近似计算出10的幂，以确定小数点前面数字位数。粗略计算是可取的，因为它不仅给出正确的数字位数，而且是对结果的某种检验。用计算尺计算就是对线段的几何加减。利用A，B和K尺，可以将一个线段扩大两倍或三倍，或者将线段分成两等分或三等分。下面举几个例子。

乘法。乘法是依据法则$\lg(a\cdot b)=\lg a+\lg b$来进行的。两个对数相加在计算尺上就是长为$\lg a$和$\lg b$的两个线段相加。将滑尺CQ的起始点1放在主尺D的$a$点处，然后将游标放在C尺的$b$点处，在下面的D尺上就读出乘积$a\cdot b$(见图2.2–10)。

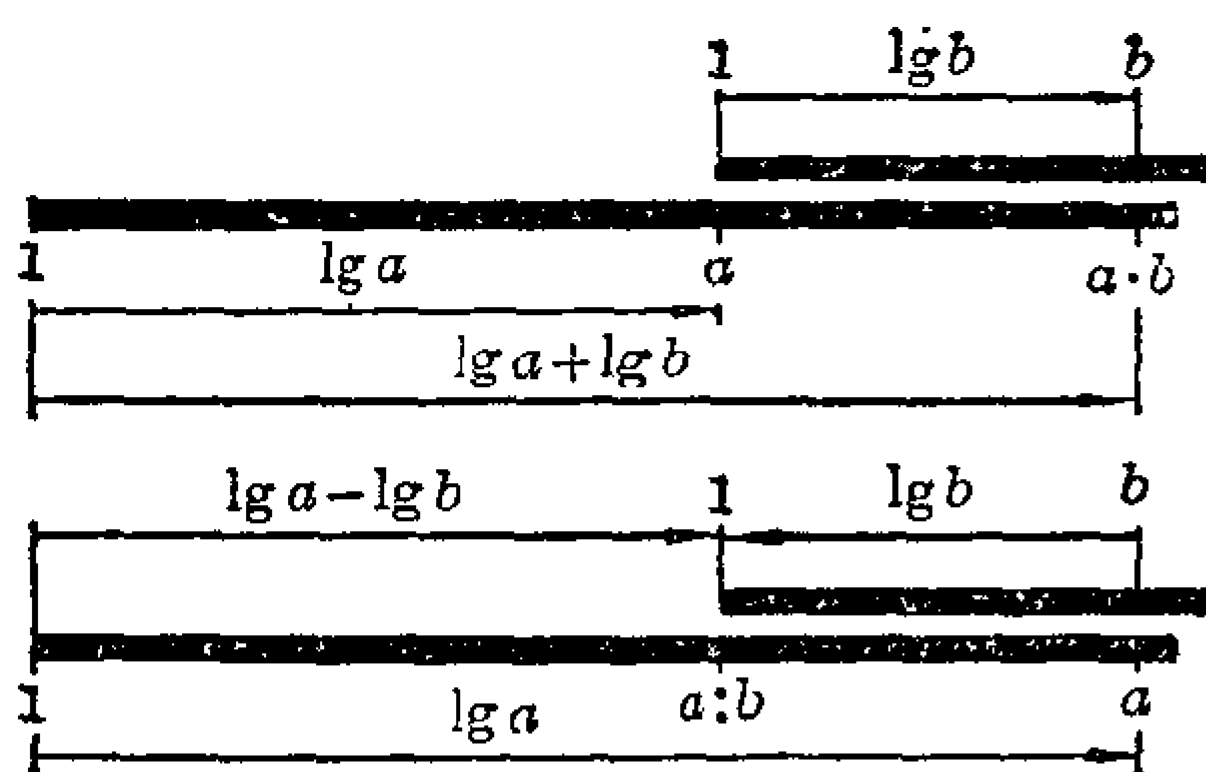


图2.2–10　乘法和除法示意图

【例1】　计算2·1.5。将C尺上的1放在D尺上的2上，在C尺的1.5下面的D尺上读出乘积3(见图2.2–11)。

【例2】　计算2.84·4.55。粗略估计：3·4=12。单凭这个数字就表明在D尺上不再能读出结果。这时可按如下办法进行：在D尺上找出2.84的位置，向左移动尺，将C尺的端点10放在D尺的2.84点上面。再

将游标放在C尺的4.55点处，在下面D尺上读得乘积的值

$$2.84\cdot4.55=12.9。$$

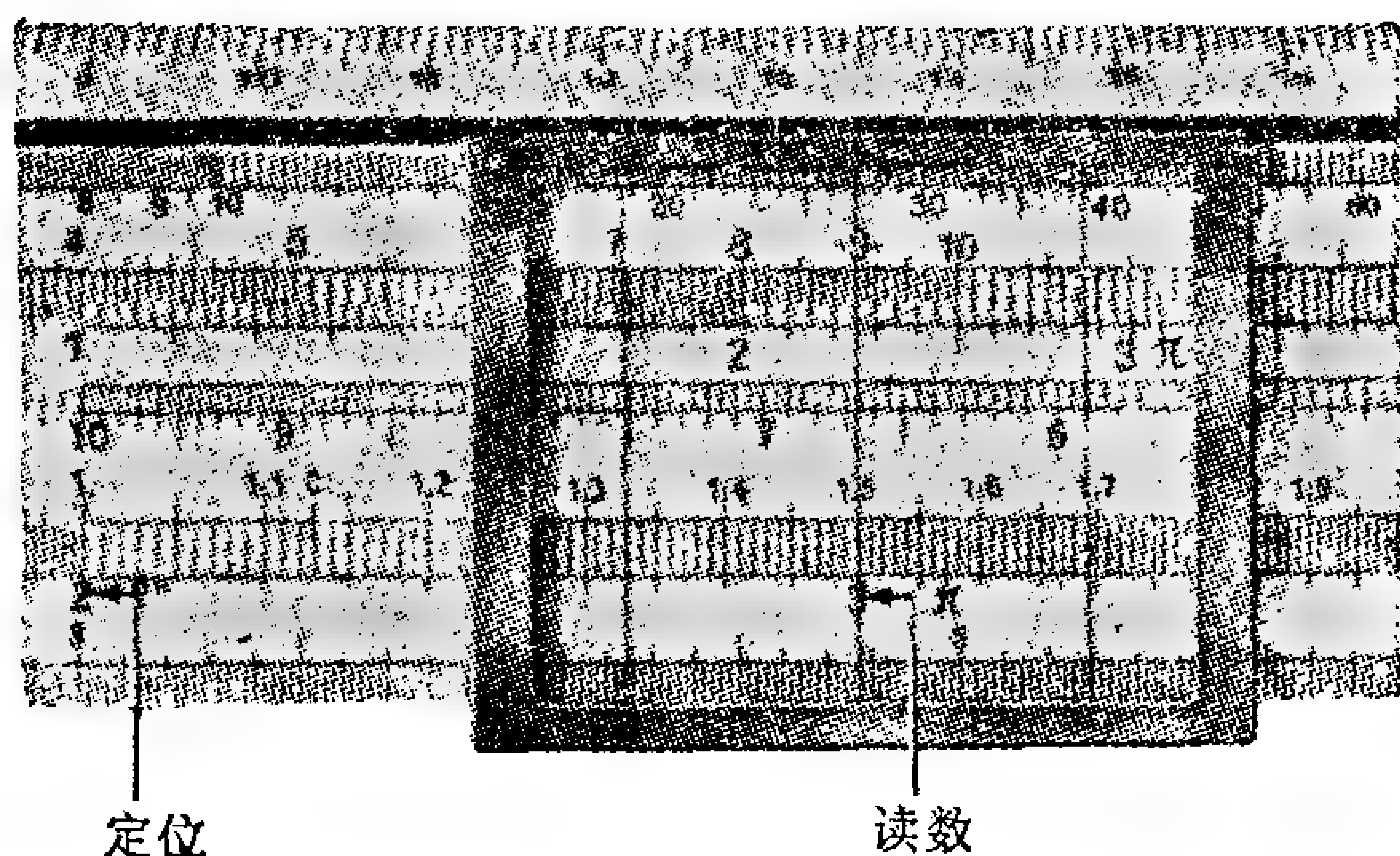


图 2.2-11　用计算尺做乘法的例子：$2\cdot1.5=3$

在尺A和B的左边的两个部分进行同一计算就可以对乘法的这一方法作出说明。其结果是落在右边部分。

在做乘法时，将滑尺的1或10放在一个因子处，便在另一个因子处读出结果。

除法。除法的有关定理是 $\lg(a/b)=\lg a-\lg b$。在计算尺上就是从长为 $\lg a$ 的线段上减去长为 $\lg b$ 的线段。将滑尺上C尺的 b 点放在主尺上D尺的 a 点上，然后在C尺的起点或端点10下面的D尺上读出商 a/b。

【例1】　计算88.5:0.515。粗略估计：90:0.5＝180。将C尺的0.515点放D尺的88.5点的上面，在C尺的始点1下面的D尺上求出商172＝88.5:0.515。

【例2】　计算19.2:89。粗略估计：20:90＝0.2。计算步骤如上，但是商是在C尺的末端10的下面读出的。解为：19.2:89＝0.216（见图2.2-12）。

在做除法时，将滑尺上的除数放在主尺上的被除数处，其结果在滑尺的始端1或末端10处读出。

在计算形为 $(a_1\cdot a_2\cdots)/(b_1\cdot b_2\cdots)$ 的表达式时，乘除可交替进行，以便尽量少地移动滑尺。在计算形为 $y=(a\cdot c)/b$ 的算式时，先算 a 除以 b，然

后再乘以 c。这样做只需要对滑尺作一次定位，如果先做乘法 $a\cdot c$ 然后再除以 b，这样需对滑尺作两次定位。在按照所述方法计算 y 时，可能会发生这样的情况，即滑尺上 b 的位置超出主尺的刻度范围。这就需要再次移动滑尺，因而增加了一次微小误差。因此最好利用平方尺来解这类表达式。

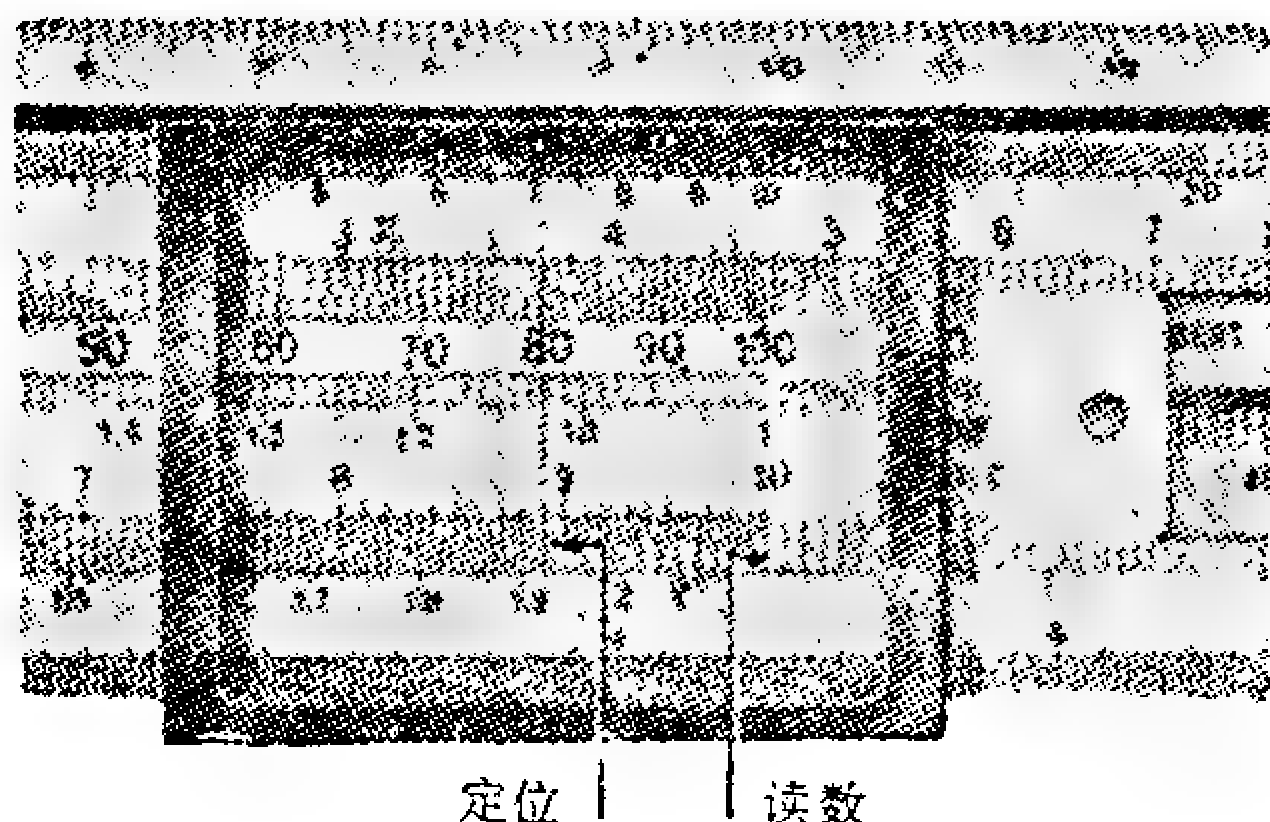


图 2.2-12 计算尺做除法：19.2:89=0.216

倒数尺的应用。倒数尺 R 及 CI 给出了 C 及 D 尺上的所有数的倒数；例如，在 C 尺 4 的上方可以找到其倒数 0.25。这个尺可以用于乘除。应该看到 $a\cdot b=a:b^{-1}$，乘一个数可以用除以它的倒数来代替。

【例】 计算 4.8·3.6。粗略估计 5·3=15。将 R 尺上的 3.6 放在 D 尺上的 4.8 处，在 R 尺始端 1 下面的 D 尺上读得结果 4.8·3.6=17.28。

平方数和平方根。前面已经说过，A 和 B 尺上的数是 C 和 D 尺上相应数的平方。要求一个数 a 的平方，只要将游标的刻线放在 D 尺上数 a 处，在此数上方的 A 尺上读得数 a^2（见图 2.2-13）。在求平方根时，过程相反：将游标的刻度线放在 A 尺上的被开方数 b 处，在此数下方的 D 尺上读得平方根。在求根时，必须注意 b 在平方尺上的正确定位：$\sqrt{25}=5$，25 要定位在 10 和 100 之间。$\sqrt{250}=15.81$，25 要定位在 1 和 10 之间的部分，因为

$$\sqrt{250}=\sqrt{2.5\times100}=10\cdot\sqrt{2.5}。$$

1 和 100 之间的被开方数可直接定位，其他被开方数要通过乘上 100 的适当次幂化为 1 和 100 之间的值。

立方数和立方根。在 K 尺上可以求得 D 尺上数的立方。立方数和立方根的计算与平方数和平方根的计算方法相同。

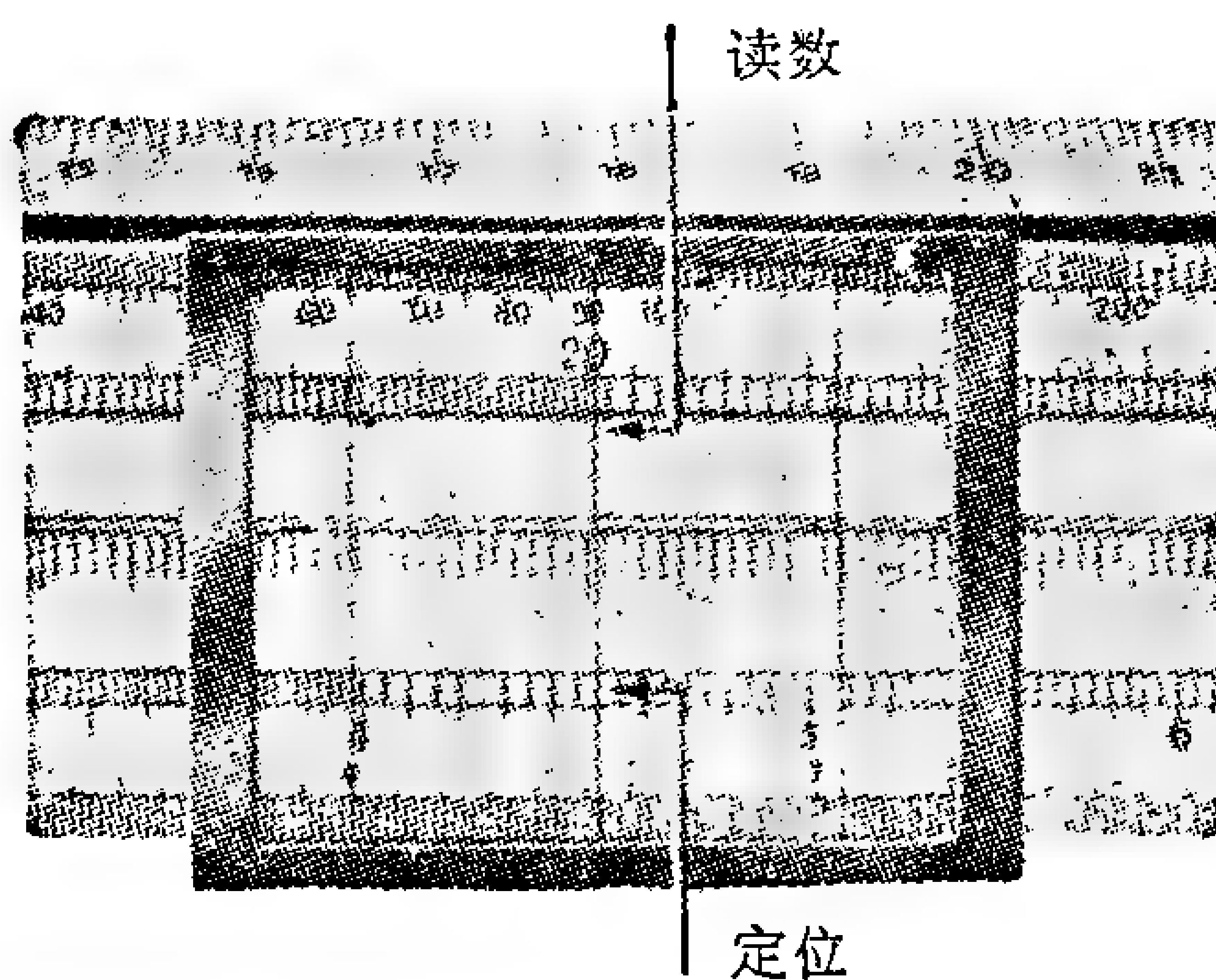


图 2.2-13　求平方数的例子：$4.5^2=20.25$

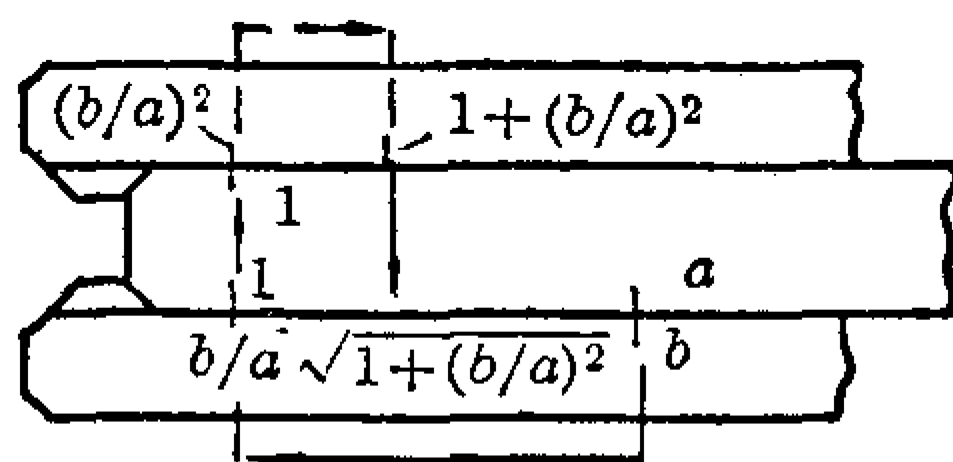


图 2.2-14　计算$\sqrt{1+(b/a)^2}$时滑尺的位置

计算$c=\sqrt{a^2+b^2}$。这类表达式是常见的。我们假定$b<a$，这个计算可按如下法则进行：

$$c=a\sqrt{1+(b/a)^2}。$$

计算步骤如下：利用 C 和 D 尺计算b/a，在平方尺上读出$(b/a)^2$，通过心算加 1，再在平方尺上定出$1+(b/a)^2$的位置，在 D 尺上读出$\sqrt{1+(b/a)^2}$，最后再乘以a。图 2.2-14 表示的就是这个过程（见图 2.2-14）。

三角尺、毕达哥拉斯尺和指数尺。一般说来，滑尺的背面还有几个算尺：适用于从 34.5′ 到 6° 小角度的**正弦和正切尺**，因为在这样的角度范围内，正弦和正切尺近似相等；适用于 5°45′ 到 90° 的**正弦尺**；**正切尺**，可用来计算正切和余切，这个标尺从左向右相应于角度从 5°45′ 增至 45°，从右向左相应于角度由 45° 增至 84°15′。**毕达哥拉斯尺**记有$\sqrt{1-x^2}$的值，并可计算余弦值。指数标尺需化很大笔墨作进一步说明，这里受篇

幅限制不提了。它适用于很多特殊计算。这里我们讨论了计算尺的基本原理，计算尺的各种现代改进设计为更复杂的数值计算提供了方便。

计算准确度。计算尺的应用要受到所得结果的准确度的限制。在长25厘米的计算尺上，仔细阅读，误差可达0.1%左右。对于12.5厘米长的尺，读数误差要加倍。根据高斯的误差传播定律，在计算过程中多次定位会增加平均误差。四次定位会使误差增至0.2%左右。因此，即使简单计算也应多次重复，将所得结果取平均值。

计算盘。在这个仪器上，对数标度不是刻在一条直线上，而是在一个圆上。*在计算轮中*，这些标尺是刻在几个同心圆盘面上，圆盘之间可彼此滑动。计算尺做成这样的特殊形式有其优点，尽管尺的线度较小，但标尺的长度较大，且可避免对滑尺的移动，因为一个尺的各部分都是另一个的相对部分。这些优点提高了计算精确度。

既然增加标尺的长度可以得到较大的精确度，因此，可将*计算标架*的刻度尺分成较小的部分，并将各部分彼此平行地安排在一个平面上。在*圆柱形计算器中*，标尺的各个部分是沿着圆柱的表面排列的。这种计算器已有成品。利用圆柱计算器所得结果与用5位对数表算得的结果有相同精确度。

现在已出现很多种供特殊用途的专用计算尺，例如，有利用电子学、水力学、水泥建筑、测量学、航行学和光学的某些公式制成的计算尺。总而言之，计算尺仍然是科学和工程、商业和工业上进行计算的主要工具之一。

第3章　数系的扩展

3.1　自然数集 N ……………105
3.2　绝对有理数、分数………108
3.3　有理数域 Q ……………111
3.4　整数集 Z ………………113
3.5　实数域 R ………………114
3.6　连分数 …………………117
3.7　复数域 C ………………120

不需要做简单计算的行业是没有的。人们在计算中使用数是想定量地去认识与驾驭世界，但是只有掌握了算术运算的计算法则，有关数的一些普遍有效的命题才能建立在算术运算的基础之上。在人类发展史上，由千百万次实践所积累的经验，使人们能将计算法则归结为少数逻辑上的基本概念与公理。用演绎法建立数系的基础是集合论与数理逻辑。在这个基础上首先构造自然数，然后进一步构造出其他的数。

3.1　自然数集 N

自然数的本原既是基数(计数的数)也是序数(位置的数)。不过在下文中，基数与序数将不加区别。

皮亚诺公理　早在1891年，皮亚诺(Peano)就证明自然数的一切性质都可以从下面五个公理推出(这些公理现在用他的姓氏来命名)：

皮亚诺公理体系：

1. 0是一个数。
2. 任一数 n 总有一个后继数 n'。
3. 0不是任何数的后继数。
4. 不同的数有不同的后继数。
5. 如果某一个自然数的集合包含数0而且凡包含一个数时必包含它的后继，则该集合必定是一切自然数的集合。

按照这些公理，每一个不等于0的自然数可以看作是一个后继，或者是0的后继的后继的……后继。但是，我们不用0, $0'$, $0''$, …的记法而简单地采用十进位制记数法，记为0, 1, 2, …。特别是其中的第五条公理，给出了数学归纳法合理性的依据。

数学归纳法 这种推理方法是用来证明一个涉及自然数n的命题$P(n)$对一切自然数都成立。现举一例：等式$1+2+4+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$对一切自然数均成立。在用数学归纳法作为一种证明方法时需要考虑使$P(n)$为真的一切自然数的集合M。如果人们能够证明 1) $0\in M$，即对$n=0$命题为真(*归纳法的基础*)；2) 由$n\in M$可推出$n'\in M$，即如果命题对任意自然数n成立(*归纳假设*)，必然意味着它对n的后继n'也成立(*归纳步骤*)，则根据皮亚诺的第五条公理，M应当是全部自然数的集合。对上面的例子来说，$P(0)$显然为真(因为$1=2-1$)，现在假定该命题对自然数n成立，则必然有

$$1+2+4+\cdots+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2^{n+1}(1+1)-1$$
$$=2^{n+2}-1,$$

也就是说，这表明对自然数$n+1$来说，命题也是成立的，因而命题对一切自然数都成立。

数学归纳法不仅象上述那样可用来证明定理，而且也可用来定义与构造数学对象。这类定义与构造是以*递归*方式(即一步一步地)进行的，每一步需要用到前面的一步。戴德金(Dedekind)在他的"合理性定理"中证明，采用这种步骤是不会导致逻辑混乱的。

自然数集 N 中的计算 加法被定义为$m+0=0+m=m$，$(m+n')=(m+n)'$，乘法被定义为$m\cdot 0=0\cdot m=0$，$m\cdot n'=m\cdot n+m$。加法和乘法通过这些*递归式定义*被唯一确定。于是，计算规则可以从数学归纳法导出：

交换律	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
分配律	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	

例如，加法结合律的证明可以如下进行：对$c=1$，命题为真(归纳法基础)；事实上，我们有$(a+b)+1=(a+b)+0'=[(a+b)+0]'=(a+b)'=a+b'=a+(b+1)$。现在假定对$c=n$命题为真(归纳假设)，即$(a+b)+n=a+(b+n)$；则需要证明命题对$c=n+1$也为真(归纳步骤)。既然$(a+b)+n'=[(a+b)+n]'=a+(b+n)'=a+(b+n')$；故命题确是对$n+1$也成立。根据皮亚诺第五公理，于是我们得知：一切自然数都满足结合律。

项数超过两项的运算可用数学归纳法来定义。例如，

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+a_n,$$
$$a_1\cdot a_2\cdots a_n=(a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1})\cdot a_n。$$

在和或积中可以随意加入或移去括号，这可再次用数学归纳法加以证明。

两个数 a 与 b 的减法与除法被定义为加法与乘法的逆运算：若对给定的数 a 与 b，存在着一个数 x，使 $a+x=b$，则 $x=b-a$ 就是 b 与 a 的差；如果它存在的话，它就是唯一确定的。若对给定的数 $a\neq 0$ 与 b，存在着一个数 y，能使 $a\cdot y=b$，则 $y=\frac{b}{a}$ 就是 b 与 a 的商；如果它存在的话，它也是唯一确定的。当然，作为一条规则来说，对任意给定的自然数 a 与 b，这类 x 或 y 不一定存在，例子 $3+x=2$ 或 $3\cdot y=2$ 表明了这一点。

在自然数范围内，减法与除法不一定都能实行。

想取消这些限制，就导致了新的数系的形成。

乘方。对于数 n 与非零数 a，幂 a^n 可再次由递归式定义来引入，即 $a^0=1$，$a^{n'}=a^n\cdot a$。幂的一些标准运算规则（见 I. 第 2 章）对幂的乘法与乘方运算都适用，只要商存在，则也适用于幂的除法。然而，乘方这种运算既不满足交换律也不满足结合律，如下面的例子所表明的那样：$3^2=9$，但 $2^3=8$；$(3^2)^3=9^3=729$，但 $3^{(2^3)}=3^8=6561$。

根与对数。如果对于给定的数 a 与 $n(n\neq 0, 1)$，存在一个数 b，使 $b^n=a$，则 b 叫作 a 的 n 次根，并记为 $b=\sqrt[n]{a}$。如果对于数 b 及 $a\neq 0$ 存在着一个数 n，使 $a^n=b$，则 n 叫作以 a 为底的 b 的对数，并记为 $n=\log_a b$；例如，$5=\sqrt[3]{125}$，$6=\log_2 64$。

算术运算小结

第一类：加法与作为其逆运算的减法；

第二类：乘法与作为其逆运算的除法；

第三类：乘方与作为其逆运算的开方及取对数。

后继关系已为相邻数目之间提供了**先后次序** $n'>n$。对任意两个自然数 a 与 b，如果存在着一个自然数 $c\neq 0$，使 $a=b+c$，则我们就说关系 $a>b$，或 $b<a$ 成立；可以证明，这样定义的关系是一种非自反的序（见 II. 第 1 章）。它满足加法与乘法的单调性法则和阿基米德公理。

自然数加法与乘法的单调性法则：如果 $a>b$，c 为任意数，$d\neq 0$，则 $a+c>b+c$，$a\cdot d>b\cdot d$。

阿基米德公理：对任意的 b 及 $a>0$，必有一个数 n，使得 $a\cdot n>b$。

可以证明，对于任意两个相异自然数，要末 $a>b$，要末 $b>a$，因此关系“$>$”在自然数范围内是全序(或线性序)且是*阿基米德序*。

对自然数之间的运算，通常的规则是适用的，假定出现在下面例子中的所有运算都可以实行：

$$a+(b-c)=(a+b)-c=a+b-c=a-c+b,\quad (a\cdot c):(b\cdot c)=a:b,$$

$$a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c=a-c-b,$$

$$(b-c):a=(b:a)-(c:a),$$

$$a-(b-c)=(a-b)+c=a-b+c=a+c-b。$$

由序的性质可以证明，当 $a>1$，幂 a^n 构成一个单调递增数列，而且根与对数(如果它们存在)是唯一确定的。

3.2　绝对有理数、分数

将一个整体分为若干份并加以度量的过程需要一种数系，在这种数系中不仅有关自然数的一些运算得以进行，并且可以不受限制地进行除法运算。在一个扩展了的系统中，原范围里的一些运算规则要求尽可能仍然保持有效，这种公设称为*因袭原理*。

扩展系统的构造　把自然数 m 与 $n\neq 0$ 形成一个有序数对，并写成分数形式 $\frac{m}{n}$。如果 $mq=np$，则称两个记号 $\frac{m}{n}$ 与 $\frac{p}{q}$ 是相等的，并记为 $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$。例如，因为 $3\cdot 2=6\cdot 1$，故 $\frac{3}{1}=\frac{6}{2}$。这一等式满足等价关系的条件。于是，所有相等的分数可归为一类，例如 $\left\{\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \cdots, \frac{150}{50}, \cdots\right\}$，而每一个分数属于一类。这些类叫作*绝对有理数*。而每一个这种有理数都可以用它这一类中任意一个分数来表示；例如，$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{6}$，$\frac{30}{45}$ 都是同一个绝对有理数 $\alpha=\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \cdots, \frac{18}{27}, \cdots, \frac{30}{45}, \cdots\right\}$ 的代表。但最好用一个分子与分母没有大于1的公约数的既约分数来表示。对上面的例子来说，也可以记为 $\alpha=\left\{\frac{2}{3}\right\}$。这里用花括弧使类区别于类的代表。

算术运算与顺序　人们按照分数的规范法则来定义绝对有理数的算术运算及其法则，定义的选择要使得扩展后的数系具有为千百年来的计算实践所证明了的性质。象 $\alpha=\left\{\frac{m}{n}\right\}$ 与 $\beta=\left\{\frac{p}{q}\right\}$ (其中 $n\neq 0$, $q\neq 0$)这样

一些数的第一类与第二类运算可以用下列方式加以定义：

$$\alpha+\beta=\left\{\frac{mq+pn}{nq}\right\};$$

例如，
$$\left\{\frac{2}{3}\right\}+\left\{\frac{10}{7}\right\}=\left\{\frac{2\cdot7+3\cdot10}{3\cdot7}\right\}=\left\{\frac{44}{21}\right\}。$$

$$\alpha-\beta=\left\{\frac{mq-np}{nq}\right\},\quad 假定\quad mq\geqslant np。$$

$$\alpha\cdot\beta=\left\{\frac{mp}{nq}\right\};$$

例如，
$$\left\{\frac{3}{5}\right\}\cdot\left\{\frac{20}{9}\right\}=\left\{\frac{3\cdot20}{5\cdot9}\right\}=\left\{\frac{60}{45}\right\}=\left\{\frac{4}{3}\right\}。$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left\{\frac{mq}{np}\right\},\ (p\neq0);\ 例如，\ \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{1}}=\left\{\frac{3\cdot1}{5\cdot7}\right\}=\left\{\frac{3}{35}\right\}。$$

最后面的这条规则表明了，除掉 $0=\left\{\frac{0}{q}\right\}$ 之外，除法可以不受限制地进行，减法与除法是加法与乘法的逆运算。减法不一定都能实行，多于两个数的运算也可以相应地予以定义。

定义顺序和定义相等相类似：如果 $mq>np$，也就是说 $\alpha>\beta$；例如，因为 $8\cdot14>9\cdot11$，故 $\frac{8}{9}>\frac{11}{14}$。

所有这些定义只在对 α 与 β 的代表选择无关时才是有意义的，对于顺序关系 $>$，现可证明于下：

假设：$\left\{\frac{m}{n}\right\}>\left\{\frac{p}{q}\right\}$，即 $mq>np$；令 $\frac{m_1}{n_1}$ 与 $\frac{p_1}{q_1}$ 是类 $\left\{\frac{m}{n}\right\}$ 与 $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ 中的其他分数，也就是说，$\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n_1}$，$\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}$。

求证：$\left\{\frac{m_1}{n_1}\right\}>\left\{\frac{p_1}{q_1}\right\}$。

证明：用 n_1q_1 乘 $mq>np$，变成 $mn_1qq_1>nn_1pq_1$；根据假设 $mn_1=m_1n$，$pq_1=p_1q$，代入后得 $m_1nqq_1>nn_1p_1q$；从两端约去因子 nq 以后就得到所需要的式子 $m_1q_1>n_1p_1$。

在绝对有理数集上的序关系是全(线性)序和阿基米德序。

这个集可以在保持顺序不变的情况下，逐点映照到一条所谓的数射

线上去。位于数射线上的象是稠密的，也就是说，在任意两个象之间必有另外一个象。譬如说，在象 α 与象 β 之间，必定有 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的象。

自然数运算的交换律、结合律、分配律以及其他一些法则对于绝对有理数仍然有效。这里有一个乘法结合律的证明：设

$$\alpha=\left\{\frac{m}{n}\right\},\ \beta=\left\{\frac{p}{q}\right\},\ \gamma=\left\{\frac{r}{s}\right\},$$

则 $$[\alpha\cdot\beta]\cdot\gamma=\left\{\frac{mp}{nq}\right\}\cdot\left\{\frac{r}{s}\right\}=\left\{\frac{mpr}{nqs}\right\}=\left\{\frac{m}{n}\right\}\left\{\frac{pr}{qs}\right\}=\alpha\cdot[\beta\cdot\gamma]。$$

绝对有理数与自然数　扩展了的数系包含着一个相当于全体自然数的子集，即数 $\left\{\frac{1}{1}\right\}$, $\left\{\frac{2}{1}\right\}$, $\left\{\frac{3}{1}\right\}$, …, $\left\{\frac{k}{1}\right\}$, …。因为这种形式的两个数相加或相乘会得出另一个具有这种形式的数，例如：

$$\left\{\frac{k}{1}\right\}+\left\{\frac{l}{1}\right\}=\left\{\frac{k+l}{1}\right\},\qquad \left\{\frac{k}{1}\right\}\cdot\left\{\frac{l}{1}\right\}=\left\{\frac{kl}{1}\right\}。$$

此外，当且仅当 $\{k>l\}$ 时，$\left\{\frac{k}{1}\right\}>\left\{\frac{l}{1}\right\}$。如果把 $\left\{\frac{1}{1}\right\}$ 作为自然数 1，$\left\{\frac{2}{1}\right\}$ 作为自然数 2……，$\left\{\frac{k}{1}\right\}$ 作为自然数 k 的话，则可以看出，计算这类 $\left\{\frac{k}{1}\right\}$ 形式的数与计算自然数是完全一样的。

绝对有理数系中所包括的具有形如 $\left\{\frac{k}{1}\right\}$ 的子系按所定义的运算与顺序与自然数系同构。

从现在起，数 $\left\{\frac{k}{1}\right\}$ 即可简单地记为 k 并可以当成自然数那样来处理，因为它们满足皮亚诺公理。同样，对其他绝对有理数，花括弧也可省略，例如，可用 $\frac{m}{n}$ 来代替 $\left\{\frac{m}{n}\right\}$；只要按分数运算规则进行运算就不会引起混乱。诚然，这里存在着概念上的差异：分数 $\frac{3}{7}$ 与 $\frac{6}{14}$ 不相同，因为虽然它们的值相等，它们的分子、分母并不同。然而，绝对有理数 $\frac{3}{7}$ 与 $\frac{6}{14}$ 却完全相等。这一简化，是为了定义算术运算与顺序的需要。定义的选取要使得上文所提到过的同构关系能够成立，即应符合所谓亨凯尔因袭原理（叫公设更好些）：在扩展后的系统中定义运算与顺序应当使得在原来系统中的法则尽可能多地继续保持有效。与作为一种有力证明方法的数学

归纳原理不一样，亨凯尔公设只是表明在扩展数系时所要做到的东西，这一原理并没有使人信服的力量。现在我们可以说：

绝对有理数系是自然数系的一个扩展，它由自然数与分数所组成。

第三类运算 幂 $\alpha^\beta=\gamma$，其中 $\beta=n$ 是一个自然数，显然易于定义。与此相应的是，对一个给定的 γ 值，数 $\alpha=\sqrt[\beta]{\gamma}$ 与 $\beta=\log_\alpha\gamma$ 被定义为能使 $\alpha^\beta=\gamma$ 成立的量，如果它们确实存在的话。当 β 是一个绝对有理数，即 $\beta=\frac{r}{s}$ 时，则 $\alpha^\beta=\gamma$ 应理解为 $\gamma=\sqrt[s]{\alpha^r}$。如果这些数在绝对有理数系中都存在，则按照上述这些规定，它们都能唯一地加以确定。

【例】 1. 对 $\alpha=\frac{2}{3}$ 与 $\beta=3$，可得出 $\gamma=\alpha^\beta=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$；当 $\gamma=\frac{8}{27}$ 与 $\beta=3$ 已知时，则有 $\alpha=\sqrt[\beta]{\gamma}=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$；而当 $\gamma=\frac{8}{27}$ 与 $\alpha=\frac{2}{3}$ 时，则有 $\beta=\log_\alpha\gamma=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)=3$。

2. 对 $\alpha=\frac{9}{16}$ 与 $\beta=\frac{1}{2}$，可得出 $\gamma=\alpha^\beta=\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$。当给出 $\gamma=\frac{3}{4}$ 与 $\beta=\frac{1}{2}$ 时，则有 $\alpha=\sqrt[\beta]{\gamma}=\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{3}{4}}=\frac{9}{16}$，这是因为 $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$ 之故；对 $\gamma=\frac{3}{4}$ 与 $\alpha=\frac{9}{16}$ 则得出 $\beta=\log_\alpha\gamma=\log_{\frac{9}{16}}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$。

3. 对 $\alpha=2$ 与 $\beta=\frac{1}{2}$，似乎应当有 $\gamma=\alpha^\beta=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$。但它不是有理数，后文将予以说明。

3.3 有理数域Q

为了使绝对有理数的减法能够不受限制地进行，需要在表示绝对有理数的有序数对的集合中引进一种等价关系，即所谓*差的相等关系*：如果 $\alpha+\beta'=\alpha'+\beta$，则记为 $(\alpha,\beta)\sim(\alpha',\beta')$；例如，因 $\frac{12}{5}+\frac{7}{10}=\frac{5}{2}+\frac{3}{5}$，于是 $\left(\frac{12}{5},\frac{3}{5}\right)\sim\left(\frac{5}{2},\frac{10}{7}\right)$，数对 (m,n) 的这种等价类叫作*有理数*，并可以记为 $\{(m,n)\}$。对这些新数，算术运算可以用这样的方式来定义，使得它们与所选取的代表数无关，而且减法总是可以实行的。算术定律的证明(见 I. 第1章)是建立在这些定律对绝对有理数成立这一事实的基础上的。

带符号数　为了去掉笨重不便的记法 $\{(m,n)\}$，人们开始注意到当 $m>n$ 时，数对 (m,n) 可写成 $(n+k,n)$ 这一形式，而当 $m<n$ 时则可写成 $(m,m+k)$ 这一形式，当 $m=n$ 时则可写成 (m,m) 这一形式；例如，$\left(2,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{3}{4},1\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)$，$\left(\frac{2}{5},\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$。于是人们引入一种新的记法：

$$\alpha=\begin{cases}(+k)，\text{当 } m=n+k(k>0)； & \text{例如，}\left\{\left(2,\frac{1}{2}\right)\right\}=\left(+\frac{3}{2}\right)。\\ (-k)，\text{当 } n=m+k(k>0)； & \text{例如，}\left\{\left(\frac{3}{4},1\right)\right\}=\left(-\frac{1}{4}\right)。\\ (0)，\quad \text{当 } m=n； & \text{例如，}\left\{\left(\frac{2}{5},\frac{4}{10}\right)\right\}=(0)。\end{cases}$$

这种记法与代表数的选取无关这一事实是差的相等关系的必然结果。前面的正号与负号叫作数的符号，可是绝不可与外表看起来完全一样的运算符号相混淆。数 $\alpha=(+k)$ 叫做**正数**，数 $\beta=(-k)$ 叫做**负数**，而 k 则叫作 α 或 β 的**绝对值**，用记号表示的话，就是 $k=|\alpha|$，$k=|\beta|$，这里 k 是一个绝对有理数。至于有理数的先后顺序，则可定义如下：

$$\alpha>\beta\begin{cases}\text{当 }\alpha\text{ 是正数，}\beta\text{ 是正数或零，且 }|\alpha|>|\beta|\text{ 时，}\\ \qquad\text{例如}\left(+\frac{7}{3}\right)>\left(+\frac{5}{6}\right)；\\ \text{当 }\alpha\text{ 是正数而 }\beta\text{ 是负数时，}\\ \qquad\text{例如}\left(+\frac{1}{100}\right)>(-10)；\\ \text{当 }\alpha\text{ 是负数或零，}\beta\text{ 是负数，且 }|\alpha|<|\beta|\text{ 时；}\\ \qquad\text{例如}\left(-\frac{2}{3}\right)>(-1)。\end{cases}$$

这个定义与等价关系是相容的，并且也满足传递性。单调性规则对加法来说可以成立，对乘以正数因子的乘法也成立，但当两端各乘上一个同样的负数时，顺序关系必须逆转；例如，由 $(+5)>(+2)$ 可以推出 $(+5)+(-1)>(+2)+(-1)$ 与 $(+5)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)>(+2)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)$，但 $(+5)\cdot(-1)<(+2)\cdot(-1)$。

至于阿基米德公理，则在经过适当修改后，就象对于绝对有理数那样，它还是照样成立。

有理数与绝对有理数 有理数系包含着正有理数系作为其一部分。只要对于数$(+k)$指定以它的绝对值k，这一部分就可以一一映照到绝对有理数系上去。凡是能执行的算术运算以及顺序都维持不变，例如：

$$(+k)\cdot(+l)=(+k\cdot l)。$$

对于能在其中执行的运算以及顺序而言，正有理数系与绝对有理数系同构。

由于$(+k)+(-l)=(+k)-(+l)$，因此可以省略正号而使记法更为简化；例如，

$$\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(+\frac{3}{4}\right)-\left(+\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2}{5}。$$

对正的α，幂α^β可以定义如下：

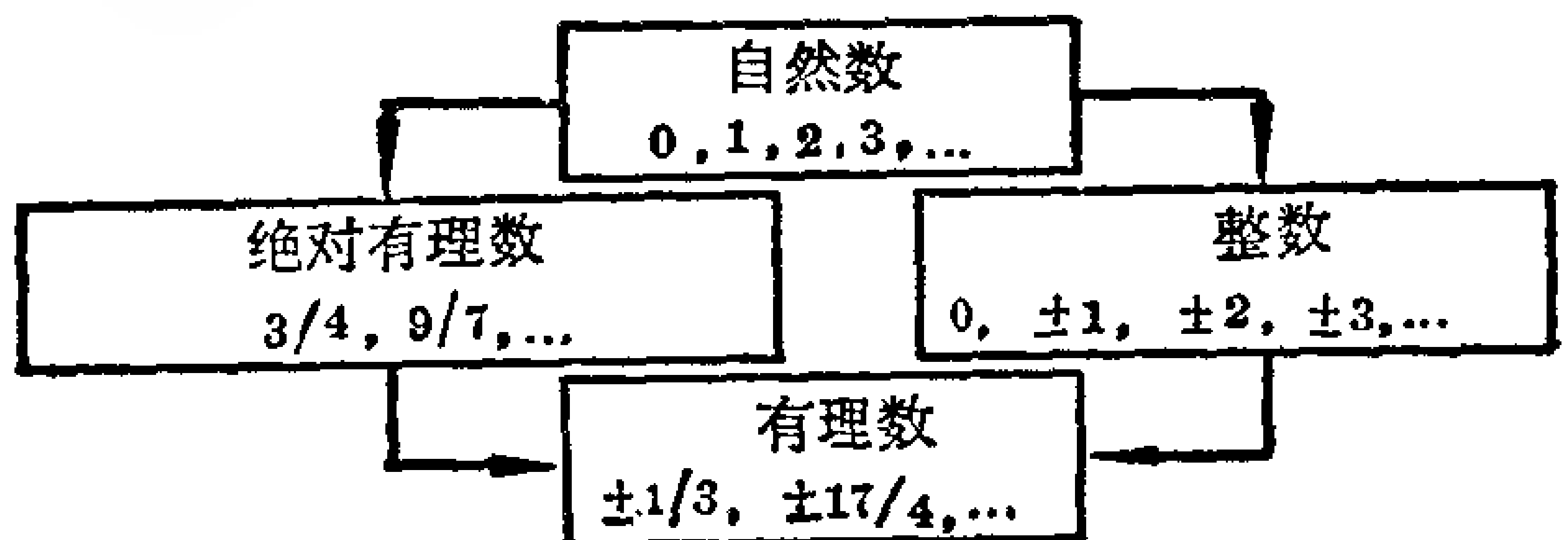
$$\alpha^\beta=\begin{cases}|\alpha|^{|\beta|}, & 当\ \beta>0\ 时;\\ 1, & 当\ \beta=0\ 时;\\ \dfrac{1}{|\alpha|^{|\beta|}}, & 当\ \beta<0\ 时。\end{cases}$$

只有当$|\alpha|^{|\beta|}$在绝对有理数系中有意义时，α^β才有意义；至于$\sqrt[\beta]{\alpha}$与$\log_\beta\alpha$也是对某些正的α与β（且β不能等于1）来定义，因而符合于相应的绝对有理数的定义。

有理数系是绝对有理数系的一种扩展，其中第一类与第二类算术运算可以不受限制地执行，但第三类算术运算则不然。

3.4 整数集 **Z**

我们按照某些学派的作法是以自然数为基础，先构造绝对有理数，然后再构造有理数。但是构造有理数还可以有另外的途径（见Ⅰ.第1章），在那里，先用差数相同的有序自然数对构造整数集合0，±1，±2，…，然后再用具有相等商数的整数对构造有理数域，整数集的一部分是与自然数集同构的正整数集。至于有理数域，则其一部分是与整数集同构的数±k的集合。这两种情形有两种扩展方法。



3.5 实数域 R

犹如绝对有理数之对于数射线，有理数在数轴上是稠密的。但是，正如下面所指出的，它们并不能盖满整个数轴而无空隙。如果对于每一个线段 S，可以指定一个正数 a 作为其长度的话，则通过一串直角三角形可以作出线段 $S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots$（见图 3.5-1），它们的长度分别相当于正数 $\alpha_1=1$，α_2，α_3，α_4，$\cdots$。 根据毕达哥拉斯定理，$\alpha_2^2=2$，α_3^2-3，$\alpha_4^2=4, \cdots$，因此 $\alpha_2=\sqrt{2}$，$\alpha_3=\sqrt{3}$，$\alpha_4=\sqrt{4}$，$\cdots$，如果把线段 $S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots$ 的原点取为数轴上的 0 点，则这些数就与数轴上的一些点相对应。 但是数 α_2 与 α_3 不是有理数；例如，假定 α_2 是一个有理数 $\frac{r}{S}$（r 与 S 互质）的话，则将有 $\frac{r^2}{S^2}=2$。可是，这是不可能的，因为如果 r 与 S 互质，则 r^2 与 S^2 也应该互质，所以分数 $\frac{r^2}{S^2}$ 不能约分，因而不可能得到一个整数。证明 α_3，α_5，$\cdots$不是有理数的方法基本上也一样。但是，对 α_4，α_9，$\cdots$以及一般地对 n 是个完全平方数的 α_n 来说，它将导致一个分母 $S=1$ 的分数 $\frac{r}{S}$，也就是说，可以化成一个整数。

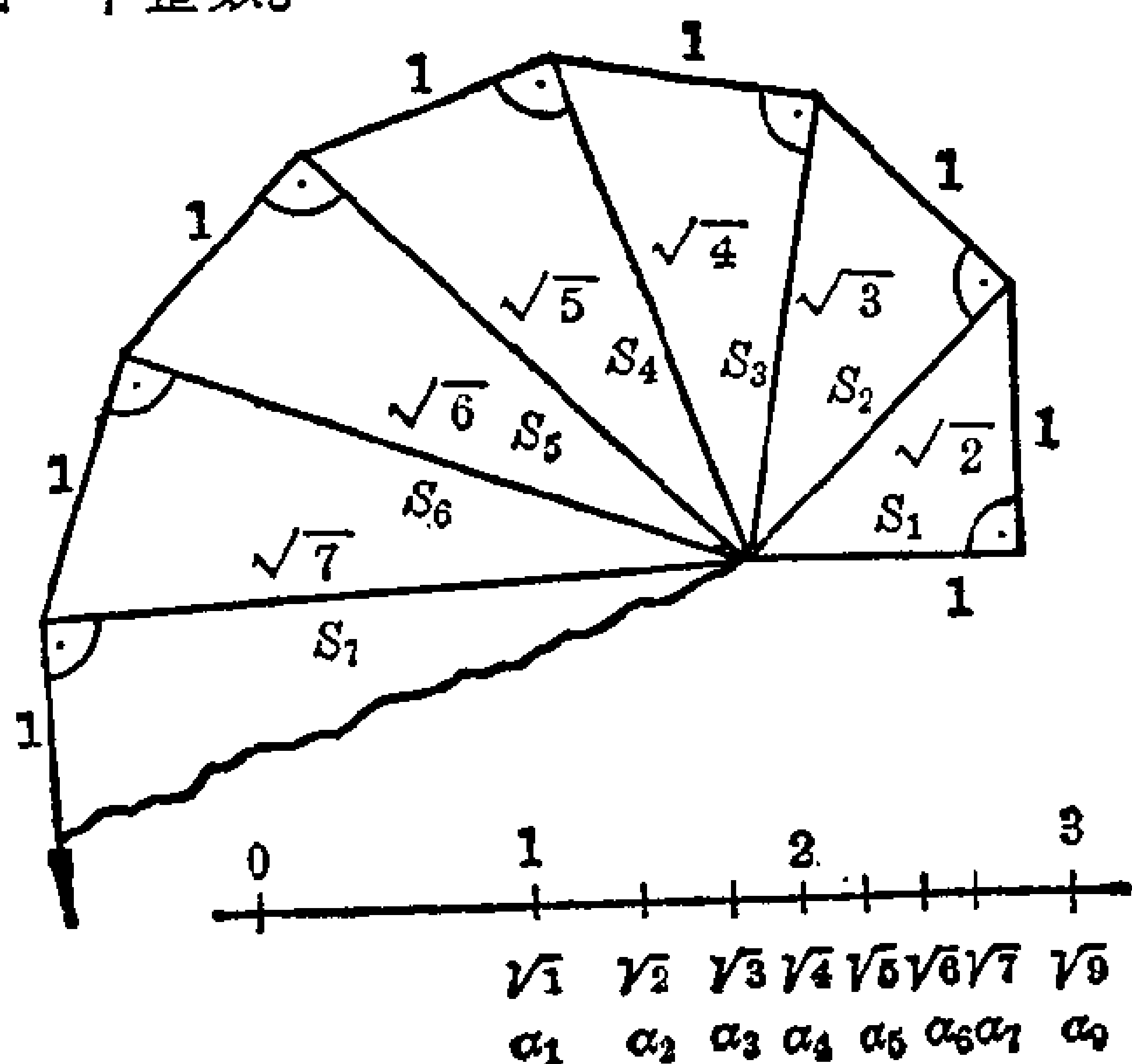


图 3.5-1 线段 S_1，S_2，$\cdots$ 以及数轴上的点 α_1，α_2，$\cdots$的作法

同样，对于一个直径 d 为有理数的圆，按照几何定理可知，圆周长应为 πd。约翰·海因列希·兰伯特 (Johann Heinrich Lambert, 1728～1777年)早已证明了它不是一个有理数。

如果任意一个线段都必须有一个数值作为其长度的话，那就需要一种新的数域，它将是有理数域的一个扩展。与以前情况不一样，这种数域不再能够用数对来构造了。但是，对线段进行量测过程的理论分析为它的构造给出了若干启示。要想用一个单位长 e 来准确地量度线段，人们必须相继应用线段 e，$\frac{e}{10}$，$\frac{e}{100}$，…作单位。每作一次这样的量度，就相当于对长度的数值再给出一位小数。当十进小数是有限小数或循环小数时，它表示的是有理数；可是一般地讲，它可以既不是有限小数，也不循环。

无限小数形成了实数域。

实数域包含着有理数域，因为任一有限小数也可以写成无限小数的形式，只要从某一位小数开始，以后永远是 9 就可以了，例如，

$$7.58=7.57999\cdots。$$

用有理数逼近 任一实数可以通过用有理数按任意多位的准确度加以逼近。在每次测量工作中都要用上这一点，当然在实践中，经过了若干位小数后总是要停下来。例如，如果要求出长度为 16 米的一条线段的三分之一，而要求的准确度是 10^{-4} 米时，那么四位小数就已足够，即 $5\frac{1}{3}$ 米≈5.3333 米。

如果能知道小数点前面的整数以及给出确定各位小数的规则，则一个十进小数被认为已经是完全确定的。例如，要计算能使关系式 $\alpha_2^2=2$ 成立的数 α_2，可以有下面的一套格式：

$$1<\alpha_2<2, \quad \text{因为} \quad 1^2<2<2^2;$$
$$1.4<\alpha_2<1.5, \quad \text{因为} \quad 1.4^2<2<1.5^2;$$
$$1.41<\alpha_2<1.42, \quad \text{因为} \quad 1.41^2<2<1.42^2;$$
$$1.414<\alpha_2<1.415, \quad \text{因为} \quad 1.414^2<2<1.415^2, \text{等等。}$$

因而数 $\alpha_2=\sqrt{2}$ 位于无穷多具有有理端点 (1, 2)，(1.4, 1.5)，(1.41, 1.42)，…的区间之中，这些区间是一个套着一个的。一个“区间套”意味着区间的左端点单调递增，右端点单调递减，区间的长度可以任意小。利用这种区间套，无限十进小数 $\alpha_2=\sqrt{2}$ 被唯一确定。一切实数都可以相应地以任意准确度给出。

顺序与算术运算 实数的先后顺序可以按照查字典方式加以确定。若 $a>b$，或 $a=b$，而第一个彼此不相等的小数 $a_i>b_i$ 时，则我们就说，正

十进小数 $\alpha=a.a_1a_2a_3\cdots$ 大于正十进小数 $\beta=b.b_1b_2b_3\cdots$；例如 $3.78634\cdots>3.78629\cdots$。如果根据原点对称来确立负数的顺序，则传递律、非自反律、可比较律等均能得到满足，因而确立了一种全序或线性顺序的关系。实数可以在保持顺序不变的情况下映射为直线——即数轴——上的点，且可以盖满全部数轴而无空隙。由区间套所给出的实数的第一类与第二类算术运算是通过区间的有理端点来定义的。典型的例子是除法，至于其他的运算则也可作类似处理。设我们要考察的是 $\frac{\alpha}{\beta}$，这里的 α 与 β 都是正数。设 α, β 分别由一套有理区间 (a_i, a_i') 与 (b_i, b_i') 给出，由于 $a_i<\alpha<a_i'$，$\frac{1}{b_i'}<\frac{1}{\beta}<\frac{1}{b_i}$，故有 $\frac{a_i}{b_i'}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{a_i'}{b_i}$。于是 $\left\{\left(\frac{a_i}{b_i'}, \frac{a_i'}{b_i}\right)\right\}$ 就构成了商 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的一个区间套：左端点与右端点分别形成了一个有界的单调递增与单调递减的有理数数列。

第 n 个区间的长度 l_n 为

$$l_n=\left|\frac{a_n'}{b_n}-\frac{a_n}{b_n'}\right|=\left|\frac{a_n'b_n'-a_nb_n}{b_nb_n'}\right|=\frac{|(a_n'-a_n)b_n'+a_n(b_n'-b_n)|}{|b_nb_n'|}。$$

分子上，括弧前面的因子 b_n' 与 a_n 是有界的。由于当 n 充分大时，括弧里的表达式可以任意小，因此对整个分子来说也是如此。由于 $\beta\neq0$，因此对于充分大的 n，对一切 b_n 与 b_n' 存在着一个正下界。由这一个区间套所定义的正实数就记为 $\frac{\alpha}{\beta}$。当 α 或 β 中的一个或两个都是负数时，只要把上述这番议论略加修改，也可得出所要的结果。

为了定义实数的幂 $\alpha^\beta(\alpha>0)$，需要构造区间 $(a_i^{b_i}, a_i'^{b_i'})$。它们仍然表示一个区间套；然而，一般说来，区间的端点不一定是有理数了。所以，下面的*完全性定理*是成立的。

如果对于一切 i 来说，不等式 $\rho_i\leqslant\rho\leqslant\rho_i'$ 成立，则由实数端点所组成的一个区间套 (ρ_i, ρ_i') 唯一地确定着一个实数 ρ。

定理的证明在这里省略掉了。因此，根据该定理，区间套 $\{(a_i^{b_i}, a_i'^{b_i'})\}$ 确定了一个实数，记为 α^β。

通过这种方式来定义的算术运算，对有理数域中的运算法则同样成立。

实数域是有理数域的一种扩展，特别是它能包含全部的正数根（算术根）。

关于实数的构造只能讲到这里为止。必须指出：在形式化处理时，必要对区间套定义一个等价关系并形成相应的等价类。严格地坚持地实行这种方法才是获得实数的一种真正构造性的办法。

定义实数的其他方法　欧多苏斯(Eudoxus，约公元前408～355年)被认为是发展实数理论的一位先锋。他从几何中得来的一些概念后来为卡尔·威尔斯特拉斯(Karl Weierstrass，公元1815～1897年)与理查德·戴德金(1831～1916年)所采取，并由于他们利用现代数论与分析方法而获得了进一步发展。**区间套方法**的采用可以追溯到威尔斯特拉斯。戴德金则利用有理数域中的**分划**来引进实数。乔治·康托(Georg Cantor，1845～1918年)则利用**柯西基本序列**构造它们。

由这些方法所获得的数域可以通过保持顺序不变的同构映射，从一个变为另一个。因此，从结构上来说，实际只有一个实数域。

3.6　连分数

阶为 n 的连分数　设 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是整数，当 $k>0$ 时，$b_k>0$，分母为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，首项为 b_0 的阶为 n 的连分数简记为 $[b_0;\ b_1, b_2, \cdots, b_n]$，由以下表示式定义：

$$b_0+\frac{1}{b_1+\frac{1}{b_2+\cdots+\frac{1}{b_n}}}$$

【例】　$n=3;\ b_0=2,\ b_1=3,\ b_2=1,\ b_3=4;$

$$[2;\ 3,\ 1,\ 4]=2+1/[3+1/(1+1/4)]=\frac{43}{19}。$$

近似分数　设 α 是一个阶数为 n 的连分数，则所谓 α 的一个 k 阶 $(k<n)$ 近似分数的意思是指在第 k 个分母处截断所得出的分数。由 k 阶连分数的定义，显然可将它写成通常的分数形式，于是得出：

$$[b_0; b_1]=b_0+1/b_1=(b_0b_1+1)/b_1=A_1/B_1,$$

$$[b_0;\ b_1,\ b_2]=b_0+1/(b_1+1/b_2)=(b_2(b_0b_1+1)+b_0)/(b_1b_2+1)=A_2/B_2,$$

$$\begin{aligned}[b_0;\ b_1,\ b_2,\ b_3]&=b_0+1/[b_1+1/(b_2+1/b_3)]\\&=(b_3[b_2(b_0b_1+1)+b_0]+b_0b_1+1)/(b_3(b_1b_2+1)+b_1)\\&=A_3/B_3。\end{aligned}$$

这里，所有的 A_i 与 B_i 是整数；例如，对连分数 [2; 3, 1, 4, 2, 1, 2] 来说，第二个渐近分数是 $[2;3,1]=2+1/(3+1)=\frac{9}{4}$，即 $A_2=9$，$B_2=4$。

为了完备起见，如果定义 $A_0=b_0$，$A_{-1}=1$，$A_{-2}=0$；$B_0=1$，$B_{-1}=0$，$B_{-2}=1$；则通过数学归纳法可建立下列递推公式：

递推公式	$A_k=b_kA_{k-1}+A_{k-2}$; $B_k=b_kB_{k-1}+B_{k-2}$

【例】

	k	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	
	b_k	−	−	2	3	1	4	2	1	2	已知数据
由定义	A_k	0	1	2	7	9	43	95	138	371	
	B_k	1	0	1	3	4	19	42	61	164	算得数据

例题 [2; 3, 1, 4, 2, 1, 2] 表明为了算出 A_k（计算 B_k 的方法与此类似），要把位于 A_k 上面的 b_k 乘以左面的 A_{k-1}（它已经算得），再加上更左面的 A_{k-2}。在上图用箭头标明的地方，可算出 $0+1\cdot2=2$ 与 $7+9\cdot4=43$。这样得到的渐近分数为：$A_1/B_1=7/3=2.33$；$A_2/B_2=9/4=2.25$；$A_3/B_3=43/19=2.2631$；$A_4/B_4=95/42=2.2619\cdots$；$A_5/B_5=138/61=2.2623\cdots$；$A_6/B_6=371/164=2.262195\cdots=[2;3,1,4,2,1,2]$。

只要把最后得到的分数与各个渐近分数相比较，就可以看出渐近分数这个名称的合理性。事实上，我们有：

各个渐近分数越来越趋近于最后的分数，它们交替地从下方与上方接近原先的连分数，准确程度越来越高。

任一有理数都可以展成一个连分数。

【例】 把 $\frac{964}{437}$ 展成连分数。$r=964/437=2+90/437$；$r=b_0+1/r_1$；$b_0=[r]$，这里$[r]$表示不超过 r 的最大整数，故 $r_1=437/90=4+77/90$；$r_1=b_1+1/r_2$；$r_1>1$，如果 r 不是整数，则令 b_1 是不超过 r_1 的最大整数，即 $b_1=[r_1]$，这样一直做下去，便得到：

$$r=964/437=2+1/4+1/1+1/5+1/1+1/12,$$

$$r=[2;4,1,5,1,12]。$$

可是我们注意到同一个分数$\frac{1}{2}$有两种表示法，即$\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=0+1/[1+(1/1)]$，因此$[0;2]=[0;1,1]$，这个例子表明连分数展开式可以不是唯一的。为了保证唯一性，必须假定$b_n>1$，这是一定可以做到的，因为$[b_0;b_1,b_2,\cdots,b_n,1]=[b_0;b_1,b_2,\cdots,b_n+1]$。展成连分数的办法使得人们有可能应用一系列较小的分子和分母(虽然它们的写法很臃肿不便)来追近一个有理数，而这一点对实际问题来说往往是有用的。

无尽连分数 无尽连分数可用以表示实数，它们也可以作类似处理，近似的程度要比用十进小数来得好些。反之，任一实数可用一个(有尽或无尽)连分数来表示，事实上，我们有下面的定理：

当且仅当一个数是有理数时，其连分数展开式是有尽的。

与上面所讲的一样，渐近分数交替地从下方与上方趋近实数，准确度越来越高。

【例】 要把$\alpha=\sqrt{2}$展成连分数，用记号$[\alpha]$表示小于或等于α的最大整数，于是可以得出一系列分母：

1. $\alpha=b_0+(\alpha-[\alpha])$, $b_0=[\alpha]$, $\alpha-[\alpha]=1/\alpha_1$;
2. $\alpha_1=b_1+(\alpha_1-[\alpha_1])$, $b_1=[\alpha_1]$, $\alpha_1-[\alpha_1]=1/\alpha_2$;
3. $\alpha_2=b_2+(\alpha_2-[\alpha_2])$, $b_2=[\alpha_2]$, $\alpha_2-[\alpha_2]=1/\alpha_3$;

………………………………………………

利用不等式$1<\sqrt{2}<2$并加以重排：

1. $\alpha=1+(\sqrt{2}-1)$, $b_0=1$, $\sqrt{2}-1=1/\alpha_1$,
   $\alpha_1=(\sqrt{2}+1)/[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]=\sqrt{2}+1$;
2. $\alpha_1=2+(\sqrt{2}-1)$, $b_1=2$, $\sqrt{2}-1=1/\alpha_2$, $\alpha_2=\sqrt{2}+1$;
3. $\alpha_2=2+(\sqrt{2}-1)$, $b_2=2$, $\sqrt{2}-1=1/\alpha_3$, $\alpha_3=\sqrt{2}+1$;

………………………………………………

继续这一过程，就得到$\sqrt{2}$的循环连分数表达式$[1;2,2,\cdots]$通过A_k与B_k的图式可用来求循环连分数的渐近分数。

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
b_k	—	—	1	2	2	2	2	2	2
A_k	0	1	1	3	7	17	41	99	239
B_k	1	0	1	2	5	12	29	70	169

例如，$\frac{A_6}{B_6}=\frac{239}{169}=1.414201\cdots$ 而 $\sqrt{2}\approx1.414214$。

渐近分数收敛于$\sqrt{2}$。

$\sqrt{2}$的展开式是个循环连分数，这一事实并非出于偶然。循环连分数总是出现在所谓二次无理数的情况，即是有$\frac{a+b\sqrt{D}}{c}$形式的数，这里的a, $b\neq 0$, $c\neq 0$与D是整数，D是大于1的非完全平方数。拉格朗日(Lagrange)已经证明出一个二次无理数的连分数展开式必定是循环的。反过来，它的逆命题，即一个循环连分数表示一个二次无理数也已被欧拉所证出。

3.7 复数域 C

在实数域中，第一类与第二类算术运算可以不受限制地进行。但第三类算术运算则不然；例如，当n为偶数，a是负数时，幂$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$是不存在的，没有一个$\sqrt[2]{-4}$这样的实数。但是，负实数的平方根又往往是需要的，譬如说，在三次方程解的卡尔达诺(Cardano)公式中(见I.第4章)，事实上正是在所谓的不可约情形下，三次方程倒有三个相异实根。为了除掉这种局限性，便需要再次扩展数系。

新数的构造 考察任意实数a与b的一个有序数对(a, b)，这一次等价关系就是通常的等式，也就是说，当且仅当$a=a'$, $b=b'$时，数对(a, b)与(a', b')等价；每个等价类中只包含一个数对。

这样的数对(a, b)叫作*复数*。关于复数的第一类与第二类算术运算被定义为：

$$z_1\pm z_2=(a_1\pm a_2,\ b_1\pm b_2),$$

$$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\ \frac{b_1a_2-b_2a_1}{a_2^2+b_2^2}\right),\quad z_2\neq(0,\ 0)。$$

容易证明减法与除法是加法与乘法的逆运算。对加法与乘法来说，交换律、结合律与分配律都成立，例如，分配律的证明如下：设$z_i=(a_i,\ b_i)$, $i=1, 2, 3$是三个复数，则

$$\begin{aligned}z_1[z_2+z_3]&=(a_1,\ b_1)(a_2+a_3,\ b_2+b_3)\\&=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3,\ a_1b_2+a_1b_3+b_1a_2+b_1a_3)。\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}z_1z_2+z_1z_3&=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2)+(a_1a_3-b_1b_3,\ a_1b_3+b_1a_3)\\&=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3,\ a_1b_2+b_1a_2+a_1b_3+b_1a_3)。\end{aligned}$$

两个表达式是相同的。

此外，对这些算术运算来说，所有在实数域中能成立的运算律在复数域中也仍能适合，但如果运算律中含有顺序关系“大于”时则不然。在复数域 $\mathbf{C}$ 中引进全序的办法很多，譬如说，可以先按绝对值再按幅角的绝对值，这也是一种排序次的方法；但是可以证明：$\mathbf{C}$ 中没有一种顺序关系得以同加法和乘法相容。

复数与实数 复数域包含着一个由数 $(a, 0)$ 所形成的子域，后者就许可的运算而言是与实数域同构的，这是由于：$(a, 0)+(a', 0)=(a+a', 0)$，以及 $(a, 0)\cdot(a', 0)=(aa', 0)$。因而我们可以把这些数简单地记为 a，而不去写作 $(a, 0)$，数 $(0, b)$ 称为*纯虚数*，特别是复数 $(0, 1)$ 叫作*虚数单位*。在进行算术运算时，由于用不着担心发生错误，所以括号可以省略。我们有

$$(0, b)=(b, 0)\cdot(0, 1)=bi,\ (a, b)=(a, 0)+(0, b)=a+bi。$$

其次，$i\cdot i=(0, 1)\cdot(0, 1)=(-1, 0)=-1$。

虚单位 i	$i^2=-1$

任一复数可表为一个实数与一个纯虚数之和，即 $z=a+bi$。这里，a 与 b 分别叫做 z 的实部与虚部；a 与 b 都是实数。

复数的图示 在平面上画一个笛卡尔直角坐标系，用 x 轴表示实数，方法一如既往，用 y 轴表示虚数，单位取 i。复数 $z=a+ib$ 对应于点 $z(a, b)$，或者对应于从原点指向该点的矢量 $\mathbf{z}$，这些对应都是一一对应。由矢量加法（按照平行四边形法则）可知，和 z_1+z_2 对应着矢量 $\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2$。（见图 3.7-1）。

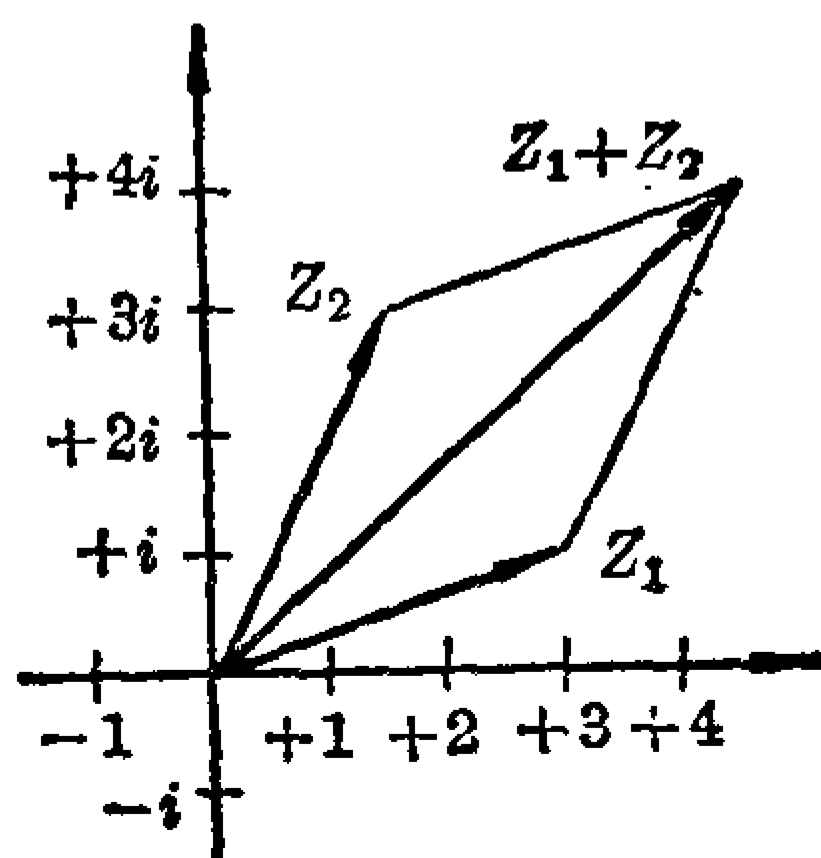


图 3.7-1 复数的相加

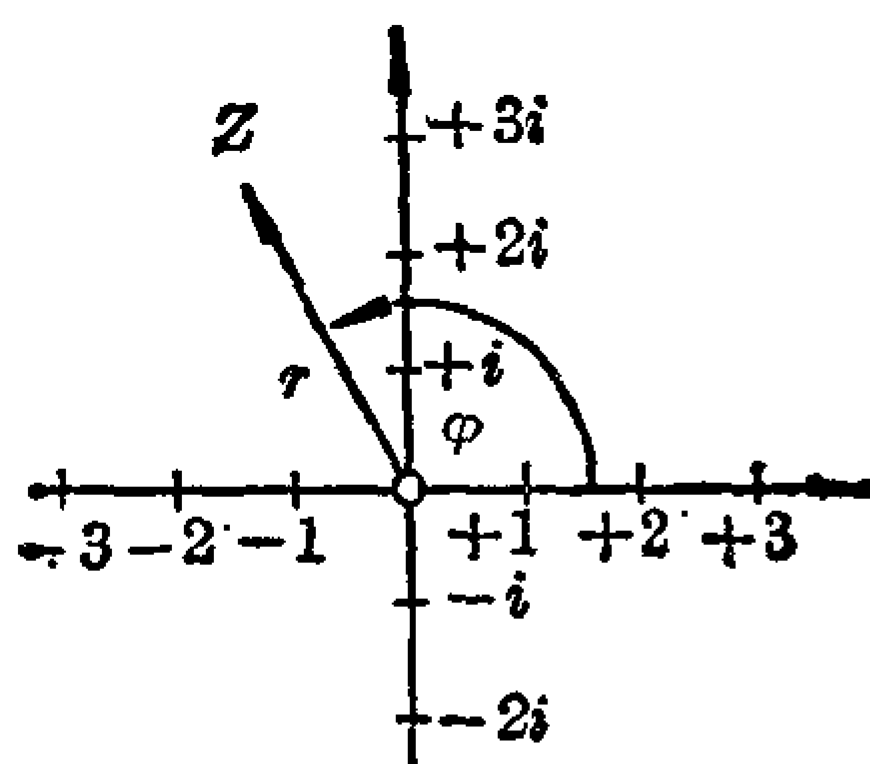


图 3.7-2 复数的模与幅角

为了对复数的乘积也能作出一个几何图示，可以把复数 $z=a+bi$ 表示为 z 的长度 r 及这一矢量与 x 轴正向的夹角 φ 的形式；r 叫作 z 的绝对值或模，φ 叫作 z 的幅角（见图 3.7-2）。这里要注意角 φ 按照反时针方向度量，并且只能确定到相差 2π 的整数倍。

变换公式	
$a=r\cos\varphi$	$r^2=a^2+b^2$，　$r\geqslant 0$，是实数
$b=r\sin\varphi$	$\cos\varphi=\frac{a}{r}$，　$\sin\varphi=\frac{b}{r}$
$z=a+bi$	$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

两个复数的乘积 $z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ 根据正弦与余弦的加法定理可以化成

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]。$$

这种表示法导致了下面的几何解释（见图 3.7-3）：由点 0，z_2 与 $z_1\cdot z_2$ 所形成的三角形相似于由点 0，+1 与 z_1 所形成的三角形，这是因为两个三角形各有一个等角 φ_1，而且夹此角的两边成比例，即 $r_1r_2:r_2=r_1:1$。于是，可用一个简单的几何作图法来表示两个复数的乘积。

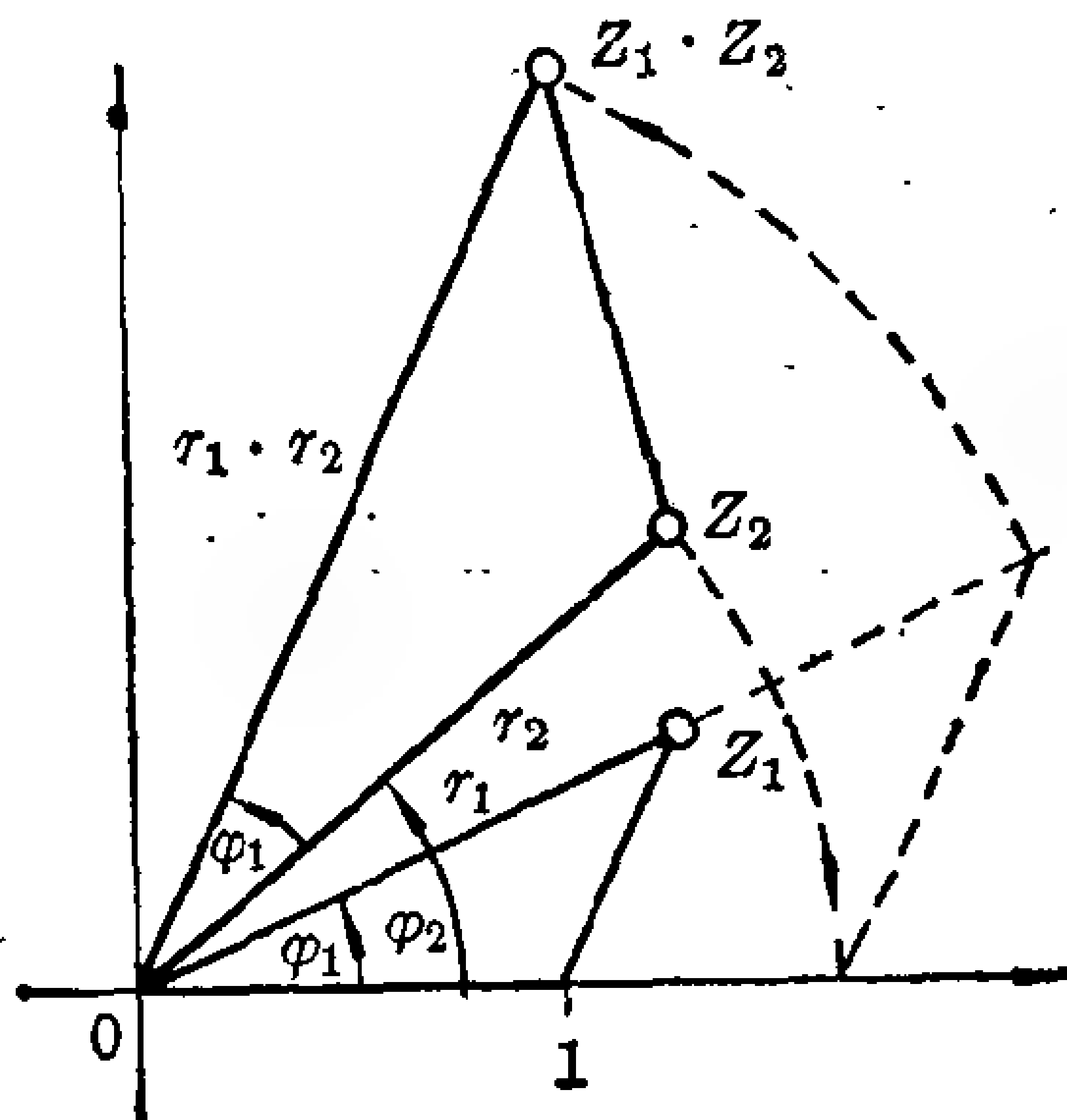


图 3.7-3　复数的相乘

幂与根　对自然数 n 来说，z^n 可由 $z^0=1, z^{n+1}=z^n\cdot z$ 来定义。通过加法定理与数学归纳法，可以推导出重要的棣莫弗(de Moivre)公式：

棣莫弗公式	$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

对 $n=-1$，可得出

$$z^{-1}=r^{-1}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]=r^{-1}(\cos\varphi-i\sin\varphi)。$$

再由数学归纳法就可以得到：

$$z^{-n}=r^{-n}[\cos(n\varphi)-i\sin(n\varphi)]。$$

对于 $\sqrt[n]{z}$ 来说，它的意义是指一个其 n 次幂能等于 z 的复数 w，亦即

方程 $w^n=z$ 的一个解。设 $w=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$。则由 $w^n=z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，根据棣莫弗公式就有:

$$\rho^n=r,\qquad \rho=\sqrt[n]{r},\quad \psi=\frac{\varphi}{n}+\frac{k\cdot 2\pi}{n},$$

或
$$w=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{k\cdot 2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{k\cdot 2\pi}{n}\right)\right]。$$

如果 $w\neq 0$，则对 $k=0, 1, 2, \cdots n-1$ 就有 n 个相异值。在复数域中，记号 $\sqrt[n]{z}$ 不是指一个值，而是多值的。在黎曼曲面(见**II**.第10章)的理论中将要阐明如何掌握这种多值性。特别当 z 是一个正实数时，则由此唯一确定的 n 次正实根叫做**主值**。在复数域中，开方可以不受任何限制。在 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值之中，有一个值是

$$r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right]。$$

【例】 为了求出 $\sqrt[4]{-1}$ 的一切值，可以设:

$$z=1[\cos(180°+k\cdot 360°)+i\sin(180°+k\cdot 360°)]$$

于是
$$w=1\left[\cos\left(\frac{180°}{4}+k\cdot 90°\right)+i\sin\left(\frac{180°}{4}+k\cdot 90°\right)\right]$$

$k=0$ 时给出 $w_0=\cos 45°+i\sin 45°$， $k=1$ 时给出 $w_1=\cos 135°+i\sin 135°$， $k=2$ 时给出 $w_2=\cos 225°+i\sin 225°$， $k=3$ 时给出 $w_3=\cos 315°+i\sin 315°$。

当 $k=4$，则得出 $\varphi_4=405°=360°+45°$，故 $w_4=w_0$， $w_5=w_1$，…，等等(见图 3.7-4)。

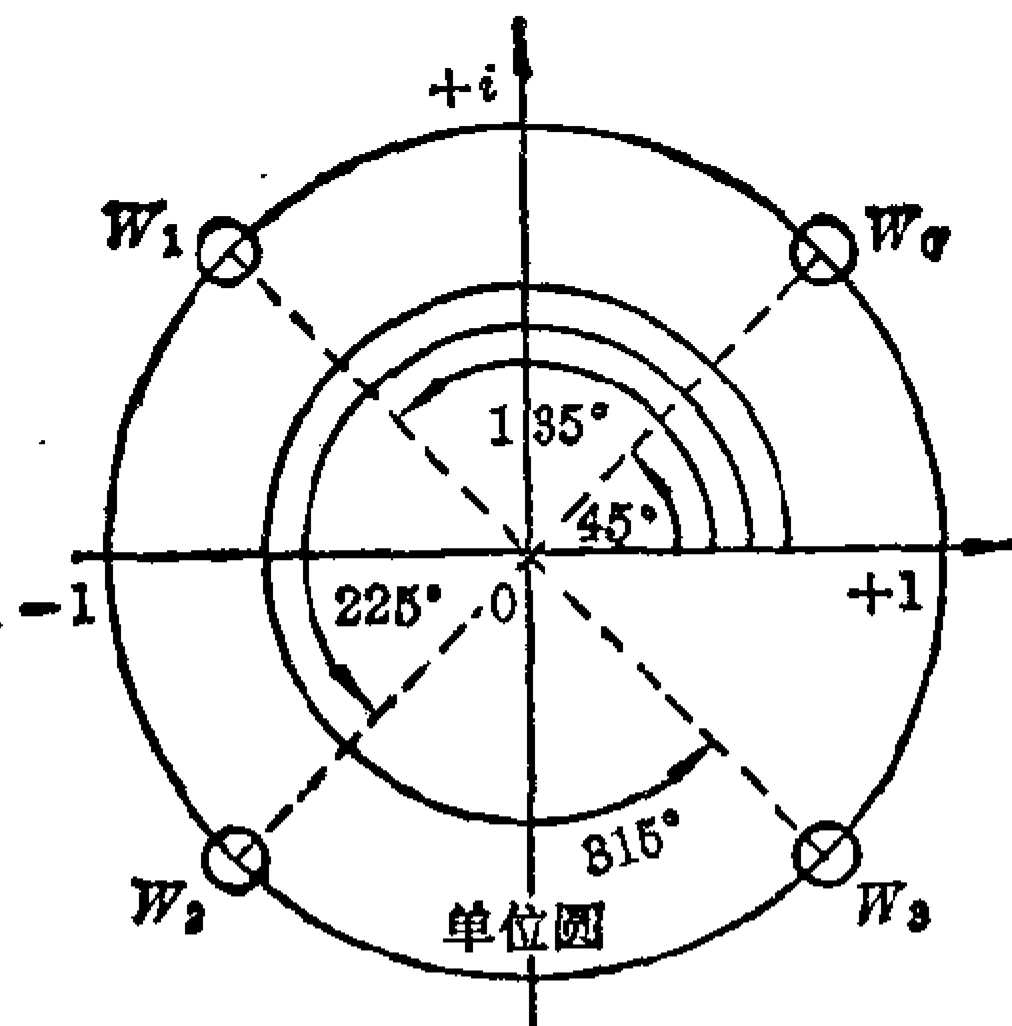


图 3.7-4　$\sqrt[4]{-1}$ 的复数值

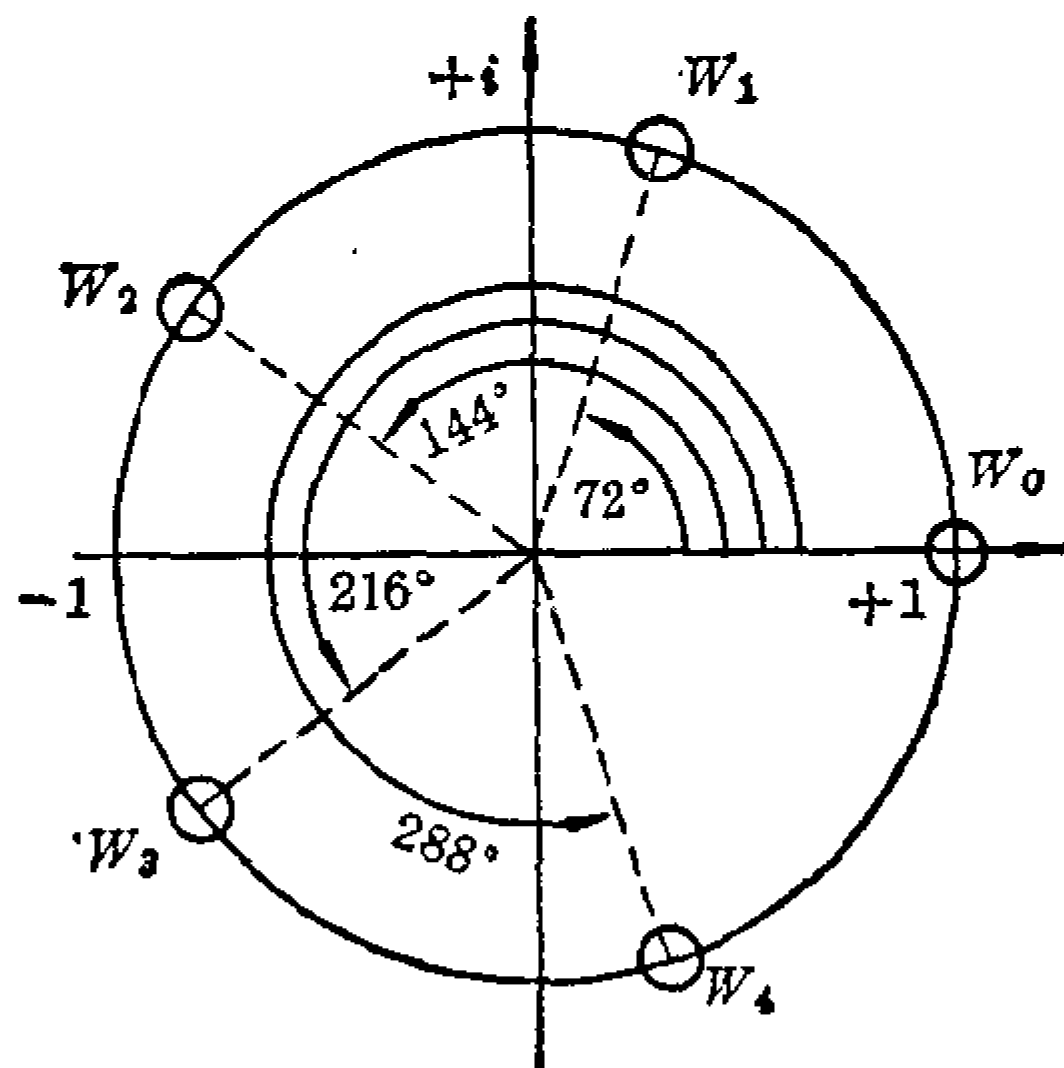


图 3.7-5　$\sqrt[5]{+1}$ 的复数值(1 的五次方根)

【例】 为了求出$\sqrt[5]{+1}$的一切值，可令

$$z=1[\cos(k\cdot 2\pi)+i\sin(k\cdot 2\pi)],$$

于是

$$w=1\left[\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right],$$

$k=0$ 时给出主值　　$w_0=+1$

$k=1$ 时给出　　$w_1=\cos 72°+i\sin 72°$,

$k=2$ 时给出　　$w_2=\cos 144°+i\sin 144°$,

$k=3$ 时给出　　$w_3=\cos 216°+i\sin 216°$,

$k=4$ 时给出　　$w_4=\cos 288°+i\sin 288°$,

当 $k=5$ 时有 $\psi_5=360°$，因此

$$w_5=w_0,\quad w_6=w_1,\ \cdots,\text{等等}$$（见图 3.7-5）。

1的n次方根位于单位圆圆周上并将它分成n个相等部分。当α是有理数时，幂z^α的定义方式与以前对绝对有理数及有理数的相应定义应取得一致。如果$\alpha>0$，且$\alpha=\frac{r}{s}$中的r与s都是正整数，则z^α应理解为$\sqrt[s]{z^r}$；如果$\alpha<0$且$z\neq 0$，则z^α被定义为$\frac{1}{z^{-\alpha}}$。具有极大重要性的一个定理是所谓经典代数的基本定理，它是首先由高斯用好几种方法予以证明的。

复数域是代数封闭的，这意味着任意一个具有复系数的代数方程在这个数域里至少有一个解。

复数的简史　十七世纪中叶起开始用到负数的平方根，从那个时候以来就被人们叫作虚数。十七世纪数学家们依据的是一本由拉斐尔·邦别利所编著的代数书，它出版于1572年，其中包含着一个关于纯虚数的能够自圆其说的理论。后来，复数的理论获得了进一步发展，作出过贡献的人有约翰·贝努里(Johann Bernoulli, 1667～1748年)，莱昂哈德·欧拉(1707～1783年)，特别是卡尔·弗里德列希·高斯(1777～1855年)。复数在平面上的表示法则可以追溯到卡斯巴·威赛尔(Caspard Wessel, 1745～1818年)与吉恩·罗伯特·阿根特(Jean Robert Argand, 1768～1822年)。由于高斯的权威，它成了表示复数的公认方法(高斯平面)。复数是复变函数论或复分析的理论基础。

第4章 代数方程

4.1 方程概念 ··················125
历史简述 ··················125
方程、解集··················127
等价方程 ··················131
问题的求解 ··············135
4.2 线性方程 ··················136
一个变量的线性方程 ···136
两个变量的线性方程 ···141
线性方程与线性方程组的图解法 ···········145
4.3 二次方程 ··················146
二次方程的数值解法 ···147
二次方程的图解法 ······154
历史简述 ··················156
4.4 三次与四次方程 ·········156
三次方程 ··················156
四次方程 ··················163
4.5 一般定理 ··················164
4.6 非线性方程组 ············167
4.7 代数不等式 ···············168

4.1 方程概念

历史简述

方程与数一样，都属于人类的首批数学成就之列。它们在最古老的书写形式的数学文献中即已出现，例如，可以追溯到公元前三千年的古代巴比伦人的楔形文字书板以及公元前约1800年古埃及中王朝的草卷(写在草莎纸卷上的抄本)。

与当时巴比伦的社会结构相一致，这些文献大多记录有关继承财产的问题。长子总是分到最大的一份，老二要比老三分得多，等等。下面就是此类问题之一：

“十个兄弟，银子总数是$1\frac{2}{3}$马恩。

每个兄弟分得的份数随年龄增加，我不知道他们究竟怎样分法。只知老八的一份是6个歇克耳。试问每个兄弟各分得多少?”

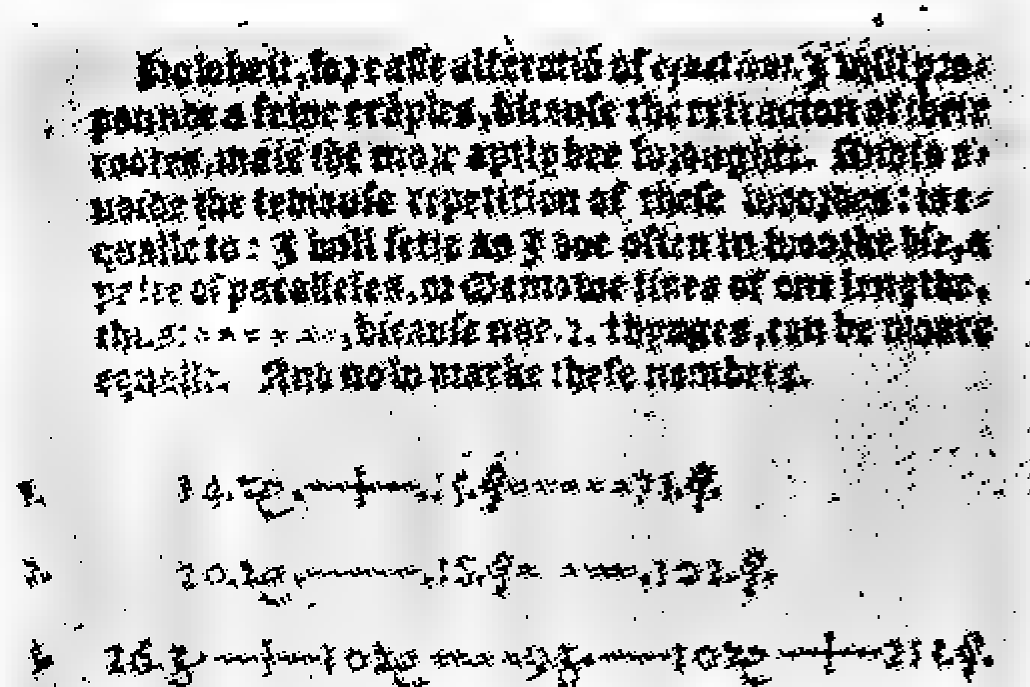
马恩是一种古代东方的计量单位。1个马恩等于60个歇克耳。这个问题导致一个算术级数；最小的兄弟分得的一份是$2+\frac{48}{60}$个歇克耳。以

后每一位兄弟依次比前一位多分到$1+\frac{36}{60}$个歇克耳。老大分到的是$17+\frac{12}{60}$个歇克耳，十个儿子到手的总数是100个歇克耳，即$1\frac{2}{3}$马恩。

如果说，在上面这个巴比伦问题中，未知数的描述是相当清楚的话，那末，在埃及草卷中，则是用象形文字来代表"h"，即一堆东西或一个集合。这类h的计算出现颇为频繁，它们相当于线性方程。这一点只要把莫斯科草卷中的一段埃及原文与现代记法作一比较，就可弄明白：

直译下来的埃及文字	现 代 记 法
一堆东西的计算。它的一倍半再加上4，其总和是10，这堆东西有多少？	$\frac{3}{2}x+4=10$
你算一算10比4超过多少，得到的是6。	$10-4=6$
你用$1\frac{1}{2}$去计算1，得到的是$\frac{2}{3}$。	$1:\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$
你计算一下6的$\frac{2}{3}$，得到的是4。	$6\cdot\frac{2}{3}=4$
瞧！　4就是答数。你算得很对。	$x=4$

在发展出一套代数符号语言之前，方程不得不用文字来书写。即使在代数领域中作出了很大贡献的佛朗索瓦·维也特，通常叫韦达（公元1540～1603年），也还是使用拉丁文的动词"*aequare*"来表示相等。目前常用的等号是由一位皇家法庭的医生罗伯特·雷科达（1510～1558年）首



Howbeit, for easie alteratiō of equations. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

图4.1-1　选自R.雷科达的《智慧的磨刀石》，1557年出版；　等号第一次出现在这本书里；　写在公式上面的话表明所以要采用这个符号的动机

先倡议的，但是在它为人们普遍接受之前仍然经历了一段相当时间。他在一本用对话体裁书写的、书名叫作《智慧的磨刀石》的代数课本里提出了这一建议，并且用下面的一番话来说明采用它的动机：“如我平日所为，作一对平行线，即同长之两线段如＝＝＝，盖无他物比此更相等耳。”

方程、解集

让我们从一个特定的数的集合（称为*基本域*）与变量的特定集合（称为*变量域*，变量可以由基本域或其子集中的元素所代换）出发。在指定基本域和变量域时，我们用 **N** 表示自然数集，**Z** 表示整数集，**Q** 表示有理数集，**R** 表示实数集，**C** 表示复数集。在下文，除了特别声明以外，基本域取为 **R**。方程的概念可以通过*表达式*的概念来加以说明，而表达式是归纳地加以描述的（见 **II**. 第 2 章）。

表达式　一切数与一切变量都是表达式。两个表达式的和、差、积、商仍然是表达式；表达式的乘方与开方产生新的表达式。用 0 作为除数是不准许的；目前，在乘方与开方时，幂指数暂时取作正整数，被开方数取正数。

表达式的例子：

$$5;\ \frac{4}{7};\ a;\ 4x;\ b+7;\ 5(a+b);\ (4x+3)/y;\ x^4/2;\ \sqrt[3]{a}。$$

表达式的概念还可以推广，例如包括：$\sin x$, $\log_a x$, e^x。

表达式 E_1 称为等价于表达式 E_2，如果对于用给定的变量域中每一个相同的数来代替变量时，两个表达式都取相同的值。例如，$4a+5a$ 与 $9a$ 关于实数集 **R** 是等价的表达式，而表达式 $(x^2+x)/x$ 与 $x+1$ 是不等价的，因为 $(x^2+x)/x$ 当 $x=0$ 时没有意义，而 $x+1$ 当 $x=0$ 时取值为 1。这两个表达式对于除零外的一切实数的集合是等价的。

下列事实是显然的：

1. 任一表达式 E 与它自身等价。

2. 如果 E_1 等价于 E_2，则 E_2 等价于 E_1。

3. 如果 E_1 等价于 E_2，E_2 等价于 E_3，则 E_1 等价于 E_3。

包含单变量的*表达式的定义域*是变量域的一切数的集合，这时，表达式中的变量可以取遍变量域中的任一个数。例如，表达式 $\frac{4a-5}{3}$ 的定义

域包含全体实数，而 $\frac{x}{x-3}$ 的定义域则是除 3 以外的一切实数。具有几个变量的表达式的定义域也可类似地说明。

方程　如果两个表达式 E_1 与 E_2 用等号连接起来，就产生一个方程 $E_1=E_2$。在这里，E_1 称为方程的*左端*，E_2 称为方程的*右端*。

*方程的定义域*是表达式中所有各变量的定义域的交集(见图 4.1-2)。

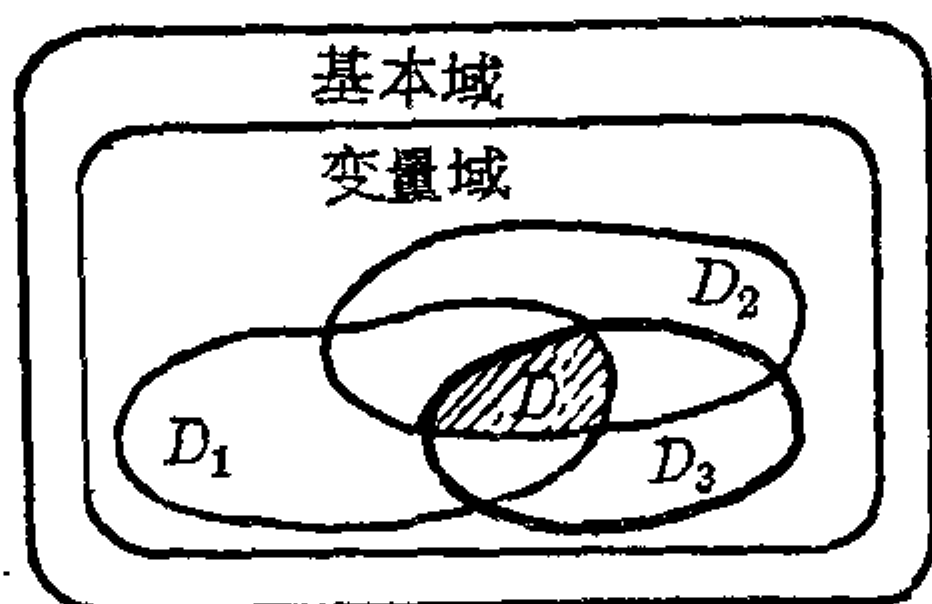


图 4.1-2　单变量方程的定义域 D 是各个表达式 E_i 的定义域 D_i 的交集

如果一个方程，它的表达式不含有变量，则在数理逻辑意义下，它是一个*命题*，可真可假。例如，$3+2=5$ 与 $3\cdot(5+2)=20+1$ 是真命题，而 $2+3\cdot4=15$ 是一个假命题。但如果表达式含有变量，那么方程是一个*谓词*，例如方程 $3x=-12$, $4a+3b=1$ 或 $x^2=(6x+24)/3$。只有当变量用方程的定义域中的数替换时，谓词才变成命题，它可以是真或假。

解　任何一个取自单变量方程的定义域中的数，如果它替换变数以后能使方程成为一个真命题，则这种数就称为方程的一个*解*，也可以说，这个数解出或*满足*此方程。如果一个方程包含两个、三个、……n 个变量，则其解分别是有序的一对数、三个数、……n 个数，具有以下性质：当变量按依次被这些有序的数序代入时，方程能成为一个等式的真命题。

【例】 1. 实数 -4 满足方程 $3x=-12$，因为 $3\cdot(-4)=-12$ 是一个真命题。由于没有别的解，-4 就是方程的解。

2. 方程 $4a+3b=11$，例如可被数对 (2, 1) 所满足，因为 $4\cdot2+3\cdot1=11$ 是真命题。但是事实上还有别的解，有无穷多组解，所以 (2, 1) 只是这个方程的一个解。

3. 方程 $x^2=(6x+24)/3$ 的解是数 -2 与 $+4$，因为 $(-2)^2=[6\cdot(-2)+24]/3$ 以及 $(+4)^2=(6\cdot4+24)/3$ 都是真命题。没有别的解了。

4. 如果方程 $x^2=2$ 的变量域取作有理数集 Q，则这个方程没有解，因为没有一个有理数的平方是等于 2 的。

解集　一个方程关于其定义域的所有解的集合称为方程的*解集* S。一个方程称为*不相容的*或*相容的*，视 S 是否为空集 $\emptyset$ 而定。

相容方程	不相容方程
$7x=-28$ 对 $x\in\mathbf{Z}$; $S=\{-4\}$	$7x=-28$ 对 $x\in\mathbf{N}$; $S=\emptyset$
$x^2=9$ 对 $x\in\mathbf{R}$; $S=\{-3;\ +3\}$	$x^2=-9$ 对 $x\in\mathbf{R}$; $S=\emptyset$
$4a^2=1$ 对 $a\in\mathbf{Q}$; $S=\left\{-\frac{1}{2};\ +\frac{1}{2}\right\}$	$4a^2=1$ 对 $a\in\mathbf{Z}$; $S=\emptyset$
$2x+x=3x$ 对 $x\in\mathbf{C}$; $S=\mathbf{C}$	$3x=3x+1$ 对 $x\in\mathbf{C}$; $S=\emptyset$

含有一个变量的相容方程称为*永真的*，如果定义域中的一切元素都是方程的解的话。例如，$2x+x=3x$ 在复数集中是永真的。含有 n 个变量的相容方程称为永真的，如果给定变量域中任意一个有序 n 数组都是方程的解的话。例如，对 $a,\ b\in\mathbf{R}$ 来说，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 是一个永真方程，因为一切实数对 $(a,\ b)$ 都能满足它。把一个表达式变成其等价表达式的任何一种变换包含着一系列永真的方程。例如，变换 $(4a+7a)\cdot 2=11a\cdot 2=22a$ 对于实数集 $\mathbf{R}$ 来说是一个等价的变换。可是变换

$$\frac{a^2-16a+64}{5a-5}\cdot\frac{a-1}{a^2-64}$$
$$=\frac{(a-8)^2}{5(a-1)}\cdot\frac{(a-1)}{(a+8)(a-8)}=\frac{a-8}{5(a+8)}$$

只是对不包含 ± 8 及 1 的实数集才是等价的，因为这些数不属于这里所出现的表达式的定义域。

带有参数的方程 有几个变量的方程，比如说 $2a+b=5$，这里的 $a,\ b\in\mathbf{R}$，可以用两种不同方式来加以解释:

第一种，两个变量可视为具有同等地位，从而我们可求出满足方程的全部数对 $(a,\ b)$。例如 $(2,\ 1)$，$\left(\frac{1}{2},\ 4\right)$，$(-5,\ 15)$ 便是上面这个方程无穷多个解中的三个解。

第二种，我们可以选定一个变量而把其余的看作辅助变量，即*参数*。然后求出方程依赖于此参数的解；一个解就是一个包含参数的表达式，而这个参数的一切允许值都满足方程。对上面的例子来说，如果 a 是变量，b 是参数，则 $a=\frac{5-b}{2}$，于是 $\frac{5-b}{2}$ 就是所给方程的解的表达式，因为 $2\cdot\frac{5-b}{2}+b=5$ 对一切 $b\in\mathbf{R}$ 都是真命题。如果 b 是变量，a 是参数，则 $b=5-2a$，而 $5-2a$ 就是解的表达式，因为 $2a+(5-2a)=5$ 对一切 $a\in$

$\mathbf{R}$ 都真。

对于多变量的方程来说，必须指明哪些是真正的变量，哪些是参数。例如，如果在方程 $3x-2y=5a+1$ 中，真正的变量是 x 与 y，而 a 看成是参数的话，则我们就称它是一个 x 与 y 的方程。

如果在一个有 n 个变量的方程中，没有参数，只有真正的变量，那末方程的解就是一个分别取自相应的变量域的有序 n 数组。如果它有 m 个真正变量 $(0<m<n)$ 而其余的是参数，那末，解是一个有序 m 数组的表达式，并且在其中一般都包含参数。

代数方程 在一个*代数方程*中，变量与变量域中的元素都只能进行所谓的初等代数运算或有理运算，即：加、减、乘、除。关于 x 的代数方程的例子有：$x^3-5x^2-8x+12=0$; $4(x+a)^2(x-b)=c/x$。诸如 $9x-7=4\sqrt{5x-31}$ 的方程也可以归入代数方程这个名目之下。

当然，在这里，系数与解都可以是超越数，例如，关于 x 的代数方程 $\pi x^2-5=12$。方程 $\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}=0$ 不是关于 x 的代数方程，但是只要把概念作适当的推广，可以看成是关于 $\sin x$ 的代数方程。

代数方程			
单变量		多变量	
线性	非线性	线性	非线性
$a+5=12$ $3x-4=27$	$x^3=27$ $x^2+3x-4=0$	$x+y+z=4$ $4a+3b-6=0$	$(x+4)^2+y^2=16$ $x^2+z^2=y^3$

单变量代数方程的一般形式 变量 x 的基本域尽可能取得最大，一般取复数集 $\mathbf{C}$。系数 a_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 可以是实的或复的参数；a_0 称为常数项。方程中出现的变量的最高幂次叫做*方程的次数*。如 $a_n\neq 0$，则方程的次数是 n。如方程中出现几个变量，则对于每一项来说，都得把各变量的次数相加，然后取其最大者作为方程的次数。例如，方程 $\frac{1}{6}x^5+4x-6=0$ 是五次方程，这里 $a_5=\frac{1}{6}$, $a_4=a_3=a_2=0$, $a_1=4$, $a_0=-6$；方程 $x^2y-xy+3x=1$ 是三次方程。

> n 次代数方程的一般形式:
> $$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0,\ x\in\mathbf{C};\ a_i\in\mathbf{C},$$
> $$i=1, 2, \cdots, n;\ a_n\neq 0$$

标准形 一个最高次项系数 $a_n=1$ 的单变量 n 次代数方程叫作**首一方程**，或者说它已化成标准形。这只要从一般形式中除以 $a_n\neq 0$ 就可以得到。

超越方程 包含非代数变量的一切方程称为超越方程。它们中间有指数方程、对数方程与三角方程。正如欧拉所说的，它们的解法必须超越出代数方法。常用的方法是图解法或近似法(见 **I**. 第 10 章“三角方程”)。

等价方程

含有变量的两个方程称为**等价的**，如果它们具有同样的定义域和同样的解集的话。否则就称两个方程**不等价**。

【例】 1. 方程 $4a+2=10$ 与 $6x=12$ 对实数集 $\mathbf{R}$ 来说是等价的，因为每个方程的解集只包含一个数 2。

2. 方程 $a^2=9$ 与 $x^3=27$ 对整数集 $\mathbf{Z}$ 来说是不等价的，因为第一个方程的解集包含着 ± 3，而第二个方程的解集只包含 $+3$。但是，对自然数集 $\mathbf{N}$ 来说，这两个方程是等价的，因为这时每一个方程的解集都只包含数 3。

第二个例子表明，“等价方程”这一概念只有对指定的变量域或由其产生的定义域才有意义，对“相容”、“不相容”、“永真”来说也是如此。对相同的定义域而言，永真方程和不相容方程都是等价的。

等价方程的性质

1. **自反性：任一方程与它自身等价。**

2. **对称性：如果一个方程等价于另一个方程，则后者也等价于前者。**

3. **传递性：如果第一个方程等价于第二个，第二个等价于第三个，则第一个等价于第三个。**

于是，方程的等价性是一种等价关系(见 **II**. 第 1 章)。

等价变换 在含有变量的方程的变换中，应当区别等价变换与不等

价变换。如果方程(1)经过变换后所得到的方程(2)与(1)等价，则我们称(2)是由(1)通过一个等价变换产生的。

如果 S_1 与 S_2 是方程(1)与(2)的解集，那末一个等价变换的特征是 $S_1=S_2$，除此之外，对所有其他情形来说，变换都称为是不等价的。特别对下列两种情形也是如此：当 $S_1\subset S_2$，即变换的结果得出了增根，或者当 $S_1\supset S_2$，即在变换过程中丢失了方程的根。在 $S_1\subset S_2$ 时，哪些是方程(2)的解但却不是方程(1)的解，这可以通过对方程(1)的验算而挑出。

【例】 1．从方程(1) $4x=20;\ x\in\mathbf{N}$ 变换到方程(2) $x=5;\ x\in\mathbf{N}$ 是一个等价变换，因为 $S_1=S_2=\{5\}$。

2．从方程(1)$x=6;\ x\in\mathbf{Z}$ 到方程(2)$x(x+2)=6(x+2);\ x\in\mathbf{Z}$ 的变换是不等价的；因为在此情形下，$S_1=\{6\}$；而 $S_2=\{-2;6\}$，于是 $S_1\subset S_2$。

3．如果把方程(1) $x^3=x^2+12x;\ x\in\mathbf{Z}$ 的两端都除以 x，得到方程(2) $x^2=x+12;\ x\in\mathbf{Z}$，则 $S_1=\{-3,\ 0,\ 4\}$，而 $S_2=\{-3,\ 4\}$；从而 $S_1\supset S_2$，故变换是不等价的。

变换会导致失根，例如，在把方程用一个包含变量的表达式去除或者对方程开方时，就可能出现这种情形。如果在解方程时进行了不等价的变换，则必须进行讨论以确定哪些根可能丢失，哪些根可能是增根。如果只是进行等价变换的话，这类讨论就可以避免。因此，懂得哪些方程的变换是等价变换就是非常重要的了。下面的一些定理给出了若干有关的说明，其中定义域取实数域 $\mathbf{R}$。

命题1：方程 $E_1=E_2$ 等价于方程 $E_1'=E_2'$，如果表达式 E_1 与 E_1'，E_2 与 E_2' 都是等价的话。

按照这一命题，我们可以合并同类项，用数来除或把括号乘出来。例如，方程 $4x+7-2x+15=8x-6x+13-3x$ 与 $2x+22=-x+13$ 是等价的，因为 $S_1=S_2=\{-3\}$。

命题2：方程 $E_1=E_2$ 等价于 $E_2=E_1$，就是说，交换方程的两端，所得到的方程与原来的等价。

命题3：在一个方程 $E_1=E_2$ 的两端加上(或减去)同一表达式 E_3(这个表达式对 $E_1=E_2$ 的整个定义域都要有定义)，则方程 $E_1+E_3=E_2+E_3$(或 $E_1-E_3=E_2-E_3$)等价于原来的方程。

【例】 (1) $8x-29=4x+31 \quad |+(29-4x)$ $\quad E_1=E_2 \quad |+E_3$

$8x-29+(29-4x)=4x+31+(29-4x)$ $\quad E_1+E_3=E_2+E_3$

(2) $4x=60$。

按照命题 3，方程 $8x-29=4x+31$ 与方程 $4x=60$ 等价，事实上，$S_1=S_2=\{15\}$。

下面这个例子表明对 E_3 加以限制的必要性：

(1) $x=4 \quad \quad |+\dfrac{1}{x-4}$

(2) $x+\dfrac{1}{x-4}=4+\dfrac{1}{x-4}$。

这里，(1) 的解集是 $S_1=\{4\}$，而 (2) 的解集却是 $S_2=\emptyset$，这是因为 $\dfrac{1}{x-4}$ 对于数 4 没有定义。由于 $S_1\neq S_2$，所以方程(1)与(2)不等价。

命题 4：如果在一个方程 $E_1=E_2$ 的两端同时乘以（或除以）一个在 $E_1=E_2$ 的整个定义域上都有定义的非零表达式 E_3，则方程 $E_1\cdot E_3=E_2\cdot E_3$（或 $E_1/E_3=E_2/E_3$）与原方程等价。

【例】 (1) $6a=-3 \quad |:6 \quad \quad E_1=E_2 \quad |:E_3$

$6a/6=-3/6 \quad \quad E_1/E_3=E_2/E_3$

(2) $a=-1/2$。

由命题 4，方程 $6a=-3$ 与 $a=-\dfrac{1}{2}$ 是等价的，事实上，$S_1=S_2=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$。

与此相对照，下列变换

(1) $\dfrac{a}{a+4}=\dfrac{-4}{a+4} \quad \Big| \cdot(a+4)$

(2) $a=-4$

是不等价的，因为当 $a=-4$ 时表达式 $(a+4)$ 的值为 0。既然 $S_1=\emptyset$ 而 $S_2=\{-4\}$，所以(1)与(2)是不等价的方程。

上面这些命题需要加以证明，但这里省略掉了。对于乘方或开根来说，不存在这类等价定理，因为从下面的例子可以看出，这些运算会导致不等价的方程：

【例】 (1) $1+x=\sqrt{1-x} \quad |$ 两端平方

$(1+x)^2=(\sqrt{1-x})^2$

$1+2x+x^2=1-x$

(2) $x^2+3x=0$。

对实数集 **R** 来说，方程(1)与(2)是不等价的，因为，在这里 $S_1=\{0\}$ 而 $S_2=\{-3, 0\}$，即 $S_1\neq S_2$。数 -3 是(2)的解，但不是(1)的解。

解方程 解一个方程意味着对给定的变量域求出全部解来，也就是说，求出一个解集，其元素可以是一些数、数对、n 数组、带参数的表达式或者 n 个这类表达式。

在某些特殊情形，解方程的工作可以通过有规则的反复试探的方法来完成，对最简单的方程的情形可以直接读出解，在一般情形则需要通过一种解法来完成，即所谓*求解算法*。这种解法或算法在绝大多数情况下由给定方程的一步步的等价变换所构成，直至最后化到一个其解可以直接读出的方程为止。

解法示范 利用等价性定理，对单变量的线性方程做一个解法示范，变换的目的是得到一个简单的方程，它的解可以直接读出。

$$
\begin{array}{lll}
7x-2-5x & =-4x+3+3-8 & \\
 & & \text{命题 1} \\
2x-2 & =-x-5 & \mid +2+x \\
 & & \text{命题 3} \\
2x-2+2+x & =-x-5+2+x & \\
 & & \text{命题 1} \\
3x & =-3 & \mid :3 \\
 & & \text{命题 4} \\
3x/3 & =-3/3 & \\
 & & \text{命题 1} \\
x & =-1 &
\end{array}
$$

这是一连串等价方程。由于等价具有传递性，最后所得的方程 $x=-1$ 与原方程等价。显然数 -1 是方程 $x=-1$ 的唯一解，因而也是原方程的唯一解。这一连串方程中，每一个方程的解集都是 $S=\{-1\}$。

验算 当一个含有变量的方程解出之后，必须检验它的解集是否正确。如果所有的变换都是等价的，那么验算的目的就是消灭计算上的错误，并且验证解是属于定义域的；如果在解题过程中曾经使用过不等价变换，那么验算可以判明是否产生了增根。但是它不能告诉我们原方程的根是否丢失。

验算必须在原方程中进行。在验算的第一步，要把所有的变量用所求出的数来代替，例如，在上面的解法示范中：

$$7\cdot(-1)-2-5\cdot(-1)=-4\cdot(-1)+3+3\cdot(-1)-8$$
$$-7-2+5=4+3-3-8$$
$$-4=-4。$$

这是个真语句，因此肯定了计算是正确的。在验算的第二步，必须验证所找到的数属于定义域，对本例来说，即实数域 $\mathbf{R}$。由于 $-1\in\mathbf{R}$ 是一个真语句，因此，实际上解集就是 $S=\{-1\}$。

如果变量域取另一个集合，例如，$x\in\mathbf{N}$，则验算的第一步仍然和上面一样，可是在验算的第二步，由于 $-1\notin\mathbf{N}$，因此解集是 $S=\emptyset$。

问题的求解

有待解决的问题可以是用自然的语言来表达的一个数学问题，也可以是来自应用领域（例如自然科学、技术或经济学）的一个实际问题。不论是那种情况，都需要把它转译成数学形式化语言。这将产生一个含有变量的方程，例如，对问题"如果一个自然数的三倍加上 7 等于从 13 中减去这个自然数"，我们引入变量 x 来代替所求的数。则可列出方程：$3x+7=13-x$; $x\in\mathbf{N}$。

通常，问题的"翻译"往往首先得出一些量与代表这些量的变量之间的方程，然后由此得到一个用数与变数表示的方程。

【例】 一棵高 9 码的枞树折断了，还剩 4 码立于地面上。问从倒伏在地面上的树顶到树脚的距离是多少？为了解决这一类用言语表达的问题，可以采用下面的步骤：

1．确定变量，如可能时可以画一个草图(见图 4.1-3)。

设碰在地上的树顶距树脚 x 码。

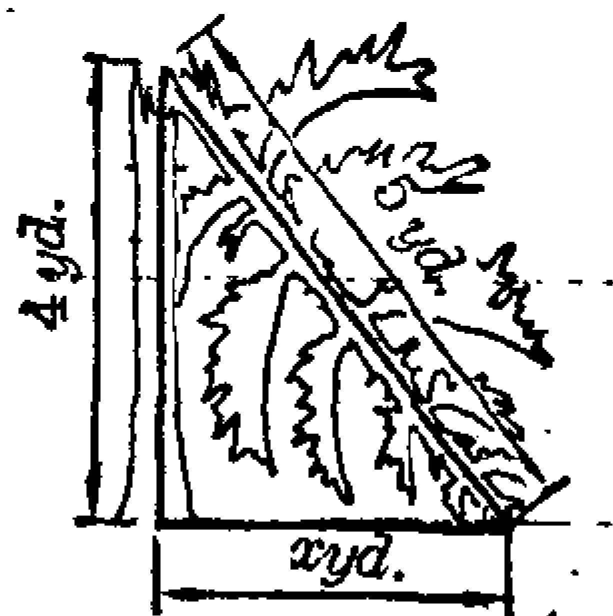


图 4.1-3 折断的枞树

2．建立方程并确定变量域。

我们得出用量表示的方程

$$(4\,码)^2+(x\,码)^2=(5\,码)^2。$$

或者用数与变数来表示的方程：

$$4^2+x^2=5^2，这里\ x\in\mathbf{R}\ 且\ x>0。$$

3．解方程。$x^2=25-16=9$，于是 $x_1=3$，$x_2=-3$。

4．按题意进行验算。根据题意或由此而产生的变量域，显然只有 $x_1=3$ 才适合，实际上，它是原来用语言来表达的问题的解。

5．答案。碰在地上的树顶距树脚3码。

4.2　线性方程

在一个线性方程或一次方程中，所有的变量都只是以一次幂的形式出现，例如 $5x-2=8$，$3a+2b=4$，$4u+5v+3w-1=0$ 分别是一个、两个与三个变量的线性方程。方程 $(x+4)(x+3)=(x+1)(x+7)$ 其中 $x\in\mathbf{R}$，虽然不是线性的，但是它等价于一个线性方程，因为在乘出括号并重新排列之后，可以化为 $x-5=0, x\in\mathbf{R}$；但是，方程 $(x+4)(x+3)=6$，$x\in\mathbf{R}$ 则等价于非线性方程 $x^2+7x+6=0$，$x\in\mathbf{R}$。

分式方程与根式方程也可与线性方程等价。

一个变量的线性方程

一般形式	$ax+b=0$	$x\in\mathbf{R}$；$a, b\in\mathbf{R}$

在一般形式中，x 是变量，a，b 是实参数。ax 叫一次项，b 叫常数项。$a=0$ 的情形在讨论中也包括在内，尽管在下文这种情形可以排除，因为严格说来，当 $a=0$ 时的方程 $ax+b=0$ 不是一个线性方程。通过等

类　型	I．$a\neq0$ b 任意	II．$a=0$ $b\neq0$	III．$a=0$ $b=0$
解	$ax+b=0 \quad \mid -b$ $ax=-b \quad \mid :a$ $x=-b/a$	$0\cdot x+b=0 \quad \mid -b$ $0\cdot x=-b$	$0\cdot x+0=0$ $0\cdot x=0$
解的个数 解集	恰有一解 $S=\{-b/a\}$	无　解 $S=\emptyset$	无限多解 $S=\mathbf{R}$
验算	1．$a\left(-\frac{b}{a}\right)+b=0$ $-b+b=0$ $0=0$ 真 2．$-\frac{b}{a}\in\mathbf{R}$，因为 $a, b\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0$	由于对任一 $x\in\mathbf{R}$，$0\cdot x=0$，然而 $b\neq0$，因此没有任何实数满足方程	任一实数与零的乘积是零，因而任一实数都是方程的解

价变换，任一单变量线性方程可以化成上述一般形式。在解方程 $ax+b=0$ 时必须区别三种情形(见上页表)。

当变量域改变时，自然很有可能 $x=-\dfrac{b}{a}$ 不是一个解或者是一个永真的解。例如，方程 $5x+10=0$, $x\in\mathbf{R}$, 有解集 $S=\{-2\}$; 但如果变量域是 $\mathbf{N}$,则解集是空集: $S=\emptyset$,因为 $-2\in\mathbf{N}$。最后,如果变量域是$\{-2\}$,则由于变量域的唯一元素也是方程的唯一解,因而这个解是永真的。

【例 1】 不包含参数的线性方程:

$$
\begin{aligned}
\frac{4a}{3}+\frac{1}{2}-a &= -\frac{3}{2}+\frac{2a}{3}+\frac{5}{2},\quad a\in\mathbf{Q};\\
\frac{a}{3}+\frac{1}{2} &= \frac{2a}{3}+1 \quad \left|\ -\frac{1}{2}-\frac{2a}{3};\right.\\
-\frac{a}{3} &= \frac{1}{2} \quad \left|\ :\left(-\frac{1}{3}\right);\right.\\
a &= -\frac{3}{2}。
\end{aligned}
$$

验算: 1. $\dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{5}{2}$

$$
\begin{aligned}
-2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2} &= -\frac{3}{2}-1+\frac{5}{2}\\
0 &= 0 \quad 真。
\end{aligned}
$$

2. $-\dfrac{3}{2}\in\mathbf{Q}$ 真。

因此解集是: $S=\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$。

【例 2】 变量 $x\in\mathbf{R}$, 参数 $a, b\in\mathbf{R}$ 的下列方程是一个关于 x 的线性方程。

$$
\begin{aligned}
(x+a)^2-(x-b)^2 &= 2a(a+b);\\
x^2+2ax+a^2-x^2+2bx-b^2 &= 2a^2+2ab \quad |-a^2+b^2\\
2ax+2bx &= a^2+2ab+b^2\\
2x(a+b) &= (a+b)^2 \quad |:2(a+b)。
\end{aligned}
$$

于是必须区别两种不同情形:

情形一: 如 $(a+b)\neq 0$, 相除的结果得出 $x=\dfrac{a+b}{2}$, 因此 $S=\left\{\dfrac{a+b}{2}\right\}$。

验算：1. $\left[\frac{a+b}{2}+a\right]^2-\left[\frac{a+b}{2}-b\right]^2=2a(a+b)$,

$$\left[\frac{3a+b}{2}\right]^2-\left[\frac{a-b}{2}\right]^2=2a^2+2ab,$$

$$\left[\frac{9a^2+6ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{4}\right]=2a^2+2ab,$$

$2a^2+2ab=2a^2+2ab$。对所有的实数 a、b 来说，这是一个真语句。

2. 因 $a, b\in R$，故 $\frac{a+b}{2}\in\mathbf{R}$。

情形二：如 $a+b=0$，即 $b=-a$，则给定方程是 $(x+a)^2-(x+a)^2=2a(a-a)$，它等价于 $0\cdot x=0$，其解集为 $S=\mathbf{R}$。

验算：对任一实参数 $a\in\mathbf{R}$，$(x+a)^2-(x-a)^2=0$ 为真。

在分式方程中，至少要有一个变量在分母上出现一次。

【例3】 $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}=\frac{5}{x}$。

对一切 $x\neq\pm2$ 与 $x\neq0$ 的实数，用最小公分母 $x(x-2)(x+2)$ 去乘方程的两端是一个等价变换，它可以得出一个线性方程：

$$2x(x+2)+3x(x-2)=5(x-2)(x+2)$$

$$2x^2+4x+3x^2-6x=5x^2-20 \quad \Big|\ -5x^2$$

$$-2x=-20 \quad \Big|\ :(-2)$$

$$x=10。$$

必须在原方程中进行验算。

1. $\frac{2}{10-2}+\frac{3}{10+2}=\frac{5}{10}$

$$\frac{2}{8}+\frac{3}{12}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad 真。$$

2. 显然 $10\in\mathbf{R}$ 且 $10\neq\pm2$, $10\neq0$ 真。

因此解集是 $S=\{10\}$。

【例4】 包含参数 a 的分式方程：

$$\frac{x+2a}{2a-x}+\frac{x-2a}{2a+x}=\frac{4a^2}{4a^2-x^2} \quad \Big|\ \cdot(2a-x)(2a+x),\ x\neq2a,\ x\neq-2a$$

$$(x+2a)(x+2a)-(2a-x)(2a-x)=4a^2$$

$$x^2+4ax+4a^2-4a^2+4ax-x^2=4a^2$$

$$8ax=4a^2。$$

情形一：$a\neq0$

$$x=\frac{a}{2}$$

$$S=\left\{\frac{a}{2}\right\}$$

验算表明这是对的。

情形二：$a=0$

$$\frac{x}{-x}+\frac{x}{x}=\frac{0}{-x^2}\quad|\cdot(-x^2)\,|\,x\neq0$$

$$+x^2-x^2=0$$

$$0\cdot x^2=0$$

一切非零实数都是这方程的解。

在根式方程中，至少有一个变量在根式中出现一次。在最简单的情形，可以通过乘方而消除根号，但必须注意这可能是一个引起增根的不等价变换。

【例 5】 $\sqrt[3]{x+2}=3$ 是一个等价于线性方程的根式方程。

$$\sqrt[3]{x+2}=3\quad|\text{两端乘三次幂}$$

$$x+2=27\quad|-2$$

$$x=25$$

$$S=\{25\}。$$

验算：1. $\sqrt[3]{25+2}=3$

$3=3$ 真。

2. $25\in\mathbf{R}$ 真。

【例 6】 如果式中出现几个平方根式时，应将其中的一个先分离出来，然后再各自平方。

$$14=\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}$$

$$\sqrt{x-4}=14-\sqrt{x+24}\quad|\text{两端平方}$$

$$x-4=196-28\sqrt{x+24}+x+24$$

$$28\sqrt{x+24}=224$$

$$\sqrt{x+24}=8$$

$$x+24=64$$

$$x=40$$

$$S=\{40\}。$$

验算：

1. $14=\sqrt{40-4}+\sqrt{40+24}$

   $14=6+8$

   $14=14$　真。

2. $40\in\mathbf{R}$　真。

可以归结为二次方程的分式方程与根式方程将在相应段落中阐述。下面的一些应用题的例子(其中每一种情形都可化成单变量的线性方程)可以认为是常见类型的范例。

【例7】 **混合问题。** 在西门子-马丁炉中有20吨含碳0.5%的钢与5吨含碳5%的生铁混合在一起,问混合物中碳的含量是多少?

设$x\%$是混合物中碳的含量，也就是说，25吨混合物中含有$25\cdot\frac{x}{100}$吨碳。20吨钢中含碳$20\cdot\frac{0.5}{100}$吨，5吨生铁中含碳$5\cdot\frac{5}{100}$吨。由于各部分含碳量的总和应当等于总的含碳量，于是得出方程$25\cdot\frac{0.5}{100}+5\cdot\frac{5}{100}=25\cdot x\cdot\frac{1}{100}$，由此可求出混合物的含碳量1.4%。

【例8】 **分配问题。** 三台推土机每天一共运土31000立方米，第二台推土机比第三台多运土1000立方米,第一台则比第二台运土量的两倍少4000立方米,问各台推土机每天的运土量是多少?

如果第三台推土机运土x立方米，则第二台运土$(x+1000)$立方米，而第一台运土$[2(x+1000)-4000]$立方米。三台推土机在一起运土31000立方米$=\{x+(x+1000)+[2(x+1000)-4000]\}$立方米。

计算后可得出$S=\{8000\}$。这意味着：第三台推土机运土8000立方米,第二台9000立方米,第一台14000立方米,加起来正好是31000立方米。

【例9】 **简单运动问题。** 一列长度为250码的火车以每小时50英里的速度穿过一条长200码的隧道，问它穿过这条隧道要用多少时间?

设x是从火车头开始进入隧道到最后一节车厢离开隧道所经历的时间。在这段时间里最后一节车厢移动了$\frac{50\cdot 1760}{60\cdot 60}\cdot x$码，而这是隧道的长度加上列车的长度，

$$200+250=\frac{50\cdot 1760}{60\cdot 60}\cdot x;\quad S=\{18.4\}。$$

穿越隧道需要的时间为18.4秒。

【例10】 较复杂的运动问题。一只顺流的游艇在两小时内到达其目的地；在逆流时，用同样的轮机功率走同样距离则需要三小时；在静水中的速度是 250 码/分；求水流速度。

设水的流速是 x 码/分，则船的顺流速度是 $(250+x)$ 码/分，走了 120 分钟；而逆流速度是 $(250-x)$ 码/分，走同样距离要用 180 分钟。因而方程是 $(250+x)\cdot 120=(250-x)\cdot 180$。水流速度是 50 码/分。

两个变量的线性方程

有两个变量的线性方程（例如，$4x+3y-10=0$，其中 $x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{R}$）的解集是一切经代入后可以使方程成为一个真语句的有序实数对 (x, y)；例如 $(1, 2)$ 就是一个解，因为 $4\cdot 1+3\cdot 2-10=0$ 是个真语句。同样，$\left(0, \frac{10}{3}\right)$ 与 $\left(+3, \frac{2}{3}\right)$ 也是方程的解。如果要求 x、y 必须是自然数，那么解就是能满足方程的自然数对；当然也可以对 x、y 规定别的变量域。

二元一次方程组 线性代数提供了有 n 个变量的 m 个线性方程的解法。如果要求 n 个变量同时满足 m 个方程，则称它是一个具有 n 个变量、由 m 个方程构成的方程组。这种方程组的每一个解是一个有序的 n 数组。这里只打算详细讨论 $m=n=2$ 的情形（对任意的 m 与 n，请参看**II**. 第 4 章），这类方程组的每一个解是一个有序数对 (x, y)。

二元线性方程组的一般形式	(1) $a_1x+b_1y=c_1$ (2) $a_2x+b_2y=c_2$	变量 x, $y\in\mathbf{R}$ 参数 a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, $c_2\in\mathbf{R}$

解二元一次方程组 解一个二元一次方程组，就是要找出所有同时满足第一个与第二个方程的有序数对 (x, y)；换句话说，必须定出两个方程的解集 S_1 与 S_2 的交集 S。这里，可能的情形只有下列三种：

1. $S=S_1\cap S_2=\{(a, b)\}$，方程组有唯一解；
2. $S=S_1\cap S_2=\emptyset$，方程组是不相容的，即矛盾的；
3. $S=S_1\cap S_2=S_1$ 或 S_2，方程组不能唯一地解出，这时它有无穷多组解。

最后这种情形当且仅当两个方程线性相关时，即一个方程是另一方程的实数倍时出现。在二元一次方程组的数值解法中，常用的一些初等解法有代入法、比较法与相加法。它们的目的都是消去一个变量，使得只

有两个单变量的线性方程的每一个方程都能解出。在代入法中，先把一个方程对其中一个变量解出来，然后把所得的表达式代入另一个方程。

【例1】 (1) $x+y=-3$ ⟶ $x+(2x+6)=-3$
(2) $-2x+y=6$ ⟶ $y=2x+6$ ⟶ $3x+9=0$
y 被消去 $x=-3$
$y=2\cdot(-3)+6$
$y=0$　　y 被求出

验算必须对原来的两个方程都进行:

1. (1) $-3+0=-3$ 真　2. $-3\in\boldsymbol{R}$ 真和 $0\in\boldsymbol{R}$ 真
(2) $0-2\cdot(-3)=6$ 真

数对 $(-3, 0)$ 是这个方程组的唯一解，解集是 $S=\{(-3, 0)\}$。

用比较法时，先对照同一个变量来解出两个方程，然后用等号连接所得的两个表达式；这个方法的依据是表达式等价关系的传递性。

【例2】 (1) $x-2y=4$ ⟶ $x=4+2y$
(2) $2x+5y=35$ ⟶ $x=(35-5y)/2$
$x-2\cdot3=4$　　$4+2y=(35-5y)/2$，这里 x 被消去
$x=10$　　$y=3$
解集是 $S=\{(10, 3)\}$。

相加法。每个方程在乘以一个适当的数以后总可以使两方程中的两个变量之一是有相反的系数。把两个方程相加，一个变量就消去了。

【例3】 (1) $12x-8y=4$ $\cdot 3$ ⟶ (1′) $36x-24y=12$
(2) $18x-15y=3$ $\cdot(-2)$ ⟶ (2′) $-36x+30y=-6$
$12x-8\cdot1=4$　　$0\cdot x+6y=6$
$x=1$　　$y=1$
解集是 $S=\{(1, 1)\}$。

对具体问题来说，要凭经验来确定哪一种方法是最合适的。

为了对两个变量 x、y 的二元一次方程组的解作个小结，必须区别两种主要情形:

I. 对 $a_1=a_2=b_2=b_1=0$ 来说，如果 $c_1=c_2=0$，则任一实数对是方程组的解。但如果 c_1 或 c_2 中有一个数不等于 0 时，则方程组无解。

(1) $a_1x+b_1y=c_1$
(2) $a_2x+b_2y=c_2$ $\quad x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}$。

II. 如果系数 a_1、a_2、b_1、b_2 中至少有一个不等于0，则有下列三种可能情形：

方程	情形一	情形二	情形三
	线性独立且相容 例如： (1) $4x+y=12$ (2) $x+2y=10$	线性相关 例如： (1) $4x+y=12$ (2) $8x+2y=24$	不相容 例如： (1) $4x+y=12$ (2) $4x+y=10$
解的个数	唯一解(2, 4)	无穷多组解，例如： (1, 8), (2, 4), (3, 0), (4, −4), …	无解
解集	$S=\{(2, 4)\}$	$S=\{(x,y)\mid 4x+y=12\}$	$S=\emptyset$
图象说明	两相交直线，一个交点	两条重合的直线，无穷多个公共点	两条相异的平行直线，没有公共点

【例 4】

(1) $4y(10x-3)-5x(8y+7)+165=0$
(2) $9x(4y-7)+3y(5-12x)=-114$ 乘出括号并重排

(1′) $-35x-12y=-165 \quad |\cdot 5$
(2′) $-63x+15y=-114 \quad |\cdot 4$

(1″) $-175x-60y=-825$
(2″) $-252x+60y=-456$ $\quad +$

$-427x=-1281 \quad |:(-427)$
$x=3$

相加法
$-35\cdot 3-12y=-165$
$y=5$，

验算表明上述计算正确无误。这里 $S=\{(3, 5)\}$。

【例 5】 方程以分数形式给出，应注意分母必须不等于零，解集是 $S=\{(3, 2)\}$。

(1) $\dfrac{x+y+1}{x+y-1}=\dfrac{3}{2}$； (2) $\dfrac{x-y+1}{x+y+1}=\dfrac{1}{3}$

(1′) $x+y=5$
(2′) $2x-4y=-2$

【例6】在下列方程中，变量是x、y，a与b是实参数，解集是$S=\{(a+b,\ a-b)\}$。

$$\begin{cases}(1)\ x+y=2a\\(2)\ x-y=2b\end{cases}$$

$$2x=2a+2b \qquad 2y=2a-2b$$
$$x=a+b \qquad y=a-b$$

【例7】由于第二个方程是第一个方程的倍数，因此任一满足第一个方程的有序数对也能满足第二个方程。方程有无穷多组解。

$$\begin{cases}(1)\ v-2n/3=1\\(2)\ 6v-\ \ 6=4n\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}(1')\ 3v-2n=3\\(2')\ 6v-4n=6\end{cases}$$

【例8】两个方程是不相容的，方程组无解。$S=\varnothing$。

$$\begin{cases}(1)\ 4a+3b=7\\(2)\ 4(a-2)=-3b\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}(1')\ 4a+3b=7\\(2')\ 4a+3b=8\end{cases}$$

导致线性方程组的应用题

【例9】**分配问题**。用一只热水龙头和一只冷水龙头往水池里放水。如果把热水龙头打开三分钟，冷水龙头打开一分钟，则有50夸特水流进水池。但若热水龙头打开一分钟而冷水龙头打开两分钟，则有40夸特水流进去。问每只龙头在一分钟内流入水池的水有多少？

引入变量，设热水龙头每分钟放水x夸特，冷水龙头每分钟放水y夸特，于是我们得出下列方程组及其解答：热水龙头每分钟放水12夸特；冷水龙头每分钟放水14夸特。

(1) $3x+y=50$,　　　　　(2) $x+2y=40$。

【例10】**混合物问题**。为了防止汽车汽缸里的水冻结与冷却系统冻坏，要在冬天开始时在汽车水箱里密度为1的水中注入密度为1.135的防冻液。如果混合液的密度为1.027，则防冻性能可以维持到$-10°C$（相当于$14°F$）。为了得到100夸特的这种混合液，问要用多少夸特防冻液和多少夸特水进行混合？

引入变量，设所需防冻液的量为x夸特，水的量为y夸特，则得到下列方程组并求出它的解是：为了获得所需的混合物，要用20夸特防冻液与80夸特水。

$$x+y=100,$$
$$1.135x+y=1.027\cdot100。$$

线性方程与线性方程组的图解法

为了用图解法来解方程，需要建立解与某些点集之间的一一对应。通过某个坐标系来表示这些点集，可以得到方程的近似解。这里，所用的坐标系是笛卡尔直角坐标系。

单变量线性方程的图解法 为了用图象办法来解方程 $ax+b=0$，其中 $a\neq0$，我们考察由方程 $y=ax+b$，$a\neq0$ 来表示的函数，它的图象是一条直线(参看 I.第 5 章)。函数的零点，即该直线与 x 轴交点的横坐标就是所给方程的解。

【例 1】 为了解方程 $2x-6=0$，可以考察函数 $y=2x-6$。它的图象是一条直线，它与 x 轴交于点 $P=(3,0)$，故 3 是方程 $2x-6=0$ 的解(见图 4.2-1)。

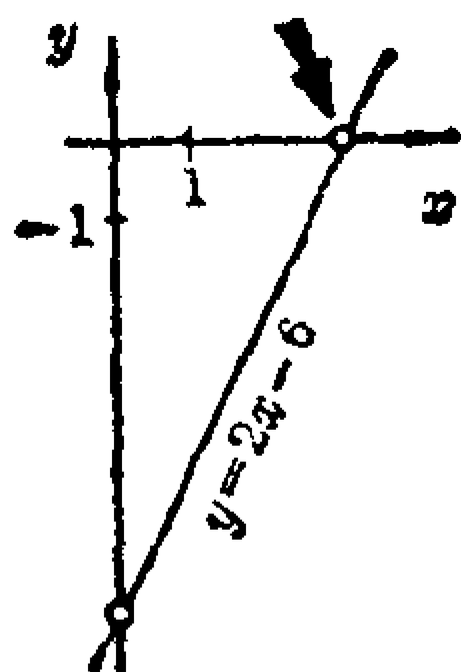


图 4.2-1 方程 $2x-6=0$ 的图解法

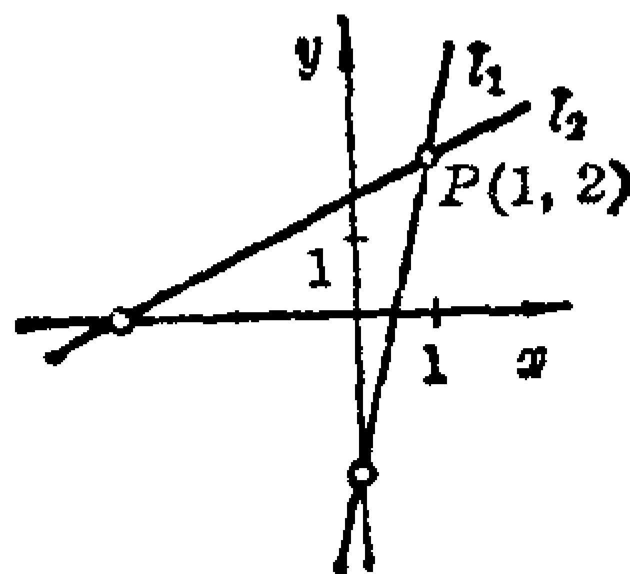


图 4.2-2 方程组 $\begin{cases}4x-y=2\\x-2y=-3\end{cases}$ 的图解法

二元一次方程组的图解法 用图象表示两个方程的解集，然后确定它们的交集。为此目的，要把所给的方程看成是函数并作出这些函数的图象，一般说来它们是直线。位于第一条直线上的一切点，并且也只有这些点的坐标能满足第一个方程。同理，第二条直线上的一切点，而且也只有它们的坐标能满足第二个方程。我们根据图形可以确定同时位于第一条和第二条直线上的一切点，也就是它们的交点。每一个这种点的坐标与方程组的一个解之间成一一对应。根据直线的相对位置，交点的个数可以是正好一个、是无穷多个或者没有交点；也就是说，方程组可以唯一

地解出、不能唯一地解出或者无解。

【例2】 为了用图象法解方程组，要作出与这些方程相应的函数图形。交点 $P=(1, 2)$ 表明 $(1, 2)$ 是这个方程组的唯一解(见图 4.2-2)。

【例3】 在用图象法解方程时，我们得到两条重合直线。因而位于直线 $-x+y=2$ 上的每一点的坐标都是方程组的解(见图 4.2-3)。

(1) $4x-y=2$	(1) $-x+y=2$
(2) $x-2y=-3$	(2) $-3x+3y=6$

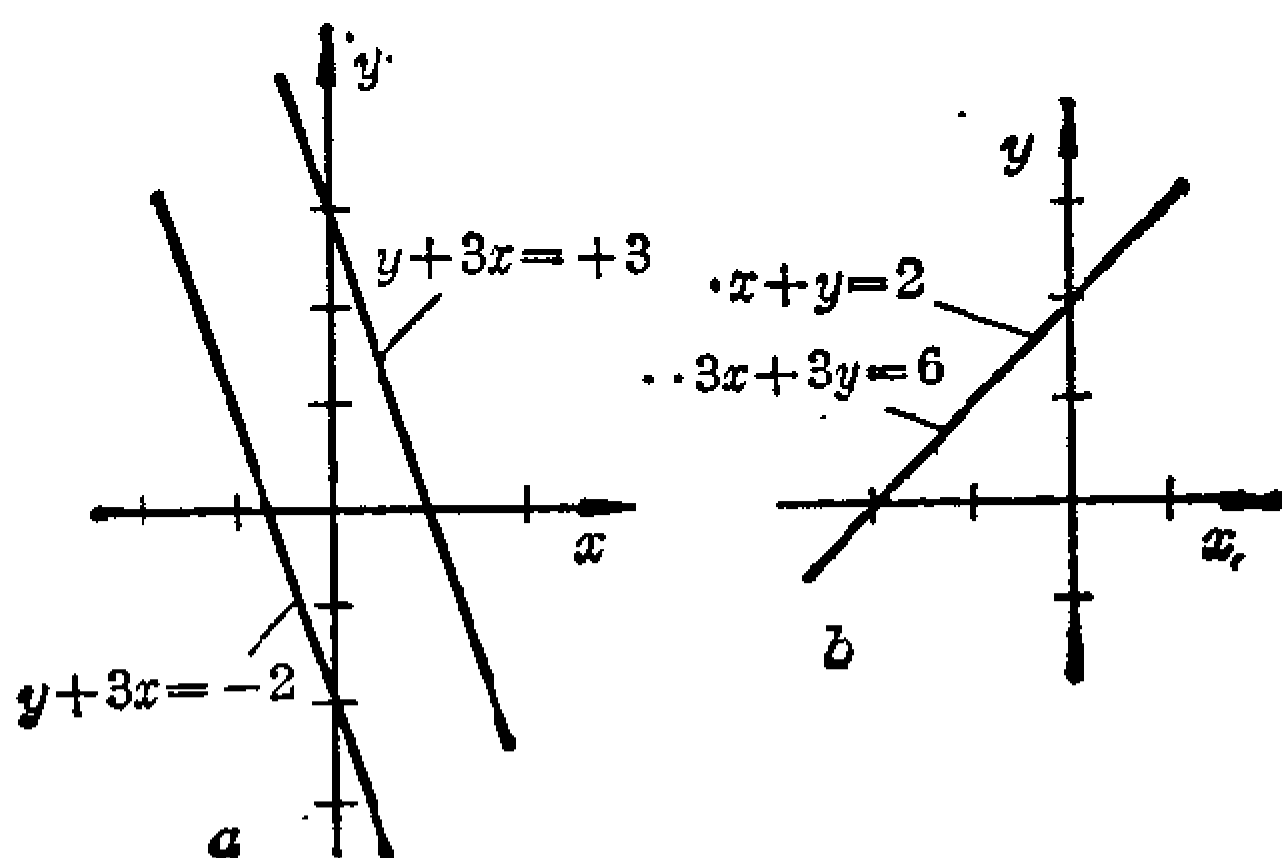


图 4.2-3　线性方程组

a) 无解； b) 有无穷多组解

方程(1) $y+3x=3$ 与(2) $y+3x=-2$ 的图形是两条平行线，即没有交点，所以解集 $S=\emptyset$。

4.3　二次方程

在一个一元二次方程中，变量的二次幂至少出现一次，并且更高次的幂都不出现，例如，$2x^2+5x=16-x$ 是一个关于 x 的二次方程，$a^2=\frac{a^2}{2}+6$ 是一个关于 a 的二次方程。分式方程 $\frac{3}{u-2}+\frac{8}{u+3}=2$ 在两端乘以最小公分母 $(u-2)(u+3)$ 并重新排列后，可以化为二次方程 $2u^2-9u-5=0$。如果一个方程中出现几个未知数，其中至少有一项的幂指数之和等于二，而更高次幂并不出现，则这样的方程也叫二次方程；例如，$x^2+y^2=4$，$x\cdot y=$ 常数，都是二元二次方程。

以下处理方法是关于一元二次方程的。

变量为 x 的一元二次方程的一般形式	$Ax^2+Bx+C=0$	$x\in\mathbf{R}$; $A, B, C\in\mathbf{R}$; $A\neq 0$

这里，x 是变量，A, B, C 是实参数。Ax^2 这一项叫二次项，Bx 叫线性项，C 叫常数项。$A\neq 0$ 是必要的，否则方程将会是一次方程。

用 $A\neq 0$ 去除一般形式 $Ax^2+Bx+C=0$ 的两端可以得出一个与之等价的方程 $x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0$，如果采取简便写法 $\frac{B}{A}=p$, $\frac{C}{A}=q$，就可以得出标准形式。

二次方程的标准形式	$x^2+px+q=0$	$x\in\mathbf{R}$; p, $q\in\mathbf{R}$

其特点是二次项的系数为 $+1$。如果没有缺项，即 $p\neq 0$, $q\neq 0$，就叫作已化成标准形的混合型二次方程。

I. $p=0$; $q=0$	II. $p=0$; $q\neq 0$	III. $p\neq 0$; $q=0$	IV. $p\neq 0$; $q\neq 0$
$x^2=0$	$x^2+q=0$	$x^2+px=0$	$x^2+px+q=0$
缺常数项与一次项的纯二次方程	纯二次方程	缺常数项的混合型二次方程	混合型二次方程
特殊情形			

二次方程的数值解法

I. 缺常数项的纯二次方程 方程 $x^2=0$ 或 $x\cdot x=0$ 只可能有解 $x_1=x_2=0$，即解集 $S=\{0\}$，因为对 $x\gtrless 0$，都有 $x^2>0$，反之亦然。

II. 纯二次方程 当 $q>0$ 时，方程 $x^2+q=0$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 内无解，因为这时左端的表达式永远满足 $x^2+q>0$。

如果 $q<0$，则 $-q>0$，此时表达式 x^2+q 由平方差公式 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 化为 x 的两个一次表达式的乘积，即 $x^2+q=x^2-(\sqrt{-q})^2=(x-\sqrt{-q})(x+\sqrt{-q})$。故方程 $(x-\sqrt{-q})(x+\sqrt{-q})=0$ 与给定方程等价。由于当且仅当 $E_1=0$ 或 $E_2=0$ 时两个表达式的乘积 $E_1\cdot E_2$ 为零，因而从等价方程可得出 $x-\sqrt{-q}=0$ 或 $x+\sqrt{-q}=0$。所以纯二次方程的解可归结为两个线性方程的解。从第一个方程可得出 $x_1=\sqrt{-q}$，

从第二个方程可得出$x_2=-\sqrt{-q}$。因此给定的方程有两个解x_1与x_2，可以写成复合解的形式：$x_{1,2}=\pm\sqrt{-q}$。解集S是两个线性方程的解集的并集，即$S=\{\sqrt{-q},\ -\sqrt{-q}\}$。

验算：1. $(\pm\sqrt{-q})^2+q=0$　　2. 如$q<0$，则$\pm\sqrt{-q}$

$-q+q=0$　　是实数。

$0=0$　真。

但是如果我们把变量域取为复数集$\mathbf{C}$，则当$q>0$时，方程有两个只相差符号的虚根，只要把表达式x^2+q分解为$(x+\sqrt{-q})(x-\sqrt{-q})$，从形式上看来，解法与上面所述者相同。

纯二次方程	$x^2+q=0$ $q\in\mathbf{R}$	求解公式 $x_{1,2}=\pm\sqrt{-q}$	$x\in\mathbf{R}$	$q\leqslant 0$；解是实数 $q>0$；无实数解
			$x\in\mathbf{C}$	$q>0$；解是虚数

【例1】　$x^2-4=0$；$x\in\mathbf{R}$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{4}$

$x_{1,2}=\pm 2$；$S=\{-2,\ +2\}$。

验算：1. $(\pm 2)^2-4=0$

$4-4=0$　真。

2. $+2\in\mathbf{R}$　真

$-2\in\mathbf{R}$　真。

【例2】　$x^2+144=0$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-144}$

对$x\in\mathbf{R}$无解，因$\sqrt{-144}\,\overline{\in}\,\mathbf{R}$；

故$S=\emptyset$。

对$x\in\mathbf{C}$，则$x_{1,2}=\pm 12i$，

故$S=\{-12i,\ +12i\}$。

验算：1. $(\pm 12i)^2+144=0$

$-144+144=0$　真。

2. $\pm 12i\in\mathbf{C}$　真。

III. 缺常数项的混合型二次方程　把x提到括弧前面就可以将方程$x^2+px=0$变换成等价方程$x(x+p)=0$，由此可得$x=0$或$x+p=0$。

第一个方程只有唯一解 $x_1=0$，第二个方程的解则是 $x_2=-p$。因此缺常数项的混合型二次方程总是有两个实数解，其中一个是零；解集是 $S=\{0,\ -p\}$。

验算：$0^2+p\cdot 0=0$ 对一切 $p\in\mathbf{R}$ 都真；

$(-p)^2+p(-p)=0$ 对一切 $p\in\mathbf{R}$ 都真。

缺常数项的混合型二次方程	$x^2+px=0;$ $p\neq 0$	$x\in\mathbf{R}$ $p\in\mathbf{R}$	$S=\{0,\ -p\}$

【例】 $7x^2-2x=0$

$x(7x-2)=0$

$x\left(x-\dfrac{2}{7}\right)=0$

$S=\left\{0,\ \dfrac{2}{7}\right\}$

验算：

对 x_1：$7\cdot 0-2\cdot 0=0$ 真，$0\in\mathbf{R}$ 真；

对 x_2：$7\cdot\left(\dfrac{2}{7}\right)^2-2\cdot\dfrac{2}{7}=0$，

$\dfrac{4}{7}-\dfrac{4}{7}=0$ 真，$\dfrac{2}{7}\in\mathbf{R}$ 真。

IV. 混合型二次方程 $x^2+px+q=0$ 解题的思想是在添加适当的一项后，把表达式 x^2+px 配成一个完全平方，从而把方程化为一个纯二次方程。这里添加的**二次附加项**是 $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$，即标准形中一次项 px 的系数之半的平方。为了对给定方程作等价变换，必须加上 $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$。例如，对方程 $x^2+2x-5=0$ 来说，$p=2$，故 $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2=1$。在加上 $1-1$ 以后，原方程变成 $x^2+2x+1-5-1=0$ 或 $(x+1)^2-6=0$，这就化成了关于 $(x+1)$ 的**纯二次方程**，由它的解即可得出原方程的解，即从 $(x+1)_{1,2}=\pm\sqrt{6}$ 可得出 $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{6}$。为了使这纯二次方程在下面的**解法**中总是有解，暂时将变量域取复数集 $\mathbf{C}$。

解　　法： $x^2+px+q=0,\quad \left|+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2\right.$

二次附加项： $x^2+px+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+q=0,$

纯二次方程： $\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\left[\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q\right]=0,$

它 的 解： $\left(x+\dfrac{p}{2}\right)_{1,2}=\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q},$

解的公式：$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$。

验算：1. $\left[-\frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]^2 + p\left\{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\} + q = 0,$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm p\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q - \frac{p^2}{2} \pm p\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + q = 0,$$

$$\frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + q = 0,$$

$$0 = 0 \text{ 真。}$$

2. $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \in \mathbf{C}$ 真。

混合型二次方程	$x^2+px+q=0$ $p, q \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{C}$		求根公式 $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
判别式	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$	$x \in \mathbf{R}$	I. $D>0$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$
			II. $D=0$	$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$
			III. $D<0$	无实数解

求根公式也包括了各种特殊情形下解的公式，这可以把 $p=0$ 或 $q=0$ 或两者都等于 0 代进去而得到验证。二次方程一经化成标准形式，即可应用求根公式。

判别式 显然从求根公式中可以看到，二次方程的解的性质由根的被开方数 $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ 来决定，它叫作判别式。如果 p 与 q 是实参数，并且仍以实数集 $\mathbf{R}$ 作为变量域，则必须区别三种情形：(I) 有两个相异的解，(II)有两个相等的解，(III)没有实数解。

如果变量域取为复数集 $\mathbf{C}$，则当 $D<0$ 时将出现两个共轭复数解，如果变量域取为实数集的某个子集，则解集就可能不相同。

【例 1】 $x^2+4x-5=0$; $x \in \mathbf{R}$ 验算：

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2+5}$ 对 x_1:

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9}$ $1^2+4\cdot1-5=0$

$x_{1,2} = -2 \pm 3$ $1+4-5=0$ 真 $|1 \in \mathbf{R}$ 真；

$x_1=1$　　对 x_2:

$x_2=-5$　　$(-5)^2+4\cdot(-5)-5=0$

$S=\{-5, 1\}$　　$25-20-5=0$ 真 $|-5\in\mathbf{R}$ 真。

这里有两个相异的实数解。但如果所取的变量域不同，譬如说，取 $x\in\mathbf{N}$，则 $S=\{1\}$，因 $-5\bar{\in}\mathbf{N}$。

【例 2】 $2x^2-16x+36=0$; $x\in\mathbf{R}$;　　验算:

$x^2-8x+18=0$　　$2(4\pm i\sqrt{2})^2-16(4\pm i\sqrt{2})+36=0$

$x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-18}$　　$2(16\pm 8i\sqrt{2}-2)-64\mp 16i\sqrt{2}+36=0$

$x_{1,2}=4\pm\sqrt{-2}$　　$32\pm 16i\sqrt{2}-4-64\mp 16i\sqrt{2}+36=0$

$0=0$ 真。

$S=\emptyset$; 无实数解，因为 $\sqrt{-2}\bar{\in}\mathbf{R}$。但如果取 $x\in\mathbf{C}$，则有两个相异复数解，$S=\{4+i\sqrt{2}, 4-i\sqrt{2}\}$。

【例 3】 方程 $x^2-14x+49=0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 有两个相重的实数解; $S=\{7\}$，验算表明恰是如此。

【例 4】 对 $x\in\mathbf{R}$ 分式方程 $\frac{x-1}{x+1}=\frac{4x-3}{5x-10}-\frac{7}{10}$ 乘以最小公分母 $10(x+1)(x-2)$（其中 $x\neq-1$ 与 $x\neq 2$）后，可等价地变换成二次方程 $9x^2-39x+12=0$。这个分式方程的解集是 $S=\left\{\frac{1}{3}, 4\right\}$。

【例 5】　　验算:

$\sqrt{x+2+\sqrt{2x+7}}=4$　|平方　　对 x_1: $\sqrt{21+2+\sqrt{2\cdot 21+7}}=4$,

$x+2+\sqrt{2x+7}=16$　　$\sqrt{30}=4$ 假;

$\sqrt{2x+7}=14-x$　|平方　　对 x_2: $\sqrt{9+2+\sqrt{2\cdot 9+7}}=4$

$2x+7=196-28x+x^2$,　　$4=4$ 真。

$x^2-30x+189=0$,

$x_1=21$,

$x_2=9$。

这里，两端平方是一个不等价变换，正如验算所表明的，只有 $x_2=9$ 是原方程的解，所以 $S=\{9\}$。

并不是每一个包含二次根式的方程都能化为二次方程。一切具有整数次幂的根号总是可以去掉。例如：方程 $\sqrt[3]{(x+7)^2}-\sqrt[3]{x+7}=6$ 当 $x\in\mathbf{C}$ 时的解集 S 是 $\{-15, 20\}$。

导致二次方程的应用题

【例1】 **回声测深。** 为了测量海的深度，要用回声测深的办法。设声源位于 A 处，接收装置位于 B 处(见图4.3-1)。船的宽度为52.5英尺，声音在水中的传播速度是4956英尺/秒，假定在测量时船是静止不动的。问如果时差为0.1秒，水深是多少?

设水深 x 英尺，声音到海底所经过的距离是 $\frac{(4956\cdot 0.1)}{2}$ 英尺。

由毕达哥拉斯定理可以得出:

$$x^2=(247.8)^2-\left(\frac{52.5}{2}\right)^2$$

$$=60715.8,$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{60715.8}\approx 246.3。$$

故水深大约为246英尺。负值没有物理意义。

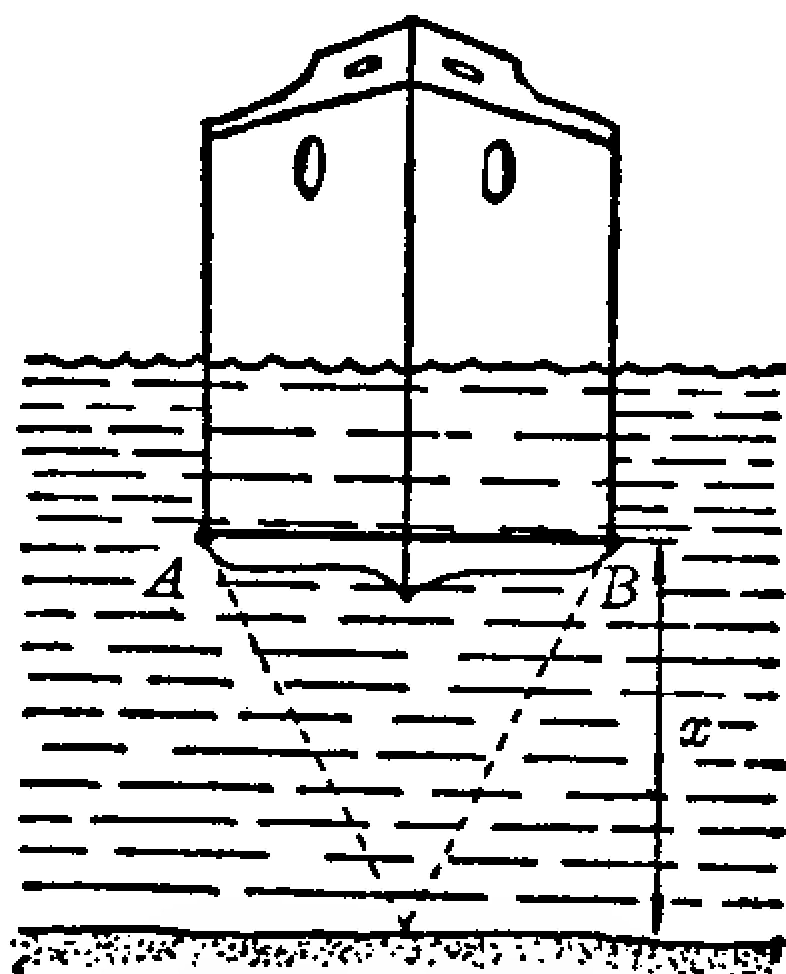


图4.3-1　回声测深

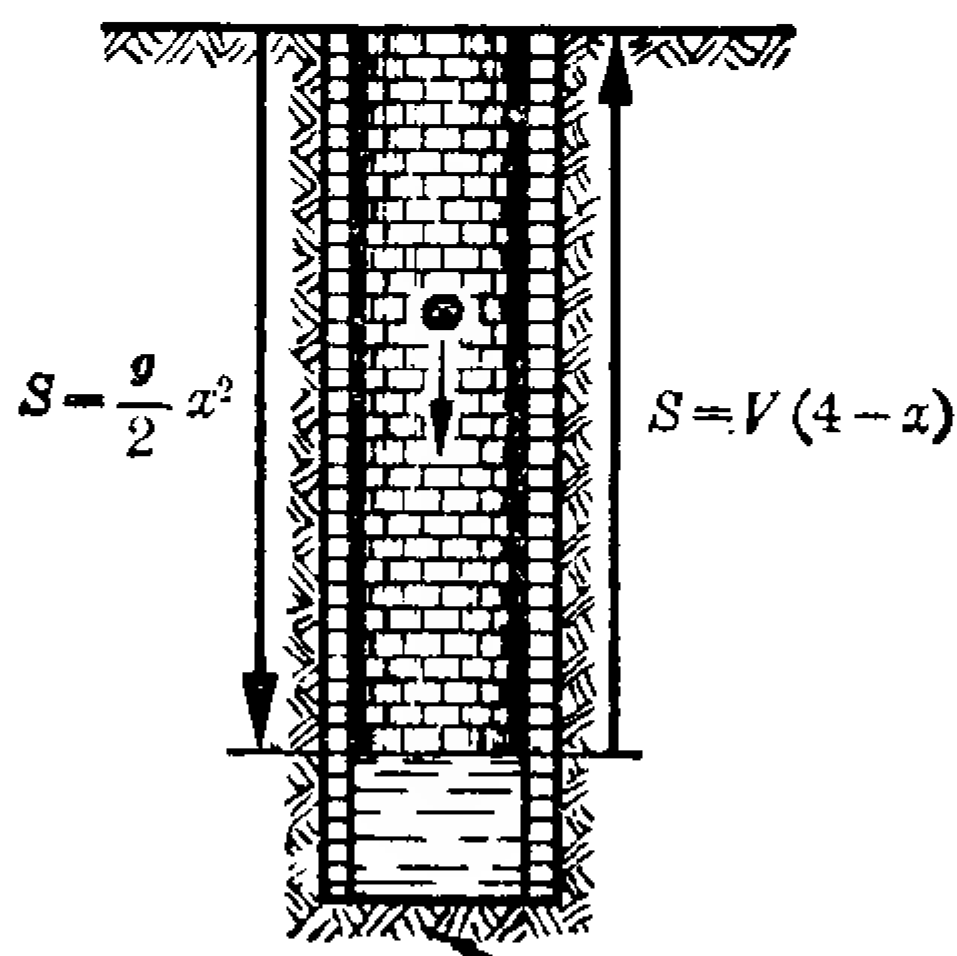


图4.3-2　一口井的深度

【例2】 **井的深度。** 为了确定井的深度，可以在井里丢下一块石头，然后测量一下从下落瞬间到听见它碰到井水时的时间间隔。设这一时间间隔是4秒钟(见图4.3-2)。声音的速度取作 $V=1092.9$ 英尺/秒，重力加速度 $g=32$ 英尺/秒^2。问从井口到水面的距离是多少?

设 x 是石头从下落开始到碰到水面所经过的时间，则它所经过的距离是 $16x^2$ 英尺，声音用 $(4-x)$ 秒走完这段回程，在这段时间内声音走过的距离是 $(4-x)\cdot 1092.9$ 英尺，由于这两个距离是相等的，于是得到二次方程

$$16x^2=(4-x)\cdot 1092.9 \quad 或 \quad x^2+68.3x-273.2=0。$$

从而可以求出水深约为 230 英尺，因为只有二次方程的正数根 $x_1\approx 3.79$ 秒才是有物理意义的。

【例 3】 **测试硬度。** 在应用勃列尼尔(Brinell)压力法测试材料硬度时，已知半径为 $d=2r$ 的一个小钢球在被测试材料里压进去的深度 h，可以从圆弧状压痕的直径 $\delta=2\rho$ 中计算出来(见图 4.3-3)。设钢球的直径是 $d=2r=10$ 毫米，球形压痕的直径是 $\delta=2\rho=6$ 毫米时，问压入深度 h 是多少?

设压入深度为 h (单位是毫米)。由毕达哥拉斯定理可得出 $r^2=(r-h)^2+\rho^2$ 或 $h^2-2rh+\rho^2=0$，在两个根 $h_{1,2}=r\pm\sqrt{r^2-\rho^2}$ 中只有 $h_2=r-\sqrt{r^2-\rho^2}$ 能用，因为当深度 $h>r$ 时，球形压痕总是满足关系式 $\rho=r$，本方法就不再适用了。把 r 与 ρ 用已知的数据代入，就可以求出 $h=1$ 毫米。

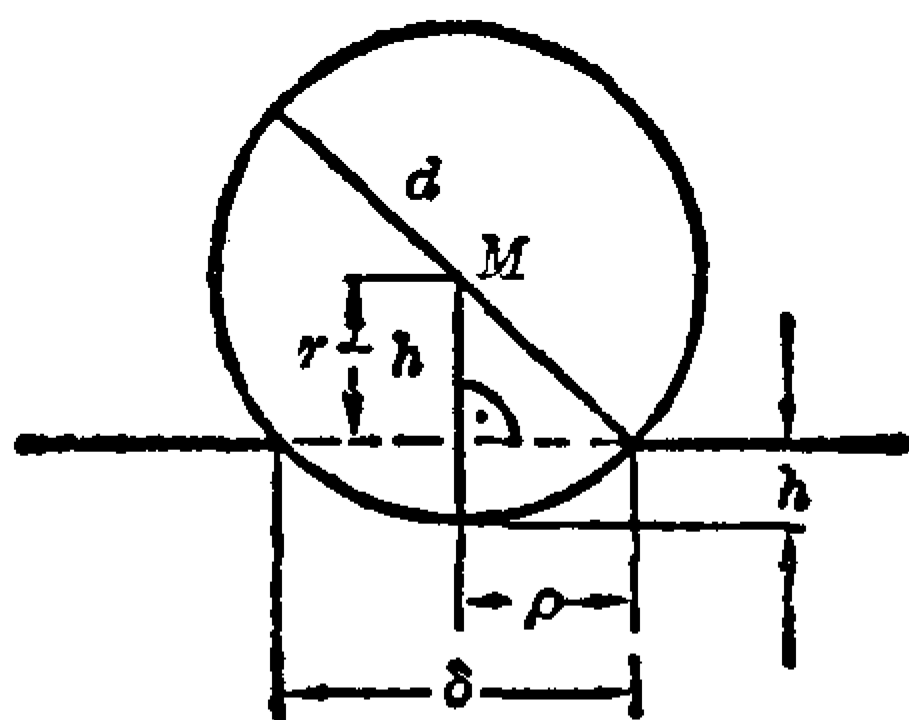


图 4.3-3 勃列尼尔硬度试验

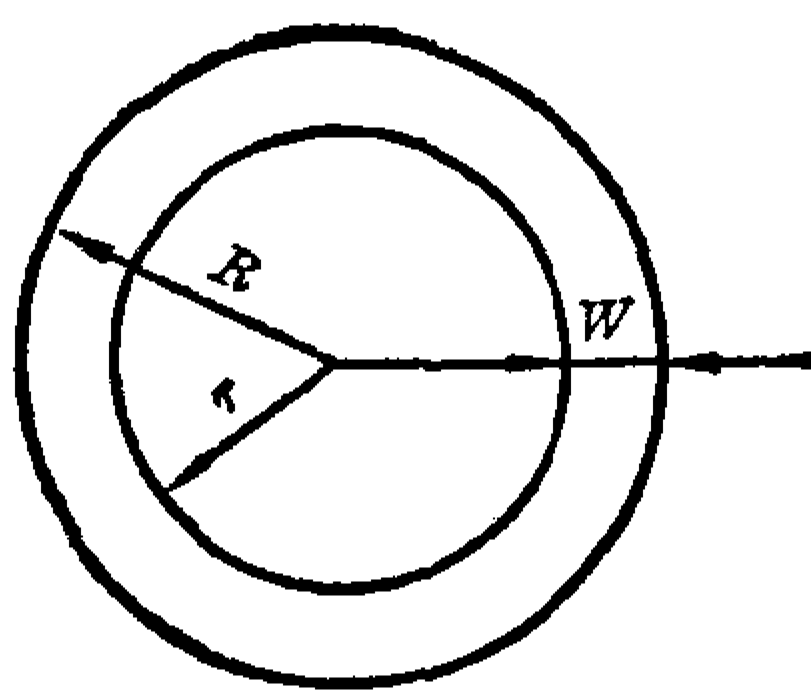


图 4.3-4 一只空心球体的截面

【例 4】 **立体测量问题。** 一只空心钢球的质量 $M=160.72$ 磅，球壁厚度是 $w=2.36$ 英寸(见图 4.3-4)。如果密度是 $\rho=0.28$ 磅/立方英寸，求其内径 r 与外径 R。

设内径 r 的长度为 x 英寸，则外径是 $R=x+w$。空心球的质量是 $M=\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)\rho$，对本题来说是 $M=\frac{4}{3}\pi[(x+w)^3-x^3]\rho$。从而得出二次方程

$$x^2+wx+\frac{w^2}{3}-\frac{M}{4\pi w\rho}=0。$$

其解为

$$x_{1,2}=-\frac{w}{2}\pm\sqrt{\frac{M}{4\rho w\pi}-\frac{w^2}{12}}。$$

这里，只有

$$x_1=-\frac{w}{2}+\sqrt{\frac{M}{4\rho w\pi}-\frac{w^2}{12}}$$

才是问题的解，所求的外径与内径分别是 $R=5.52$ 英寸，$r=3.16$ 英寸。

二次方程的图解法

经平移的标准抛物线 二次函数 $y=x^2+px+q$ 或 $y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ 的零点给出了二次方程 $x^2+px+q=0$ 的解。这个函数的图象是一条标准抛物线在 x 轴方向平移 $-\frac{p}{2}$，又在 y 轴方向平移了 $-D=\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$，因而抛物线顶点 $V(x_v, y_v)$ 的坐标是 $x_v=-\frac{p}{2}$；$y_v=q-\frac{p^2}{4}$。

根据顶点位置的不同，标准抛物线或者与 x 轴有两个交点 $(y_v<0)$；或者与 x 轴相切 $(y_v=0)$；或者与 x 轴不相交 $(y_v>0)$；与之相应的二次方程分别有两个不等实根、一个二重根或者没有实根。

抛物线与直线的相交 给定的方程 $x^2+px+q=0$ 在化为 $x^2=-px-q$ 以后，可视为函数 $y=x^2$ 与函数 $y=-px-q$ 对某些横坐标 x 值可以得出相等的纵坐标 y 值的一个条件。用几何学观点来看，这意味着要确定这两个函数图象的交点，从而交点的横坐标给出方程的解。由 $y=x^2$，可以得到一条标准抛物线，由 $y=-px-q$ 可以得出一条直线。按照这条直线是抛物线的割线、切线还是不相交，我们得出方程的两解、一解或是没有实数解。

【例1】 $x^2-x-2=0$。

考察函数 $y=x^2-x-2$，其图象是经过平移的标准抛物线，顶点为

$$V_1\left(\frac{1}{2},\ -2\frac{1}{4}\right)。$$

这里，$y_v<0$，抛物线与 x 轴相交于 $x_1=-1$ 与 $x_2=2$（见图 4.3-5）。

把方程变换成 $x^2=x+2$。标准抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 的两个交点的横坐标是 $x_1=-1$ 与 $x_2=2$（见图 4.3-6）。

方程

$$x^2-x-2=0$$

有两个相异实根，它的解集是

$$S=\{-1, 2\}。$$

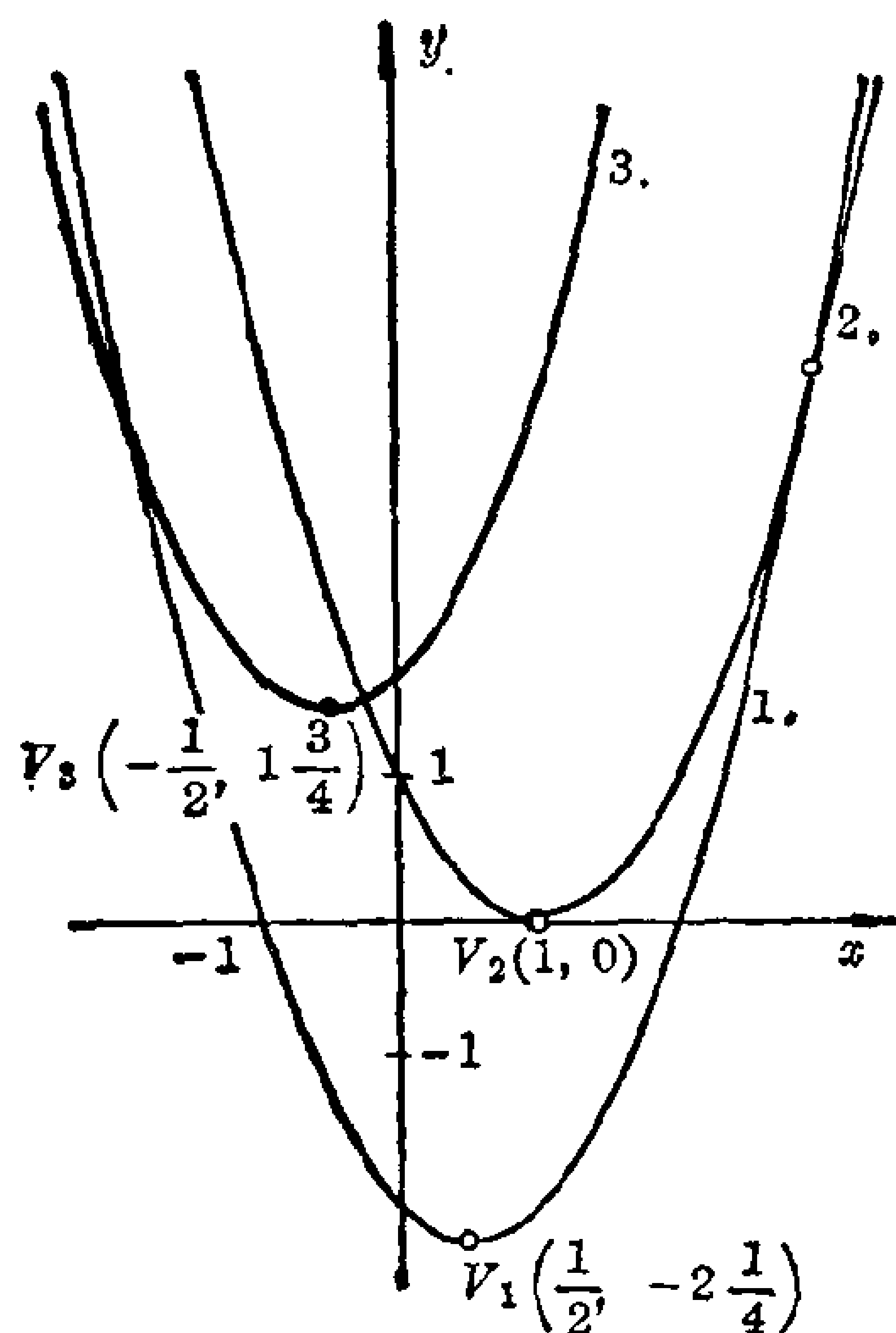


图 4.3-5 二次方程的根可以看作是一条经过平移的标准抛物线与 x 轴的交点的横坐标

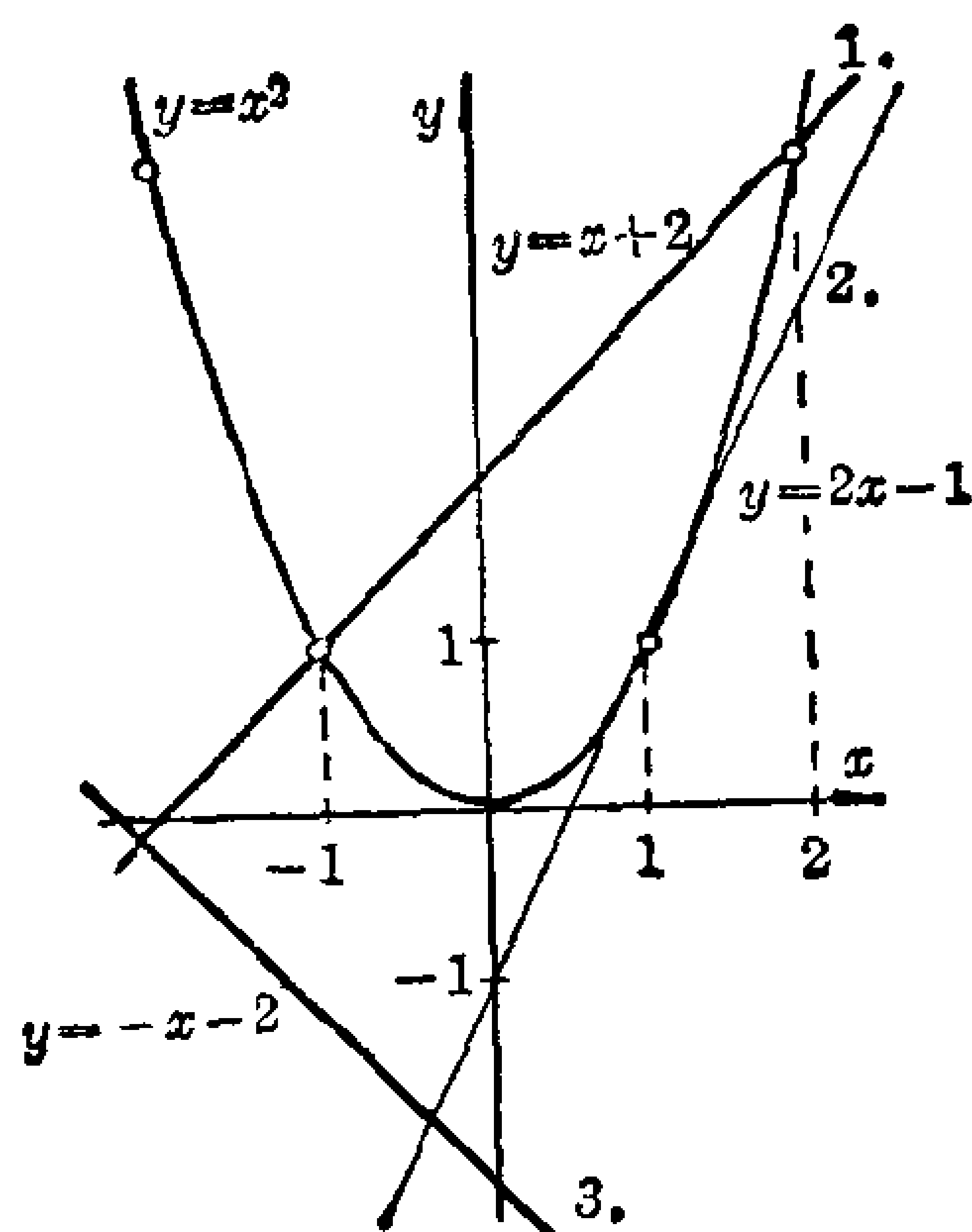


图 4.3-6 具有一条固定的标准抛物线的二次方程图解法

【例 2】 $x^2-2x+1=0$。

考察函数 $y=x^2-2x+1$，其图象是经过平移的标准抛物线，顶点为 $V_2(1, 0)$。这里，$y_v=0$，抛物线与 x 轴相切于 $x_1=x_2=1$（见图 4.3-5）。

把方程变换成 $x^2=2x-1$，这时，标准抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x-1$ 相切，切点的横坐标是 $x_1=x_2=1$（见图 4.3-6）。

方程 $x^2-2x+1=0$ 有两个相同的实根，解集是 $S=\{1\}$。

【例 3】 $x^2+x+2=0$。

函数的图象是顶点在 $V_3\left(-\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right)$ 的经平移的标准抛物线。这里，$y_v>0$，抛物线与 x 轴不相交(见图 4.3-5)。

变换后的方程是 $x^2=-x-2$。直线 $y=-x-2$ 与标准抛物线 $y=x^2$ 不相交(见图 4.3-6)。

方程 $x^2+x+2=0$ 没有实根，解集是

$$S=\emptyset。$$

历史简述

人们的实际需要，特别是测量问题(毕达哥拉斯定理)导致二次方程的早期发展。在楔形文字的书板中，留传给我们许多这类可上溯到巴比伦时代的数学问题。甚至连多变量二次方程组也在那里出现。有一个公元前2000年左右的问题，如果用近代记号来表示是：$x^2-29y+210=0$；比它稍后一些的，例如有方程组 $x^2+y^2=1000$，$y=\frac{2}{3}x-10$。

希腊数学家们用几何方式，也就是通过作图来处理代数问题，由于平方根总是可以用圆规、直尺作出，希腊数学家们便想用这种办法来处理一切有实根的二次方程。在欧几里得«几何原本»的第五卷中有这些方法的经典叙述(大约公元前300年)，据说还可以一直追溯到提阿梯图斯(Theattetus，公元前410? ～368年)。用希腊语的犹太人工程师兼数学家、亚历山大里亚城的赫伦(Heron，大约公元100年)继承并采取了巴比伦人与古埃及人的二次方程数值处理的传统，利用近似方法来开平方。甚至在阿基米德(公元前278?～212年)的著作中都能找到这个方法的一鳞半爪。至于"根要成对出现"这一事实的发现则应归功于印度数学家们，特别是巴斯卡拉(Bhaskara，生于公元1114年)。学者们把这些解法用阿拉伯文写了下来，以此作为媒介，这些方法终于传入欧洲，并获得了进一步发展。

4.4 三次与四次方程

一般地说，代数方程的次数愈高，解起来也就愈困难。因此为了求方程的数值解的实际需要，已经发展出为数不少的图解法与近似解法，这些解法能把高次方程的解计算到小数点后面任意多的位数。

三次方程

三次方程的一般形式	$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ $A\neq 0$	$x\in\mathbf{C}$ $A, B, C, D\in\mathbf{R}$

在三次方程的一般形式中，把复数集 $\mathbf{C}$ 取为变量 x 的基本域。A, B, C, D 都是实参数。Ax^3 叫三次项，Bx^2 叫二次项，Cx 叫线性项，D 叫常

数项。用 $A\neq0$ 除方程的两端并令 $\frac{B}{A}=r$, $\frac{C}{A}=s$, $\frac{D}{A}=t$, 就可以得到与上述方程等价的标准形式 $x^3+rx^2+sx+t=0$。

三次方程的标准形	$x^3+rx^2+sx+t=0$	$x\in\mathbf{C}$ $r, s, t\in\mathbf{R}$

可解性。特殊情形 在复数域中每一个三次方程都有三个解，其中有的解可以重合。由于每一个奇次多项式必定至少有一个实的零点，因此有一个解永为实数。其他两个解则或者也都是实数，或者是共轭复数。如果 x_1 是一个实根，则(参看 **I**. 第 5 章)三次方程可以分解为一次因子 $(x-x_1)$ 与一个二次多项式的乘积。由于当一个因子等于零时，乘积为零，故三次方程的另外两个解也就是这个二次方程的解。

根据**韦达定理**，三个根的乘积 $x_1\cdot x_2\cdot x_3$ 等于常数项变号，即 $(-t)$。因此，如果已知原方程有整数解时，则实根 x_1 可视为 $(-t)$ 的一个因子，并通过**试探法**将其找出。例如，三次方程 $x^3-5x^2-8x+12=0$ 有一个根 $x_1=+1$，并可以分解为乘积 $(x-1)(x^2-4x-12)=0$，由于二次方程的根为 -2 与 $+6$，故所给三次方程的解集是 $S=\{-2, +1, +6\}$。

如果三次方程 $x^3+rx^2+sx=0$，即常数项 t 为零时，则由因式分解可化为等价方程 $x(x^2+rx+s)=0$。除了实数解 $x_1=0$ 以外，所给三次方程的其他两个解就是二次方程 $x^2+rx+s=0$ 的解。

如果 $r=0$, $s=0$，则得到一个**纯三次方程** $x^3+t=0$。它的三个解是 $x_1=\sqrt[3]{-t}$, $x_2=\omega_2\sqrt[3]{-t}$, $x_3=\omega_3\sqrt[3]{-t}$。这里，$\omega_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\omega_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ 是 1 的复三次根。

如果 t 也等于 0 的话，即 $x^3=0$，则其根只能是 $x_1=x_2=x_3=0$，因为如 $x\neq0$ 则必定 $x^3\neq0$，反之亦然。

卡尔达诺(Cardano)公式 这个三次方程求根公式是通过两步得来的。首先，通过代换 $x=y-\frac{r}{3}$ 把标准形式 $x^3+rx^2+sx+t=0$ 变成没有二次项的**简化形式**：

三次方程的简化形式	$y^3+py+q=0$

这里已用了简化记法$p=s-\frac{r^2}{3}$，$q=\frac{2r^3}{27}-\frac{sr}{3}+t$；例如方程$x^3-9x^2+33x-65=0$经过代换以后可以化成$y^3+6y-20=0$。

其次，待求的解y可化为两部分u与v，它们可分别确定。设$y=u+v$，则$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$或$u^3+v^3+q+(u+v)(3uv+p)=0$。现在得出一个有两个变量u与v的一个方程，因此我们可以自由地利用一个联系u与v的附加条件。我们取此条件使因子$3uv+p$等于零，从而使最后一项等于零$3uv+p=0$。于是得到变量u与v的一个方程组：

$$\left|\begin{aligned} u^3+v^3&=-q \\ uv&=-p/3 \end{aligned}\right| \xrightarrow[\text{再乘以4}]{\substack{\text{两端平方}\\\text{三次方后}}} \left|\begin{aligned} u^6+2u^3v^3+v^6&=q^2 \\ 4u^3v^3&=-4(p/3)^3 \end{aligned}\right| \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$$

$$(u^3-v^3)^2=q^2+4(p/3)^3$$

由该方程组可得

$$\left|\begin{aligned} u^3-v^3&=\pm\sqrt{q^2+4(p/3)^3} \\ u^3+v^3&=-q. \end{aligned}\right|$$

$$u^3=-q/2\pm\sqrt{(q/2)^2+(p/3)^3}\ \text{和}\ v^3=-q/2\mp\sqrt{(q/2)^2+(p/3)^3}$$

如果把根号前面的正负号上下对调，u^3就变成了v^3；但当u与v互换时，方程$u^3+v^3+q=0$与$uv=-\frac{p}{3}$保持不变，因此，只要考察一对符号中的一个(譬如说上面一个符号)就已足够了。一个复数的立方根有三个值，除了一个解x_1之外还有其他两个解ω_2x_1与ω_3x_1，这里ω_2与ω_3是1的复三次根。于是，对u及v所得到的值是

$$u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\quad u_2=u_1\omega_2,\quad u_3=u_1\omega_3;$$

$$v_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\quad v_2=v_1\omega_2,\quad v_3=v_1\omega_3。$$

对$y=u_i+v_j$似乎会得到三次方程的九个解($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$)。但是实际上方程的解只有下面三个：$y_1=u_1+v_1$，$y_2=u_2+v_3$，$y_3=u_3+v_2$。因为只有u_1v_1，u_2v_3与u_3v_2才能满足附加条件$u_iv_j=-\frac{p}{3}$，这是由于$\omega_2\omega_3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$。在方根内的被开方数为非负数的假定下，即$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\geq 0$时，解$y_1$是实数，而$y_2$与$y_3$是共轭复数，正如计算所表明的：

$$y_2=u_1\omega_2+v_1\omega_3=-\frac{u_1+v_1}{2}+\frac{u_1-v_1}{2}\cdot i\sqrt{3};$$

$$y_3=u_1\omega_3+v_1\omega_2=-\frac{u_1+v_1}{2}-\frac{u_1-v_1}{2}\cdot i\sqrt{3}。$$

三次方程的简化形式 $y^3+py+q=0$	卡尔达诺公式 $y_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$

【例】 $y^3-15y-126=0$。方程已经是简化形式了，这里 $p=-15$, $q=-126$,代入卡尔达诺公式:

$$y_1=\sqrt[3]{63+\sqrt{63^2-5^3}}+\sqrt[3]{63-\sqrt{63^2-5^3}}=\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{1}$$
$$=5+1=6;$$

$$y_2=-\frac{5+1}{2}+\frac{5-1}{2}\cdot i\sqrt{3}=-3+2i\sqrt{3};$$

$$y_3=-\frac{5+1}{2}-\frac{5-1}{2}\cdot i\sqrt{3}=-3-2i\sqrt{3}。$$

因而 $S=\{6,\ -3+2i\sqrt{3},\ -3-2i\sqrt{3}\}$。

既约情形,三角解法 显然,当二次根式中的被开方数 $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ 是负数时，三次方程的解法变得特别困难,因为必须去求复数的立方根。从另一方面来看,三次方程总是至少有一个实根。十五、十六世纪的数学家们在相当长时期内未能找出这个实根来，认为这种解法不是他们力所能及的,因此把这种情形叫做“不可约”(又名“既约情形”)。公元1600年前后,韦达用三角办法得出了解。事实上，在看来如此复杂的情形下，三个根全都是实数。

因 $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$, 故必有 $p<0$; 令 $p=-p'$, 则 p' 为正数，而简化了的三次方程 $y^3+py+q=0$ 变成 $y^3-p'y+q=0$, 这里 $\frac{p'^3}{27}-\frac{q^2}{4}>0$;

于是 u_1 或 v_1 的三次根式中的被开方数是 $-\frac{q}{2}\pm\sqrt{-\frac{p'^3}{27}+\frac{q^2}{4}}=$

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{-\left(\frac{p'^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)}=-\frac{q}{2}\pm i\sqrt{\frac{p'^3}{27}-\frac{q^2}{4}}。$$

这个复数可以写成三角形式:

$$-\frac{q}{2}\pm i\sqrt{\frac{p'^3}{27}-\frac{q^2}{4}}=r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi),$$

这里
$$r=\sqrt{\frac{p'^3}{27}},\ \cos\varphi=\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{p'^3}{27}}},\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{\frac{p'^3}{27}-\frac{q^2}{4}}}{\sqrt{\frac{p'^3}{27}}}。$$

由棣莫佛(De Moivre)定理,从$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3}\pm i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$可以得出$u_1$或$v_1$,从而

$$y_1=u_1+v_1=\sqrt[3]{r}\left[\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}+\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right]=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}。$$

由于余弦函数的周期性,幅角的值也可取为$\varphi+360°$或$\varphi+720°$,因此其他两个解是:

$$y_2=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120°\right),\quad y_3=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240°\right)。$$

三次方程	$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$	$x\in\mathbf{C}$; $A, B, C, D\in\mathbf{R}$; $A\neq0$
标准形式	$x^3+rx^2-sx+t=0$	$r=\frac{B}{A}$; $s=\frac{C}{A}$; $t=\frac{D}{A}$
简化形式	$y^3+py+q=0$	$p=s-\frac{r^2}{3}$ $q=\frac{2r^3}{27}-\frac{rs}{3}+t$
卡尔达诺公式	$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$时 一个实根与两个共轭复根; $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$时 三个实根,其中有二根相等	$u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ $v_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ $y_1=u_1+v_1$ $y_{2,3}=-\frac{u_1+v_1}{2}\pm\left[\frac{u_1-v_1}{2}\right]i\sqrt{3}$

不可约情形	$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 时 三个不等实根	$r=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ $\cos\varphi=\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$ $y_1=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}$ $y_2=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)$ $y_3=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)$

【例 1】 方程 $y^3-981y-11340=0$ 满足不可约情形的条件，由计算可得 $r=\sqrt{327^3}$，$\cos\varphi=\frac{5670}{\sqrt{327^3}}$，通过对数计算可得出近似值 $\varphi=16^\circ30'$，因而 $\frac{\varphi}{3}=5^\circ30'$。

对计算 y_1, y_2, y_3 的公式用对数算得其近似值: $y_1\approx36$, $y_2\approx-21$, $y_3\approx-15$。 验算表明等式成立，于是解集

$$S=\{-21,\ -15,\ 36\}。$$

【例 2】 一只标准玻璃漏斗的轴截面是一个等边三角形（见图 4.4-1）。若它的容积是 $V=765\ \text{cm}^3$，求漏斗的宽度 d。

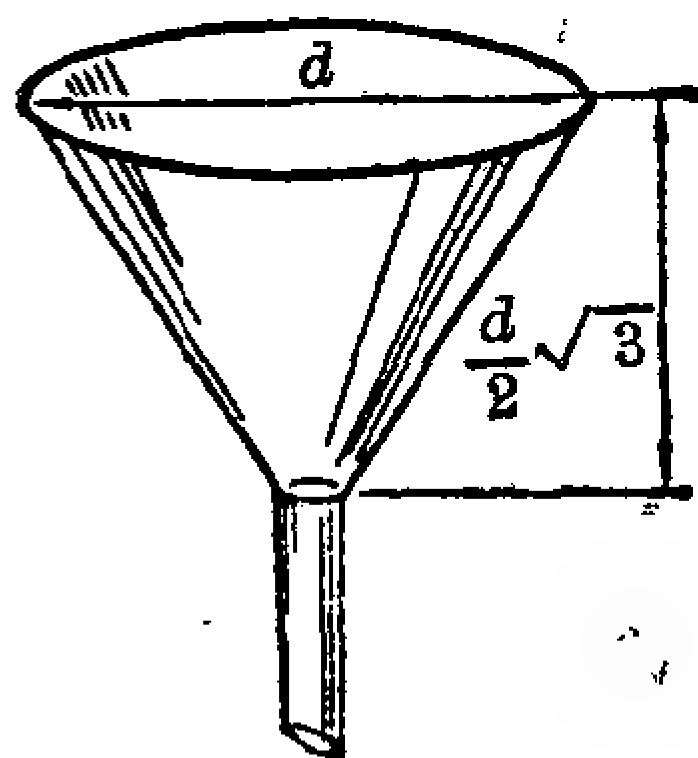


图 4.4-1 标准玻璃漏斗

由于宽度 d 是轴截面的一边之长，漏斗的高度是 $h=\frac{d}{2}\sqrt{3}$，底半径是 $r=\frac{d}{2}$。根据圆锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ 得

$$765\ \text{cm}^3=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{d}{2}\sqrt{3}\right) \text{ 或 } d^3=\frac{765\cdot24}{\pi\sqrt{3}}\ \text{cm}^3。$$

在 d 的三个根中当然只有实根是有意义的，由计算可求出漏斗的宽度 $d\approx15\ \text{cm}$。

三次方程的图解法 由三次方程 $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ 可以考察三次函数 $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$。 这一函数的图象与 x 轴的交点的横坐标

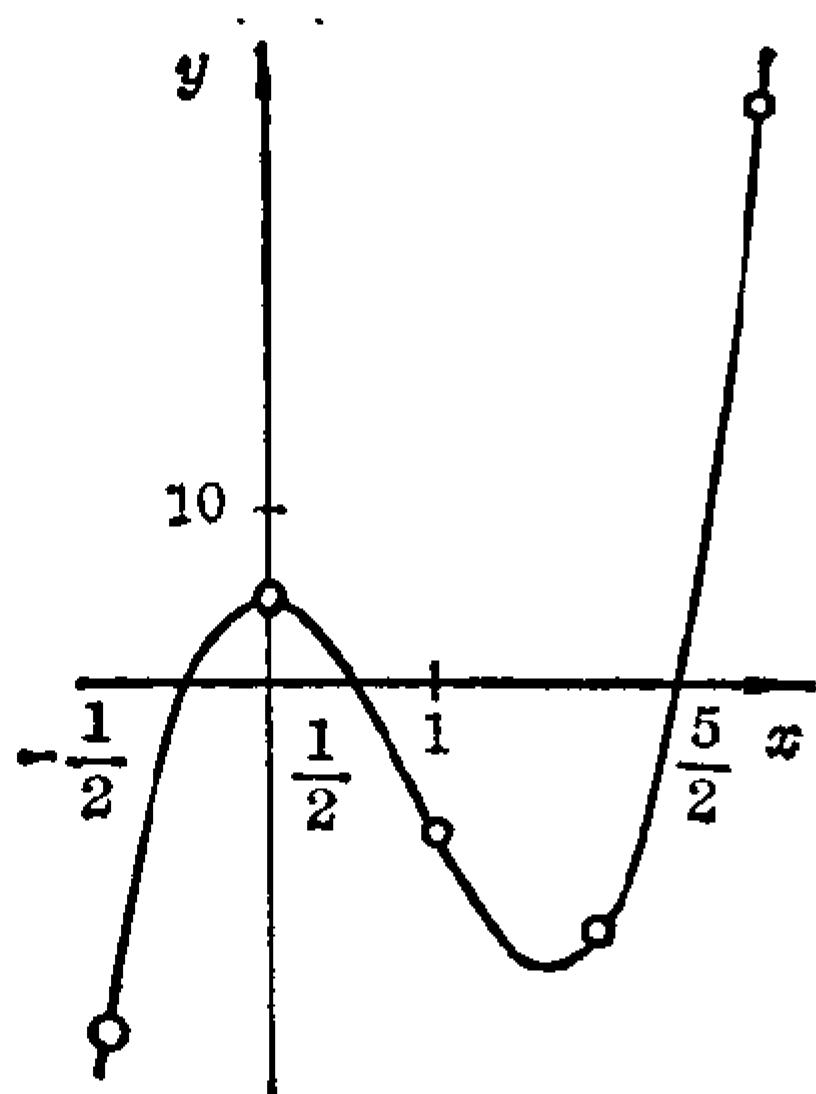


图 4.4-2　三次方程 $8x^3-20x^2-2x+5=0$ 的图解法

给出了三次方程的解。我们先得出近似解，然后将其改进(譬如用牛顿方法)，使之达到所需的任意准确度。一般人们满足于先用图解法找到一个解 x_1，再用一次因子 $x-x_1$ 去除所给的三次多项式，这样便可得到一个二次方程，再去求解就不难了。

【例】 由方程

$$8x^3-20x^2-2x+5=0$$

考察三次函数

$$y=8x^3-20x^2-2x+5$$

(见图 4.4-2)，由下列表格可作出其图象：

x	…	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-135	-21	5	-9	-15	35	…

在这样好的近似中，我们将期望函数的零点位于 $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=+\frac{1}{2}$, $x_3=+\frac{5}{2}$。这里，x 轴与 y 轴的单位不同不会影响零点的位置。顺便说一下，甚至在具体作图以前，从上述表格中根据纵坐标符号的改变就可以看出，零点必在 -1 与 0 之间，0 与 1 之间，以及 2 与 3 之间。

把这些数值代入方程，我们发现所期望的这些零点确实是方程的解。但是实际上只要对 $x_2=\frac{1}{2}$ 验算一下即已足够，因为在多项式相除以后，即 $(8x^3-20x^2-2x+5):\left(x-\frac{1}{2}\right)=8x^2-16x-10$，只要解二次方程 $8x^2-16x-10=0$，它的根是 $x_{1,3}=1\mp\frac{3}{2}$。这就是对用图象法得到的根进行的验证，这里 $S=\left\{-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2},\ +\frac{5}{2}\right\}$。

历史简述　简单三次方程在古希腊、印度与阿拉伯数学中即已出现，由于希腊数学家们是用几何方法处理代数问题的，因而在处理三次方程上面临着重大困难。

用希腊语的犹太工程师兼数学家、亚历山大里亚城的赫伦(约公元100年)在处理三次方程方面迈开了重要的一步。回顾更古老的巴比伦

与埃及的数值开方的近似解法，他成功地解出了纯三次方程。但是，在数值解法与开始把计算步骤代数化方面真正的进步应归功于印度和阿拉伯的数学家们。他们能够对各种类型的二次方程与一些最简单类型的三次方程进行数值求解，但是在解决一般三次方程方面则未能成功。欧洲数学家们紧紧追随阿拉伯人，在方程的数值解方面亦是如此。但是在代数学的发展上有很多贡献的鲁加·帕奇欧利(Luca Pacioli，公元 1445～1514 年)则认为，找到一个一般三次方程代数解法的普遍公式是不可能的。

这个公式在公元 1500 年左右被波罗那城的教授西比尼·戴·斐罗(Scipione del Ferro of Bologna，约 1465～1526 年)找到了，但没有发表。尼古洛·塔尔塔利亚(Niccolo Tartaglia，约 1500～1557 年)，一位数学家兼武器专家，也独立地发现了这一公式(目前这个公式叫做卡尔达诺公式)，并由于成功地在那时经常举行的公开解题比赛中运用它而博得了不小的名声。威尼斯城的野心勃勃的教授吉洛尼摩·卡尔达诺(Geronimo Cardano，1501～1576 年)也想找到求解公式但未成功，经过多年顽强努力，终于在 1539 年从塔尔塔利亚那里获得了这个公式，他向后者庄严宣誓要把它视为一种职业性的机密，永不泄露。可是，卡尔达诺背弃了他的誓言，他在 1545 年出版的著作《代数法则的重大技艺》中收入了这个方法。由于公式是首次出现在以卡尔达诺名义发表的印刷品中，因此就被人叫作"卡尔达诺公式"。塔尔塔利亚提出了抗议，引起一场剧烈争吵，但是也没有用。顺便说一下，以卡尔达诺命名的船舶罗盘的万向悬挂方法实际上也是弄错了人的，在他以前老早就在用了。

四次方程

一般四次方程	$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$ $A\neq 0$	$x\in\mathbf{C}$ $A, B, C, D, E\in\mathbf{R}$

对一般四次方程，也有一个一般的求解公式，然而它比三次方程复杂得多，因而在求方程的数值解时难得应用。这里只说一下方法的大概，详细计算就不给出了。通过代换 $x=y-\frac{a}{4}$，可以从**标准形式** $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 变换成**简化方程** $y^4+py^2+qy+r=0$，这里 p, q, r 是新的系数，它的四个解 y_1, y_2, y_3, y_4 有如下关系:

$$2y_1=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3};\qquad 2y_2=\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3};$$

$$2y_3=-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3};\qquad 2y_4=-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}。$$

而 z_1, z_2, z_3 则是给定四次方程的三次预解式的三个根，这个预解式是：

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0。$$

附加条件是三个根的乘积 $z_1z_2z_3=q^2$ 必须是正数。在复数域中，简化四次方程的解可分为下列三种情形：

三次预解式的根 z_1, z_2, z_3	四次方程的根 y_1, y_2, y_3, y_4
全部都是正实根	四个实根
一个正根，两个负根	两对共轭复根
一个实根，两个共轭复根	两个实根与一对共轭复根

双二次方程　四次方程有一种特例经常出现，它们是容易处理的，这就是双二次方程 $x^4+px^2+q=0$。它与一般形式的区别在于，变量 x 只是以偶次幂出现，因而方程可看作是关于 x^2 的二次方程，这就是它得到其名称的由来。设 $y=x^2$，便可得到 $y^2+py+q=0$。再对 y 解二次方程，然后由方程 $x^2=y$ 的解得出双二次方程的解。

【例】　$x^4-29x^2+100=0$;

$y_1=25$, $y_2=4$; $x_1=+5$, $x_2=-5$, $x_3=2$, $x_4=-2$;

$S=\{-5,\ -2,\ +2,\ +5\}$。

历史简述　一般四次方程的求根公式是由卡尔达诺的一位学生兼合作者斐拉里 (L. Ferrari, 1522～1565 年) 发现的。此公式被卡尔达诺收入到他的著作《大术》中。

4.5　一般定理

代数基本定理　吉拉特(Girard, 1595～1632 年)已经作出了下述猜想：在复数域中，一个 n 次方程有 n 个根。后来笛卡尔、吉恩·达朗贝尔(Jean D'Alembert)与其他学者作了种种努力试图加以证明，但只有高斯才在 1799 年得出了一个没有漏洞的严格证明，它成为其论文的主题。后来，高斯又找到了关于"一个代数方程总有一个解"的其他不同证法。

代数基本定理：任一 n 次代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

(其中 a_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是实数或复数)在复数域中至少有一个解。

分解因式 根据代数基本定理，方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 必有一个解，设它为 x_1。在原方程中以 $x=x_1$ 代入，则得到 $x_1^n+a_1x_1^{n-1}+a_2x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x_1+a_n=0$，两者相减以后有：$(x^n-x_1^n)+a_1(x^{n-1}-x_1^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(x-x_1)=0$。由于每一项都包含因式 $(x-x_1)$，因此可把它括出来，得 $(x-x_1)\cdot[x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}]=0$。

左边方括弧中的表达式是一个 $n-1$ 次多项式，根据基本定理，它也有一个解，设这个解为 x_2，则因式 $(x-x_2)$ 就可以分出，从而得到

$$(x-x_1)(x-x_2)[x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}]=0。$$

继续施行这一方法，最后就可以得到乘积表达形式。

n 次方程的乘积表达形式	$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0$	$x\in\mathbf{C}$

解的个数 从乘积表达形式立即可以得出一个重要定理：一个变量的 n 次方程正好有 n 个解。这些解不一定都不相等。

如果一个解出现过 2, 3, …, k 次，就说它是一个二重根，三重根，… k 重根。如果方程的系数是实数，则当方程有一个复数根 $a+ib$ 时，其共轭复数 $a-ib$ 也是该方程的一个根。

根的韦达定理 如果把乘积表达形式的右端乘出，合并同类项，然后比较系数，就可以得出根的韦达定理。此外，下列定理也成立：

根的韦达定理	$x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1$ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=a_2$ $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-a_3$ $\vdots$ $x_1x_2x_3\cdots x_n=(-1)^na_n$

如果整系数的 n 次方程（已化为标准形）有一个整数根，则它是常数项的一个约数。

对于二次方程与三次方程来说，根的韦达定理取下列形式：

$x^2+px+q=0$	$x_1+x_2=-p$ $x_1x_2=q$

$x^3+rx^2+sx+t=0$	$x_1+x_2+x_3=-r$ $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=s$ $x_1x_2x_3=-t$

根式可解性　代数基本定理保证了任意次数的方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

根的存在性，对于$n=2, 3, 4$来说可以写出一个普遍适用的求根公式。在$n=3$时，公式中有一串根号，一个包含在另一个中，解的形式是$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$；对$n=4$来说，解的形式是$\sqrt{a+\sqrt[3]{b+\sqrt{c+\sqrt{d}}}}$。所谓根式就是指一个表达式经过多次开根，而根指数都必须是正整数，采用这种记法我们可以断言：

一直到四次为止的代数方程都能用根式解出。

显然，根式有着无穷无尽的变化，人们因此曾想到也许能通过迭叠根式的各种组合来得出五次方程的解。但是实际情况则不然。相反，当$n>4$时，用根式去解一般n次代数方程是不可能的。

历史简述　当三次方程与四次方程的求解公式于文艺复兴时期相继发现以后，十七世纪与十八世纪的数学家们顽强地搜索着五次与更高次代数方程的类似公式。实际上，有些数学家，例如冯·切恩豪斯（von Tschirnhaus，公元1651～1708年），相信他们已经证明了用根式求解的可能性。

可是人们逐步地认识到，用根式解一个更高次的一般方程也许是办不到的，拉格朗日与高斯表示了这个意见。在鲁非尼（Ruffini）于1799年作出了一个尝试性的、其中含有漏洞的证明之后，尼尔斯·亨利克·阿贝尔（Niels Henrik Abel，公元1802～1829年）——一位在其青年时代死于肺结核病的卓越数学天才——成功地证明了一般5次方程以及次数更高的方程是不能用根式解出的。理解高次方程的可解性问题之所以如此困难，其原因之一是下列事实：某些特殊的高次方程确是能很好地用根式来解的。对于一切能用根式求解的方程的一个正确与全面的概述在伽罗华的理论中给出。埃瓦里斯特·伽罗华（Evariste Galois，公元1811～1832年）研究工作的起点是高斯在分圆问题上所获得的结果。他是一位天才，又是一个热血沸腾的共和党人。象沙皇统治下的俄罗斯的普希金一样，他

在一次决斗中死于非命，而其对手很可能是反动王朝警察局所雇用的一名密探。

在伽罗华理论中，对每个方程都能构造出一个群。这个群的结构给出了方程是否能用根式求解的信息(见 **II**. 第 3 章)。

4.6 非线性方程组

某些类型的非线性方程组出现得颇为频繁，例如在坐标几何学或与常微分方程组有关的问题方面就是如此。这里，在大量的非线性方程组问题中选了几个例子。系统的讲授是不可能的。在下文中，所有变量的基本域都取实数域 **R**。

一个线性方程与一个二次方程所联立的方程组 利用代入法，这种方程组很容易解出。例如，当需要确定一条圆锥截线与一条直线的交点时，就会出现这种方程组。

【例】

$$x^2+y^2+4x-1=0 \longrightarrow (-y-1)^2+y^2+4(-y-1)-1=0$$

$$x+y=-1 \longrightarrow x=-y-1 \longrightarrow y^2-y-2=0$$

$$x_1=-3;\ x_2=0 \longleftarrow y_1=2;\ y_2=-1$$

验算证实求出的这些值是解。$S=\{(-3,\ 2),\ (0,\ -1)\}$。

两个二次方程联立的方程组 这类问题出现于两条圆锥截线相交的场合。如果其中没有 xy 项而且两个方程中 x^2 与 y^2 项的系数只相差常数因子 $k\neq 0$，则在乘以 $\frac{1}{k}$ 并把两方程相减以后，二次项就被消掉，从而得出一个一次方程。再通过代入法，把它代入上面两个方程中的一个，就能消去一个变量。

【例 1】

$$x^2+y^2-18x-18y+112=0 \longrightarrow x^2+y^2-18x-18y+112=0$$

$$x^2/2+y^2/2-11x-5y-52=0 \ \Big|\cdot 2 \longrightarrow x^2+y^2-22x+10y-104=0$$

$$4x-28y+216=0$$

$$y^2-18y+80=0 \longleftarrow x=7y-54$$

$$y_1=10;\ y_2=8 \longrightarrow x_1=16;\ x_2=2$$

验算证实 $S=\{(2,\ 8),\ (16,\ 10)\}$ 是方程组的解集。

【例2】

$$\begin{vmatrix} (1) & x^2+y^2=a \\ (2) & x\cdot y=b \end{vmatrix}$$

方法 I.

$$(x+y)^2=a+2b \quad (1)+2\cdot(2)$$
$$(x-y)^2=a-2b \quad (1)-2\cdot(2)$$
$$x+y=\pm\sqrt{a+2b}$$
$$x-y=\pm\sqrt{a-2b}$$
$$y_{1,2}=\pm(1/2)(\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b})$$
$$x_{1,2}=\pm(1/2)(\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b})$$
$$y_{1,2}^2=(1/4)(a+2b+a-2b\pm2\sqrt{a^2-4b^2})$$
$$x_{1,2}^2=(1/4)(a+2b+a-2b\mp2\sqrt{a^2-4b^2})$$

方法 II.

$$(1a)\quad b^2/y^2+y^2=a$$
$$(2a)\quad x=b/y$$
$$y^4-ay^2+b^2=0$$

双二次方程

$$y_{1,2}^2=a/2\pm(1/2)\sqrt{a^2-4b^2}$$
$$x_{1,2}^2=a/2\mp(1/2)\sqrt{a^2-4b^2}$$

我们看到两个方法得出同一结果。

三个变量的三个二次方程　这类特殊的方程组是由下列坐标几何学中的问题而产生的：求通过三点的圆的方程，例如，这三点是 $P_1=(-8, 12)$，$P_2=(-4, 4)$，$P_3=(9, -5)$。要求的是圆心坐标 $C(a, b)$ 与圆的半径 r。我们可以得出变量 a, b, r 应满足的下列方程组：

$$\begin{vmatrix} (-8-a)^2+(12-b)^2=r^2, \\ (-4-a)^2+(4-b)^2=r^2, \\ (9-a)^2+(-5-b)^2=r^2 \end{vmatrix}$$

展开二次幂，从第一个方程分别减去第二个和第三个方程，就得出变量 a 与 b 的二个线性方程，并从而求出 $a=16$，$b=19$。把这些算出来的 a, b 值代入原方程组中的一个方程，就得出一个 r 的纯二次方程，它的正根就是要求的半径，在本例中 $r=25$。

4.7　代数不等式

与方程的概念一样，不等式概念也是通过表达式来定义的，如果两个表达式 E_1 与 E_2 通过下列关系符号之一连接起来，即 $>$（大于）、$\geqslant$（大于或等于）、$<$（小于）、$\leqslant$（小于或等于）、$\neq$（不等于），则可得出下列不等式中的一个，即 $E_1>E_2, E_1\geqslant E_2, E_1<E_2, E_1\leqslant E_2$ 或 $E_1\neq E_2$；例如，$3x<5$，$a^2\geqslant 9, 2\leqslant 8, x+y>6$，$\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}$ 等都是不等式。下文要加以讨论的不等式，仅限于 $E_1>E_2$ 与 $E_1<E_2$。

也象方程的情况一样，在不等式中要区分**不包含变量**的不等式与包含变量的不等式；前者是关于不等式的命题，可真可假，而后者是关于不等式的**谓词**；例如 $2<8$，$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$ 是命题，而 $a^2<9$，$x+y>6$ 是谓词。

不等式的解与解集 在单变量不等式中，用定义域中的一个数去代换变量而能得到一个真命题时，则这个数就叫作不等式的一个解。这里，不等式的定义域是由方程定义域类比而定义的。如果不等式包含两个、三个、……、n 个变量，则不等式的解便是一个有序数对、三数组、……、n 数组。*解集* S 则是与不等式定义域有关的一切解的集合；例如，对自然数集 $\mathbf{N}$ 来说，不等式 $x<4$ 的解是 0, 1, 2, 3, 故 $S=\{0, 1, 2, 3\}$。但如果 $x\in\mathbf{Z}$, 则解集 $S=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$。若 $x\in\mathbf{N}$, $y\in\mathbf{N}$, 则不等式 $x+y<2$ 的解集是 $S=\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$；而当 $x\in\mathbf{Z}$, $y\in\mathbf{Z}$ 时，该不等式有无穷多组解，即一切满足 $x+y<2$ 的有序整数对，例如，$(-5, 1)$或$(1, -4)$。

相容，不相容与永真不等式 根据一个含变量的不等式关于其定义域有解或无解而把不等式叫作相容或不相容。

相容不等式	不相容不等式
对 $x\in\mathbf{Z}$, $x<0$: $S=\{\cdots; -3, -2, -1\}$	对 $x\in\mathbf{N}$, $x<0$: $S=\emptyset$
对 $a\in\mathbf{N}$, $a^2>0$: $S=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$	对 $a\in\mathbf{N}$, $a^2<0$: $S=\emptyset$
对 $x\in\mathbf{R}$ $2x>3x$: $S=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x<0\}$	对 $x\in\mathbf{N}$, $2x>3x$: $S=\emptyset$
$y+3<y+4$, 对 $y\in\mathbf{R}$: $S=\mathbf{R}$	对 $y\in\mathbf{R}$, $y+3<y+4$: $S=\emptyset$

这里，对 $y\in\mathbf{R}$ 来说，不等式 $y+3<y+4$ 不仅相容，而且还是永真的，因为一切 $y\in\mathbf{R}$ 都是它的解。一个具有 n 个变量的相容不等式叫作*永真不等式*，如果定义域中的一切有序 n 数组都是不等式的解的话；例如，所谓三角形不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 对一切实数对都适合，因此，对 $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$ 来说，它是永真的。

等价不等式 两个包含变量的不等式称为是等价的，如果它们是有相同的定义域与相同的解集的话；否则，就称这两个不等式是不等价的。例如，对自然数集 $\mathbf{N}$ 而言，$x+4<7$ 与 $x<3$ 是等价的，因为两个不等式的解集都是 $S_1=\{0, 1, 2\}$。类似地，对 $a\in\mathbf{Z}$, 不等式 $-2a>4$ 与 $a<-2$ 也是等价不等式，因为它们都有 $S_1=S_2=\{\cdots, -6, -5, -4, -3\}=S$。然而，不等式 $y>0$ 与 $y>-2$ 在 $\mathbf{N}$ 上是等价的，可是在 $\mathbf{Z}$ 上不等价。把

一个不等式变成与之等价的另一个不等式的变换叫做**等价变换**。它们是建立在算术的基本法则，特别是在实数的单调性基础上建立的。

关于包含变量的不等式的等价变换的一些命题。以下一些不等式等价于 $E_1<E_2$:

1. $E_1'<E_2'$，这里的 E_1' 与 E_1 以及 E_2' 与 E_2 都是等价表达式;

2. $E_2>E_1$;

3. $E_1\pm E_3<E_2\pm E_3$，只要表达式 E_3 在变量的整个基本域中都有定义;

4. $E_1\cdot E_3<E_2\cdot E_3$ 与 $\frac{E_1}{E_3}<\frac{E_2}{E_3}$，只要表达式 E_3 在变量的整个基本域中都有定义并且是正的;

5. $E_1\cdot E_3>E_2\cdot E_3$ 与 $\frac{E_1}{E_3}>\frac{E_2}{E_3}$，只要表达式 E_3 在变量的整个基本域中都有定义并且是负的。

解不等式　解不等式的工作就是要确定一个不等式关于给定的变量基本域中的全部解。换句话说，要找出解集来。正如解方程一样，在解不等式时，要进行一系列适当的等价变换，最后得到一个极为简单的、可以直接读出其解集的不等式。我们通常(尤其在估计时)要利用 < 或 > 关系的传递性，即由 $E_1<E_2$, $E_2<E_3$ 而推出 $E_1<E_3$。对一元一次不等式来说，有一种利用变换定理的解法。

$$
\begin{array}{ll}
2x+2+3x<3x-8+4; \quad x\in\mathbf{R} & \\
 & \text{命题 1} \\
5x+2<3x-4 & \mid -3x-2 \\
 & \text{命题 3} \\
5x+2-3x-2<3x-4-3x-2 & \\
 & \text{命题 1} \\
2x<-6 & \\
 & \text{命题 4} \\
2x/2<-6/2 & \mid :2 \\
 & \text{命题 1} \\
x<-3 &
\end{array}
$$

解集由所有小于 -3 的实数所组成：即 $S=\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x<-3\}$。这个解集可用数轴图示法加以说明(见图 4.7-1)。

验算：对不等式不象对方程那样，它们一般不可能用一切解代替变量来验证计算的正确性，但是在解集中，选取一些个别元素来验算是有帮

助的。例如，对于上面的例子，由于 $-5\in\mathbf{R}$，故有：

$$\begin{aligned}2(-5)+2+3(-5)&<3(-5)-8+4\\ -10+2-15&<-15-8+4\\ -23&<-19\quad\text{真。}\end{aligned}$$

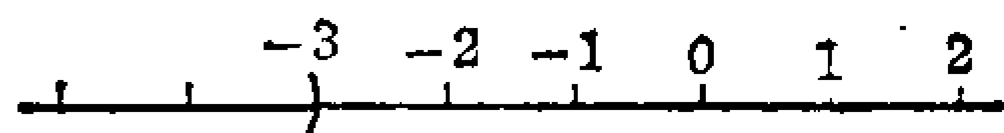


图 4.7-1 解集 $S=\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x<-3\}$ 的图示

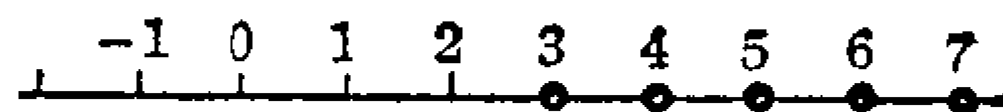


图 4.7-2 解集 $S=\{a|a\in\mathbf{N}$ 且 $a>2\}$ 的图示

把 S 中的一切元素都写成 $x=-3-h(h>0)$ 的形式，就真。可以完全地进行这一验算，只要把它代入原不等式，再检查一下对一切实的 $h>0$ 来说，变换后的不等式命题是否为真。

【例 1】

$$25-3a<22-2a;\qquad a\in\mathbf{N}\mid+2a-25$$

$$25-3a+2a-25<22-2a+2a-25$$

$$-a<-2\qquad\qquad |\cdot(-1)$$

$$a>2。$$

解集由所有大于 2 的自然数所组成：

$$S=\{a|a\in\mathbf{N}\text{ 且 }a>2\}=\{3,4,5\cdots\}\text{（见图 4.7-2）。}$$

【例 2】 $y+x<4,\ x\in\mathbf{N},\ y\in\mathbf{N}\mid-x;$

$$y<-x+4。$$

解集是 $S=\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1)(1,2),(2,0),(2,1),(3,0)\}$（见图 4.7-3）。

如果 x, y 的变量域取为 R，则位于直线 $y=-x+4$ 下面的半平面中的一切点的坐标都是不等式的解。

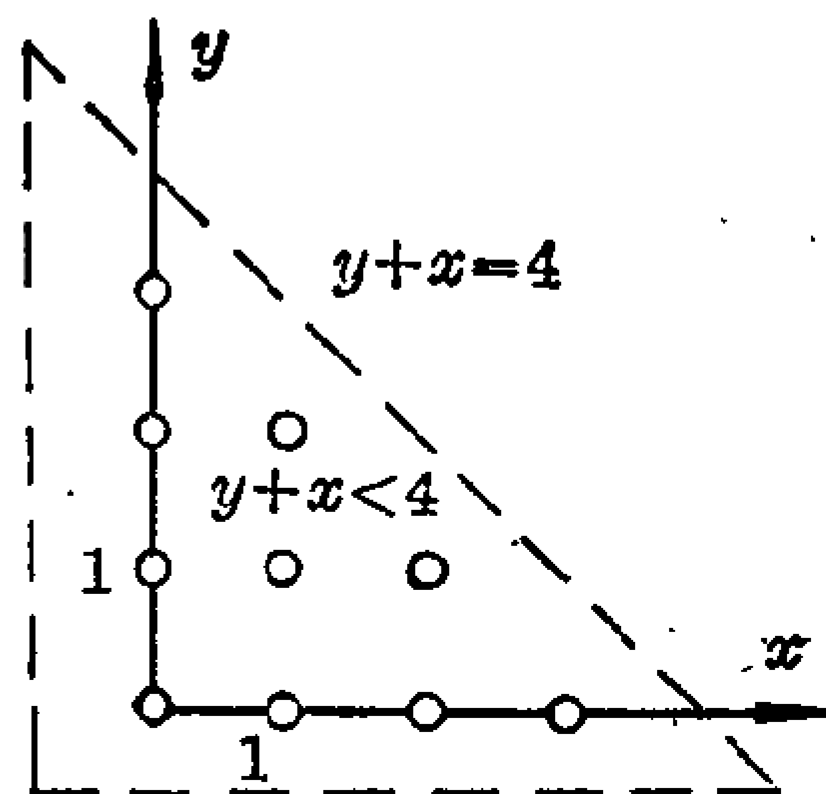


图 4.7-3 不等式 $x+y<4$ 当 $x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}$ 以及 $x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}$ 时解集的图示

【例 3】

$$x^2-4>0,\qquad x\in\mathbf{R};$$

$$(x-2)(x+2)>0。$$

当且仅当乘积的两个因式为同号时，乘积才是正的，因此要讨论下列两种情形：

情形一:

$$x-2>0 \quad 与 \quad x+2>0$$
$$x>2 \quad 与 \quad x>-2$$
$$x>2。$$

情形二:

$$x-2<0 \quad 与 \quad x+2<0$$
$$x<2 \quad 与 \quad x<-2$$
$$x<-2。$$

故解集由所有大于 2 或小于 -2 的实数所组成(见图 4.7-4)。

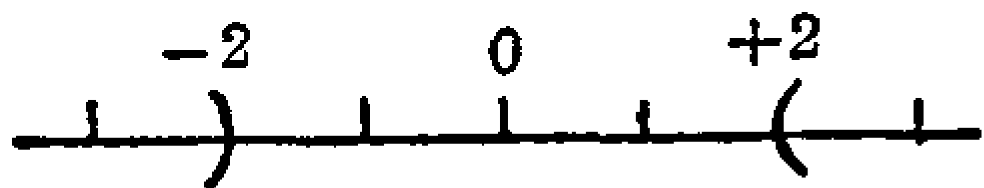


图 4.7-4　不等式 $x^2-4>0$; $x\in\mathbf{R}$ 的解集的图示

【例 4】　$x^2-4<0$,　　$x\in\mathbf{R}$;

$$(x-2)(x+2)<0。$$

当且仅当乘积的两个因式为异号时,乘积才是负的,因此要讨论下列两种情形:

情形一:

$$x-2<0 \quad 与 \quad x+2>0$$
$$x<2 \quad 与 \quad x>-2$$
$$-2<x<2。$$

情形二:

$$x-2>0 \quad 与 \quad x+2<0$$
$$x>2 \quad 与 \quad x<-2 \text{ 不相容。}$$

故解集由所有在 -2 与 $+2$ 这一区间内的实数所组成,即

$$S=\{x|x\in\mathbf{R} \text{ 且 } -2<x<2\}。$$

【例 5】 $\dfrac{(x+2)}{(x-1)}>4$; $x\in\mathbf{R}$。不等式的定义域是 $x\neq1$ 的一切实数的集合,对于分式不等式,我们必须讨论两种不同情形:

情形一:

$$\frac{(x+2)}{(x-1)}>4 \quad 与 \quad x-1>0$$
$$x+2>4(x-1) \quad 与 \quad x>1$$

$$x+2>4x-4 \quad 与 \quad x>1$$
$$6>3x \quad 与 \quad x>1$$
$$x<2 \quad 与 \quad x>1$$
$$S_1=\{x|x\in\mathbf{R} \text{ 且 } 1<x<2\}。$$

情形二:

$$\frac{x+2}{x-1}>4 \quad 与 \quad x-1<0$$
$$x+2<4(x-1) \quad 与 \quad x<1$$
$$x+2<4x-4 \quad 与 \quad x<1$$
$$6<3x \quad 与 \quad x<1$$
$$x>2 \quad 与 \quad x<1$$

不相容 $S_2=\emptyset$。

故这个不等式的解集是 $S=S_1\cup S_2=S_1$，它由区间 $1<x<2$ 内的全部实数所组成。

【例 6】 $|a+5|<2$, $a\in\mathbf{Z}$; 按照绝对值的定义，当 $a+5\geqslant0$ 时有 $|a+5|=a+5$，当 $a+5\leqslant0$ 时有 $|a+5|=-(a+5)$。故应分下列两种情形:

情形一:

$$a+5<2 \quad 与 \quad a+5\geqslant0$$
$$a<-3 \quad 与 \quad a\geqslant-5$$
$$S_1=\{-5,\ -4\}。$$

情形二:

$$-(a+5)<2 \quad 与 \quad a+5\leqslant0$$
$$-a-5<2 \quad 与 \quad a\leqslant-5$$
$$-a<7|\cdot(-1) \quad 与 \quad a\leqslant-5$$
$$a>-7 \quad 与 \quad a\leqslant-5$$
$$S_2=\{-6,\ -5\}。$$

故原不等式的解集是 $S=S_1\cup S_2=\{-6,\ -5,\ -4\}$，对这个例题来说，用代入法逐一加以验算是容易做到的。

【例 7】 要从某些物理量 a, b 的真值来估计其商 $\frac{a}{b}$ 的最大误差，设这些物理量的实测值为 α, β，对 a 和 b 的测量误差分别为 ε_1 和 ε_2; 设 $|\beta|>\varepsilon_2$，由假定 $|a-\alpha|<\varepsilon_1$ 与 $|b-\beta|<\varepsilon_2$。于是:

$$\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a\beta-b\alpha}{b\beta}=\frac{[\beta(a-\alpha)-\alpha(b-\beta)]}{b\beta}$$

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\beta(a-\alpha)-\alpha(b-\beta)|}{|b\beta|}\leqslant\frac{|\beta||a-\alpha|+|\alpha||b-\beta|}{|b||\beta|}$$

$$\leqslant\frac{|\beta|\varepsilon_1+|\alpha|\varepsilon_2}{|b||\beta|}。$$

由于 $|\beta|>\varepsilon_2$ 即相当于 $|b|<\varepsilon_2+|\beta|$，因而

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{\alpha}{\beta}\right|\leqslant\frac{|\beta|\varepsilon_1+|\alpha|\varepsilon_2}{|\beta|(|\beta|+\varepsilon_2)}$$

就是商的最大误差。

特殊不等式　以下各不等式的基本变量域都是实数集，

1．三角形不等式：对一切实数 a 与 b，我们有 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$。由数学归纳法，对 $n=1, 2, 3, \cdots, a_1, a_2, \cdots, a_n\in\mathbf{R}$，有下列不等式：

$$|a_1+a_2+a_3-\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|。$$

2．类似地，对一切 $a, b\in\mathbf{R}$，我们有：$||a|-|b||\leqslant|a+b|$。

3．对一切自然数 n，恒有 $2^n>n$（可用数学归纳法证明）。

4．对于实数 $a>0$，$b>0$ 与 $n=1, 2, 3, \cdots$，由二项式定理可推出不等式 $(a^n+b^n)\leqslant(a+b)^n$。

5．伯努利不等式：$(1+a)^n>1+na$ 对自然数 $n\geqslant2$ 及实数 $a\neq0$ 且 $a>-1$ 成立。

6．对于实数 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，必有 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 或 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$；一般地说，对 $n\in\mathbf{N}$ 与实数 $a_1\geqslant0, \cdots a_n\geqslant0$，必有不等式 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}$；也就是说，几何平均值总是小于或等于算术平均值。

7．在算术平均值 $A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，几何平均值 $G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 与调和平均值 $H=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$ 之间有下列关系：$A\geqslant G\geqslant H$，这里的 a_i 是非负实数，n 是一个自然数。

8．柯西-许瓦尔茨不等式：对一切实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$，我们有

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)。$$

第 5 章　函　数

5.1 基本概念……………… 175
函数的概念…………… 175
函数的表示法………… 177
特殊类型的函数……… 182
反函数………………… 185
5.2 多项式和有理函数…… 189
有理函数的概念……… 189
线性函数……………… 189
二次函数……………… 191
三次函数……………… 191
正指数的幂函数……… 196
多项式函数…………… 197
多项式的因式分解…… 198
零点…………………… 199
多项式函数在无穷远处的性态…………… 205
负指数的幂函数……… 207
有理函数的一般形式… 208
有理函数的零点和极点 209
有理函数在无穷远处的性态………………… 210
分解成部分分式……… 213
5.3 非有理函数…………… 216
根函数………………… 216
指数函数……………… 218
对数函数……………… 220
三角函数和圆函数…… 220
双曲函数……………… 222
双曲函数的反函数…… 223
5.4 多于一个自变量的函数……………………… 225
一般定义……………… 225
具有两个自变量的实函数…………………… 226
具有 n 个自变量的实函数…………………… 229

5.1 基本概念

函数的概念

按照欧拉在 1794 年所给的定义，函数通常被解释成一个变量依赖于另一个变量。在多数情况下，这样的函数定义已足够了。但是随着数学的深入发展，对函数的概念下一个更一般和更抽象的定义显得更加必要和有用。函数概念的本质并不是量之间的依赖性（人们通常把量理解为能用“小于或大于”的关系进行比较的数字），而是对应关系本身，依据这

种对应关系，某些事物被看成是由另外一些事物所确定的。函数的概念归结为集合论中的有关定义。

对应关系　每一根金属棒在加热时都会改变它的长度。假定有一根铜棒，在0°C时长度为 $l_0=200$ 个长度单位(例如厘米或英寸)，于是在温度为 t°C时它的长度可表示成 $l=200(1+0.000016t)$。根据这一公式，对于0°C到100°C之间每一个 t 的值就有200单位到200.32单位之间的某一个长度 l 与之对应。类似地，对于每一批货物都有一笔作为它售价的金额与之对应，对于本书中的每一个页数，都有一个在该页上有多少字母的数字与之对应。

不仅在数字之间存在对应关系，而且更一般地在集合 A 中的元素 a 和集合 B 中的元素 b 之间也存在对应关系。例如，在一场演出中剧院内的每个座位对应着一张入场券或一位具体的观众。因此这种对应由在 $A\cup B$ 上定义的关系 F(参见 **II.** 第1章)所确定，其定义域为 $D(F)\subseteq A$，值域 $R(F)\subseteq B$。如果在对应关系 F 下，定义域 $D(F)$ 中的每一个元素 a，在值域 $R(F)$ 中有一个而且仅有一个元素 b 与之对应，则这种关系称为单值的对应，叫作集合 A 到集合 B 中的**函数**或**映射**(见图5.1-1)。值域中与定义域中*原始*元素 a 相对应的元素 b 称为 a 的*象*。这样一来，函数 F 是*有序对* (a, b) 所组成的集合，它的第一个元素属于定义域 $D(F)$，第二个元素属于值域 $R(F)$。对于 A 到 B **中**的一个映射，我们有 $D(F)=A$；即 A 中的每一个元素 $a\in A$ 都是原始元素。若说映射是 A 到 B **上**的映射，则要求 B 中的每一个元素都是象。

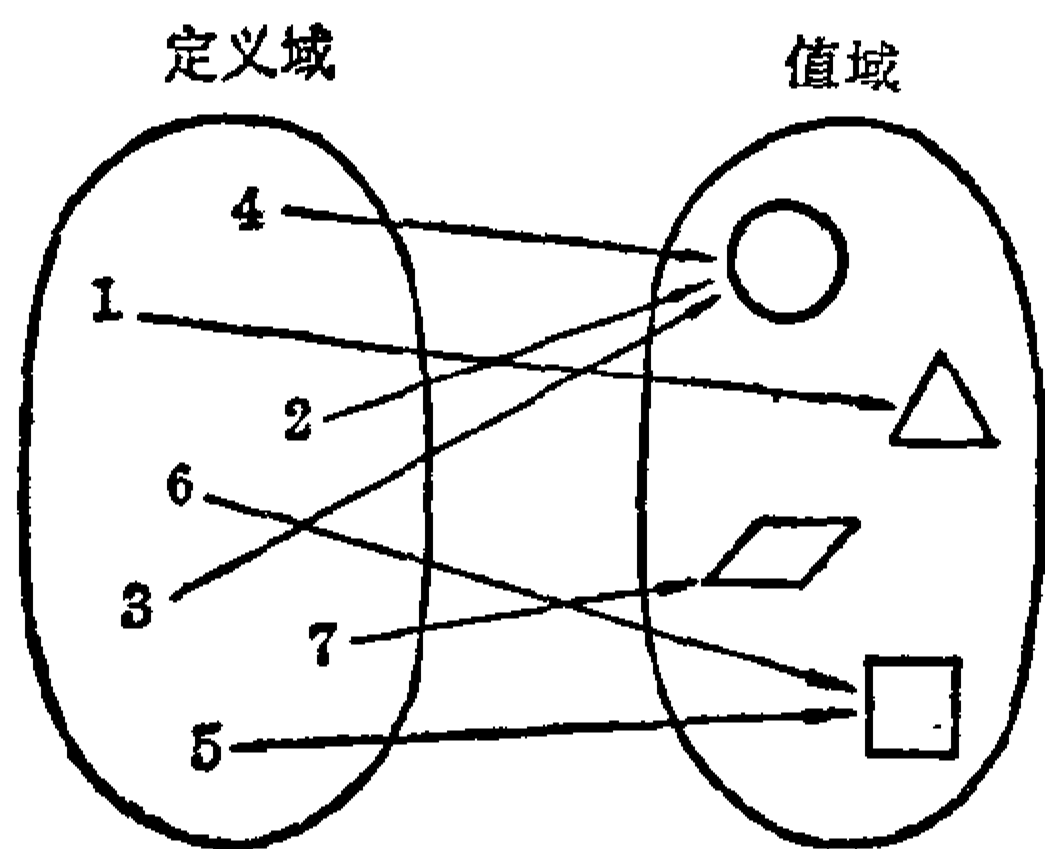


图5.1-1　函数图

元素 x 通过函数 f 所确定的元素 y 通常用 $f(x)$ 表示，于是对应关系被写成 $x\to y=f(x)$，或更简洁些，$y=f(x)$。元素 x 称为**自变量**，对应的元素 y 称为*在点 x 处的函数值* $f(x)$。函数 $x\to y=f(x)$ 的*定义域*用 X 表示，值域用 Y 表示。如果 f 是*从 A 到 B 中*的函数，那末显然 $X\subseteq A$ 及 $Y\subseteq B$。

函数 f 是从集合 A 到集合 B 中的映射，即是由有序对 $(x, y)\in f$ 组

成的一个非空集合，其中$x\in X\subseteq A$，$y\in Y\subseteq B$，对于每一个$x\in X$只有一个$y\in Y$与之对应。

函数的表示法

为了要描述一个函数，必须给出它的定义域、它的值域以及它们的对应关系。

图示法 在函数图示法中，定义域和值域用图来表示，对应关系用箭头指示(见图 5.1-1)。从定义域中每一个元素只能画出一根箭头，但指向值域中的一个元素的箭头可以是一个或多于一个。

定义域	1	2	3	4	5	6	7
值域	△	○	○	○	□	□	▱

图 5.1-2 函数的数值表

列表法 对应的法则也可列成一张表(见上图)，而不用图来表示。定义域的元素写在表的上面一行，在它的下面写上与它所对应的值域元素。列表法只能给出有限多个有序对，所以要完整描述一个任意函数，列表法是不够的。

文字表达 如果一函数的定义域和值域不是有限的，或者范围太广以致不能在一张纸上用图或表来表示，那末只要能对定义域、值域以及定义域元素和值域元素的对应规则作出精确的描述也就足够了。一个函数可以完全不用数学符号而用日常用语加以定义。例如：对于足球联赛中第一阶段的每场比赛，都有一个售出的入场券票数与比赛所在地的居民人数之间的比值和它对应，这就定义了一个函数，这函数在一定程度上能反映公众对各场比赛的兴趣。函数的对应法则能够全部地或部分地用文字加以描述的例子可以找到很多。

【例 1】 对于每一个实数x，根据它是无理数还是有理数有0或1与它对应，例如$\sqrt{2}\to 0$；$(3/4)\to 1$。

【例 2】 $g(x)=[x]$，这里x表示一个实数，$[x]$表示小于或等于x的最大整数。

图形表示法 用图形同样可以表示一个函数。只要在横轴上选取一数集作为定义域，在纵轴上选取一数集作为值域，并且对于定义域中的自

变量 x 可以这样来确定 y 的值,使得坐标为 x,y 的点是图形上的一点。然而在坐标系中不是每一条曲线都表示一个函数。由曲线给出的对应关系必须是**单值的**,也就是说用与纵轴平行的直线和图形曲线最多只能有一个交点。

公式表示法　在数学中表示一个函数的最常用方法是用公式。在这里定义域和值域的元素只能是数,或至少是**数学对象**,对这些对象我们可以给出适当的**计算规则**。例如:(1) $y=7x+2$; (2) $y=\sqrt{(x-4)}$; (3) $y=\sin x$。如果对定义域未作特殊的说明,则通常认为那些能使公式得到一确定值的数都属于该函数的定义域。在例(1)和例(3)中定义域是所有的实数,在例(2)中定义域是所有大于或等于4的实数。而值域为:(1) $-\infty<y<+\infty$; (2) $0\leqslant y<+\infty$; (3) $-1\leqslant y\leqslant +1$。

对定义域加限制。然而对定义域可任意加上限制。例如,(1)* $y=7x+2(-3\leqslant x<5)$ 或 (1)** $y=7x+2(-8<x<0)$ 等等。于是**值域**为 (1)* $-19\leqslant y<37$, (1)** $-54<y<2$。根据函数概念的定义,(1), (1)* 和(1)**表示完全不同的函数。这一点是本质的。这是因为要使两个集合完全相等,它们必须有相同的元素。如果属于 f_1 的每个元素对 (x, y), $(x, y)\in f_1$; 也属于 f_2, $(x, y)\in f_2$, 并且反之亦然,则两个函数 f_1 和 f_2 同样是完全相等的。但(1), (1)*和(1)**中的函数并非如此。

【例1】　如果符号 P 表示价格,p 表示某一商品100克的价格; m 表示它的质量,单位为克。于是 $P=p\cdot m/100$ 即为该物的质量和价格之间的关系式。如果用0.72代替式中的 p, 用100, 200, 300, …代替公式中的 m, 可得到 P 的值为0.72, 1.44, 2.16, …。

【例2】　**铜棒加热时的长度公式**为 $l=l_0(1+0.000016t)$, 式中符号 l 和 t 具有不同的意义,l 表示长度域内的数字,t 表示温度域内的数字。当 t 在0°C到100°C之间取值时公式成立。

【例3】　**正方形面积**是根据方程式 $A=a^2$ 来计算的。这里符号 a 表示正方形的边长为 a 个长度单位,符号 A 是表示它的面积为 A 个面积单位。

如果抽去上面各个例子的具体内容,我们得到下列结果:

1. 引进变量表示定义域和值域中的元素。在上面一些例子中,这些变量是符号 m, t, a, 和 P, l, A。在数学中,常采用符号 x 或 y 作为函数中的变量,而用符号 f, g, φ 等表示函数。

2. 借助于变量，用一方程来定义对应的规则。与定义域元素 (x) 相对应的值域元素 (y) 可以首先用 (x) 代替方程中变量 x 然后算出 y 的值。例如，如果函数由方程 $y=-2x^2+4x-\sqrt{x}$ 定义，这个函数的定义域为 $0\leqslant x<+\infty$，于是对应于 $x=9$ 的值可用代入法得到：$y=-2\cdot9^2+4\cdot9-\sqrt{9}=-129$。因此根据这个函数，数 -129 与数 9 相对应。与定义域中每个数相对应的值都可用同样的方法得到。

代表定义域中元素的符号称为**自变量**，代表一函数值域中元素的符号称为**因变量**。给出函数所定义的对应规则的方程称为**函数方程**。

作图表示法 从函数方程列出一数值表，常可得到该函数的直观表示。借助于平面坐标系（参见 I. 第 13 章），对每一个数对 (x, y) 都可在平面上作出一点 P，点 P 的总体称为函数的图形。根据定义域和函数方程的特性，可得到一列孤立点、一些曲线线段或一条连通的**函数曲线**。

【例】 如果 x 是定义域 $-1\leqslant x\leqslant+2$ 中的自变量，则由方程 $y=x/2$ 所确定的函数，其值域是 $-(1/2)\leqslant y\leqslant+1$。对于 x 的一些值可得到下面的数值表：

x	-1	$-(1/2)$	0	$+(1/2)$	$+1$	$+(3/2)$	$+2$
y	$-(1/2)$	$-(1/4)$	0	$+(1/4)$	$+(1/2)$	$+(3/4)$	$+1$

首先在定义域 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 中画出函数曲线的一些点。如果对更多的自变量进行函数值的计算，可得到更密集的点列，它们都落在同一条直线上（见图 5.1-3）。

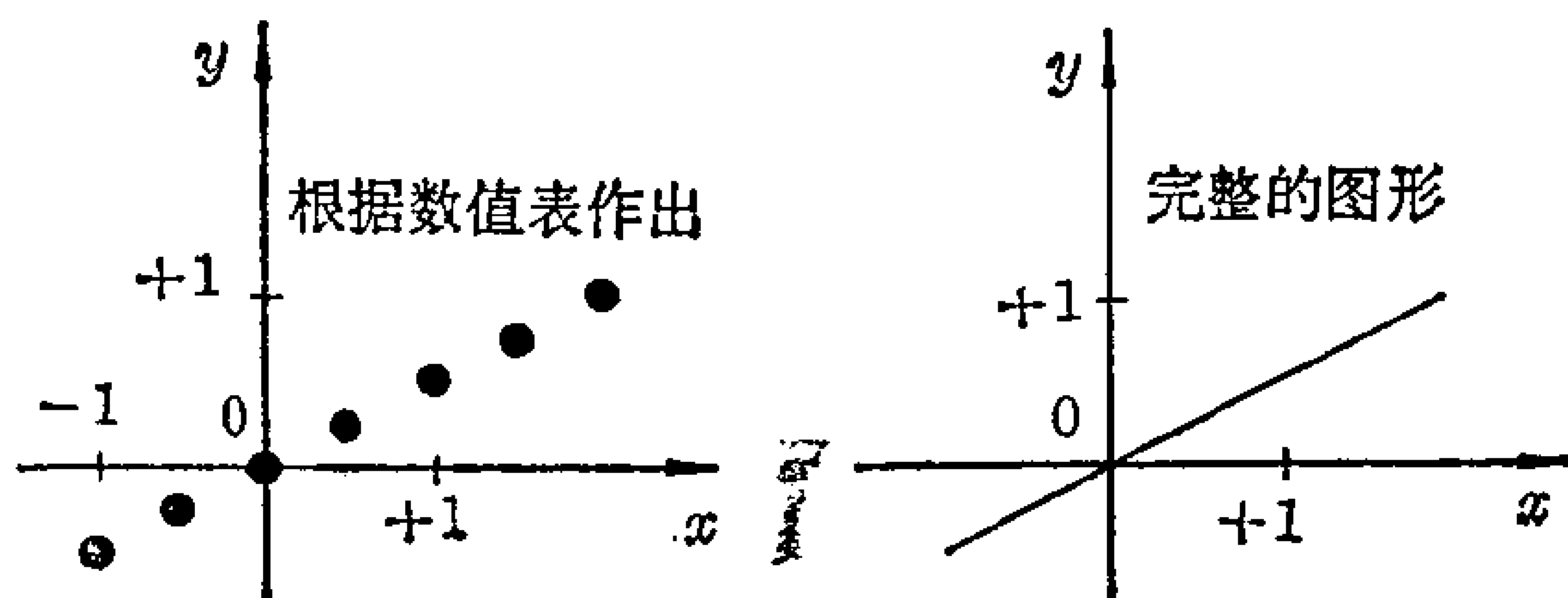


图 5.1-3 函数 $y=x/2$ 的图形

习惯上笛卡尔直角坐标系的横轴表示自变量，而纵轴表示因变量。

显式表示法 一函数方程的形式为 $y=A(x)$，其中 $A(x)$ 是一任意表达式，且除了变量 x 外，它只含有数字或基本数域中的元素，这种形式

称为显式。

隐式表示法　反之，隐式的特点是至少在方程的一边同时出现两个变量。例如 (1) $4x-2y=6$; (2) $xy=1$; (3) $y=\sin x\cdot\sin y+x^2$; (4) $x^2+y^2=16$; (5) $x^2+xy+y^2=\sqrt{(xy)}$。如果一函数的方程用显式表示，那末作为一种规定，将分离出来单独在方程一边的变量称为因变量，另一边的变量称为自变量，而它们究竟是用 x, y; u, v; s, t; 还是用其他符号表示是无关紧要的。用隐式表示，通常不是如此明显。当采用 x 和 y 时，常认为 y 是因变量。但经常要加以说明，特别是采用其他一些变量时，更是如此。然而也可能将隐式方程中的两个变量同等看待。要注意，用隐式表示的方程不是总能解出一个变量使成为显式的。例(1)和例(2)是很容易做到这一点的，可得到 (1) $y=2x-3$ 和 (2) $y=1/x$。然而例(3)和例(5)是怎么也不能做到这一点的。在这两个例子中，既不能将 y 分离出来也不能将 x 分离出来(参见**II**.第6章)。例(4)清楚地表明了另一种情形。众所周知，$x^2+y^2=16$ 是以坐标原点为圆心、以4为半径的圆的方程。在这个例子中，对于每一个 x 值，有两个 y 值满足方程。将 y 看成因变量，这就定义了一种非单值的对应关系。由于这个原因，所以(4)式不是函数方程。另一方面，显式 $y=+\sqrt{16-x^2}$ 确实表示了一个函数，但它的象只组成上半个圆。属于下半个圆的函数方程是 $y=-\sqrt{(16-x^2)}$。有时将两个函数合并写成 $y=\pm\sqrt{(16-x^2)}$，但将这种写法看成多值函数的方程是错误的。因为根据定义，函数是单值对应的。

参变量表示法　首先考虑两个显函数方程，每个都确定了一个函数，并且两个函数具有相同的定义域。因此用一般形式表示有 $t\to x=f_1(t)$ 和 $t\to y=f_2(t)$。如果现在对每一个 $x_0=f_1(t_0)$，可确定一 $y_0=f_2(t_0)$ 与之对应，这样就可得到 f_1 的值域到 f_2 的值域上的一个映射，当然它不一定是单值的。

【例1】　设 $x=2t$ 和 $y=t/2$，$-\infty<t<+\infty$。于是两个函数的数值表如下：

t	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
x	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

第一行和第二行是关于函数 $x=2t$ 的，而第一行和第三行是关于函数 $y=t/2$ 的。属于同一个 t 值的 x 和 y 值又决定了一个新的对应，它在表中由第二行和第三行给出。这种新的对应显然是单值的，从数值表中能一眼看出，这个对应可用新的函数方程 $y=x/4$ 来描述。从 $x=2t$ 可得 $t=\frac{x}{2}$。用表达式 $x/2$ 代入 $y=t/2$ 中，即得 $y=x/4$，这样就消去了参变量 t。

【例 2】 设 $x=t^2$ 和 $y=t/2$，它们的定义域为 $-\infty<t<+\infty$。数值表为:

t	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
x	100	64	36	16	4	0	4	16	36	64	100
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

然而在这例子中，对应 $x\to y$ 不再是单值的了：对于每一个 x 值对应着两个 y 值。但若对定义域加以限制，就可使它成为单值函数，例如限制 $0\leqslant t<+\infty$，于是对应 $x\to y$ 又成为一个函数，其方程为 $y=\sqrt{x}/2$。

【例 3】 设 $x=\cos t$ 和 $y=2t$（定义域为 $-\infty<t<+\infty$）。我们知道 $x=\cos t$ 是个周期函数，当 t 在实轴上变化时，x 值在 -1 和 $+1$ 之间不断重复出现 $(-1\leqslant x\leqslant +1)$。另一方面，对于 $y=2t$，值域为 $-\infty<y<+\infty$。如果现在考虑对应 $x\to y$，很明显，与一个 x 对应的 y 值有无穷多个。只要取一特殊值，就足以说明这点了。对于 $t=0$，$t=\pm 2\pi$，$t=\pm 4\pi$ 等等，我们都可得到 $x=1$。于是 $y=0$，$y=\pm 4\pi$，$y=-8\pi$ 等都与 $x=1$ 相对应。但若对定义域加以限制，比如 $0\leqslant t\leqslant \pi$，就能再一次得到单值对应。这个单值所定义的函数其方程为 $y=2\arccos x$，定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$，值域为 $0\leqslant y\leqslant 2\pi$。

如函数 $x\to y=f(x)$ 由形为 $x=f_1(t)$ 和 $y=f_2(t)$ 的两个函数表示，那末变量 t 就称为参变量。采用这种参量表示法，常可将 x 和 y 之间的隐函数关系用两个显函数来表示。例如：$x^2+y^2=1$ 可用 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 来表示。为了得到单值性，必须对 t 的定义域加以适当的限制。

复合函数 如果元素 a 在映射 G 下对应于元素 b，在另一映射 F 下元素 b 对应于元素 c，然后逐次应用这两个映射 F 和 G，就可得到一个

映射，在这个映射之下元素 a 对应于元素 c。由这种方式定义的映射称为映射 F 和 G 的积（或复合）。因此，$(a, c)\in F\cdot G$ 的充要条件是存在一个元素 b，使 $(a,b)\in G$ 和 $(b,c)\in F$。显然元素 b 必须同时属于 F 的定义域 X_F 和 G 的值域 Y_G（见图5.1-4）。由此可得出仅在 $X_F\cap Y_G\neq\emptyset$，$F\cdot G$ 才有意义。而且，在逐次进行映射时，次序是重要的，因为一般 $F\cdot G\neq G\cdot F$。如果 X_F，X_G，$X_{F\cdot G}$ 和 Y_F，Y_G，$Y_{F\cdot G}$ 分别表示 F，G，$F\cdot G$ 的定义域值域，于是只有在 $X_F\cap Y_G\neq\emptyset$，$X_{F\cdot G}\subseteq X_G$ 和 $Y_{F\cdot G}\subseteq Y_F$ 时，$F\cdot G$ 才有明确的意义。说得更确切些，$X_{F\cdot G}$ 恰好是由 X_G 中在映射 G 下其函数值落在 $X_F\cap Y_G$ 内的那些元素组成，而 $Y_{F\cdot G}$ 由 Y_F 中的元素组成，它们恰好是 $X_F\cap Y_G$ 中的自变量在映射 F 下的函数值。

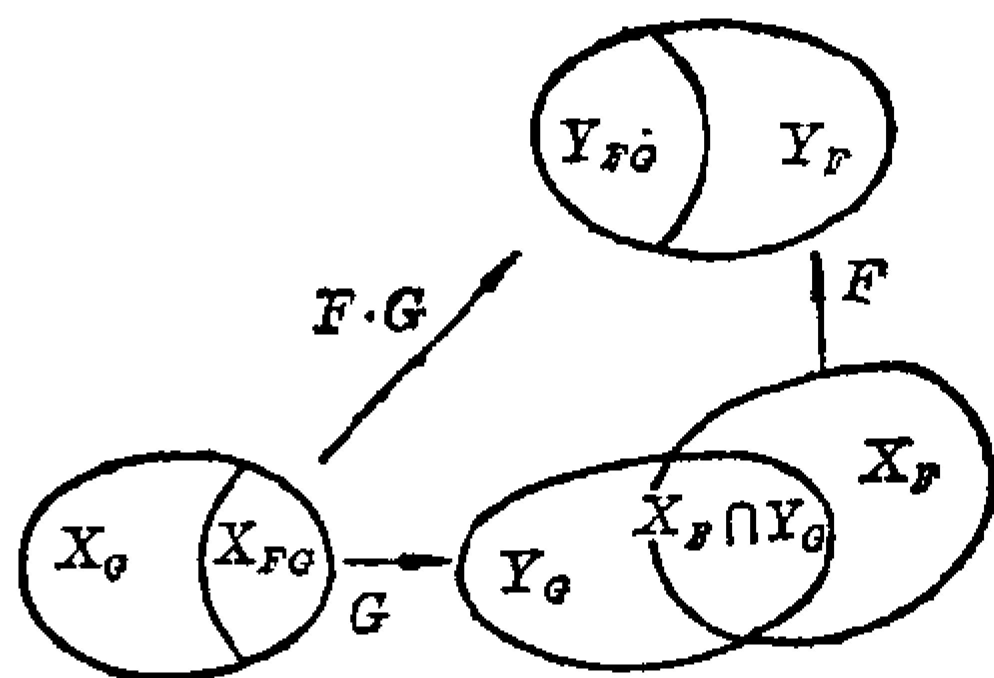


图5.1-4　映射 G 和 F 的合成 $F\cdot G$；定义域 $X_{F\cdot G}$ 是集合 $X_F\cap Y_G$ 关于 G 的所有原始元素；值域 Y_{FG} 是 $X_F\cap Y_G$ 关于 F 的象

函数方程为 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的两个函数 f 和 g 的积 $f\cdot g$，常写成 $y=f[g(x)]$，称为两个函数 g 和 f 在这种次序下的复合。在此式中，称 g 为复合函数 $f\cdot g$ 的内函数，f 为复合函数的外函数。

【例】　函数 $g(x)=x^2-2$ 和 $f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域和值域是 $X_g=(-\infty, +\infty)$，$Y_g=[-2, \infty)$ 及 $X_f=[0, \infty)$，$Y_f=[0, \infty)$。复合函数 $f\cdot g$ 的方程为 $f[g(x)]=\sqrt{(x^2-2)}$。其定义域 $X_{f\cdot g}$ 就是那些 X_g 中关于在 g 的作用下其函数值落在 $X_f\cap Y_g=[0, \infty)$ 中的元素。但这些元素就是所有满足 $x^2\geqslant 2$ 的 x，即为 $-\sqrt{2}$ 到 $+\sqrt{2}$ 这区间以外的所有实数全体组成的集合。复合函数 $g\cdot f$ 的方程为 $g[f(x)]=(\sqrt{x})^2-2=x-2$，定义域 $X_{g\cdot f}$ 为 $[0, \infty)$。

特殊类型的函数

以下考虑那些定义域和值域包含在实数域中的函数，通常称它们为**实函数**。按照某些共同的特性，可将一些特殊的实函数归纳在一起成为一个类。例如单调函数、有界函数、偶函数、奇函数或周期函数。

单调函数　称一函数 $x\to y=f(x)$ 在区间 $a<x<b$ 中为**单调递增的**，是指对此区间内任意的两个值 x_1 和 x_2 中较大的一个 x_2，其函数值 $f(x_2)$

也总是比另一个大。即如果 $x_1<x_2$，那末 $f(x_1)<f(x_2)$。

【例 1】 函数 $y=2^x$，其定义域为 $-\infty<x<+\infty$。在它整个定义域内是一单调递增函数。

【例 2】 函数 $y=\sin x$，其定义域为 $-\infty<x<+\infty$。但它仅在 $-5\pi/2<x<-3\pi/2$，$-\pi/2<x<\pi/2$，$3\pi/2<x<5\pi/2$ 等区间上是单调递增的。在整个定义域中，它并不表示一单调递增的函数。

称一函数在区间 $a<x<b$ 中是**单调递减的**，是指当 $a<x_1<x_2<b$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$。

【例 1】 函数 $y=1/x$，在 $-\infty<x<0$ 和 $0<x<+\infty$ 上是单调递减的。当 $x=0$ 时函数没有定义。

【例 2】 函数 $y=x^2$，在 $-\infty<x\leqslant 0$ 上是单调递减的。而在 $x\geqslant 0$ 上，函数是单调递增的。

【例 3】 函数 $y=-3x+5$ 在整个定义域中是单调递减的。

有时在一区间内如果 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ [或总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$]，则也称函数在此区间中是单调的。这些函数应该更确切地称为**非递减**(**或非递增**)函数。对照之下，前面所讨论的函数是**严格单调的**(递增或递减)。

有界函数　一个函数 $x\to y=f(x)$ **在一区间**(**开的或闭的**)**内是有界的**，指的是如果存在一个常数 $B>0$，使得对于区间内的每一个 x 都有 $|f(x)|\leqslant B$。特别若对于定义域内每个 x 都有 $|f(x)|\leqslant B$，则称 $x\to y=f(x)$ 为**有界函数**。

【例 1】 函数 $y=x^3$ 在每个闭区间内都是有界的。例如在闭区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 中，$|f(x)|\leqslant B=a^3$。然而它不是一个有界函数，因为找不到这样一个数 B，使定义域 $-\infty<x<+\infty$ 上的任一函数值都不超过它。

【例 2】 函数 $y=x^{-2}$ 在任何形为 $a\leqslant x<+\infty$ 的区间上都是有界的，其中 $a>0$。而在 $0<x\leqslant b$ 上则不是有界的。

【例 3】 函数 $y=\sqrt{100-x^2}$ 在整个定义域 $-10\leqslant x\leqslant +10$ 上都是有界的，因为 $|\sqrt{100-x^2}|\leqslant 10$ 总是成立的(见图 5.1-5)。

【例 4】 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ 在整个定义域中都是有界的，将它改写成 $y=1-\dfrac{2}{x^2+1}$ 的形式就可以看清楚了。这里对于每个 x 都有 $\left|1-\dfrac{2}{x^2+1}\right|\leqslant 1$。

有界函数若用图形来表示，则其图形的特点是：总可找到两条平行

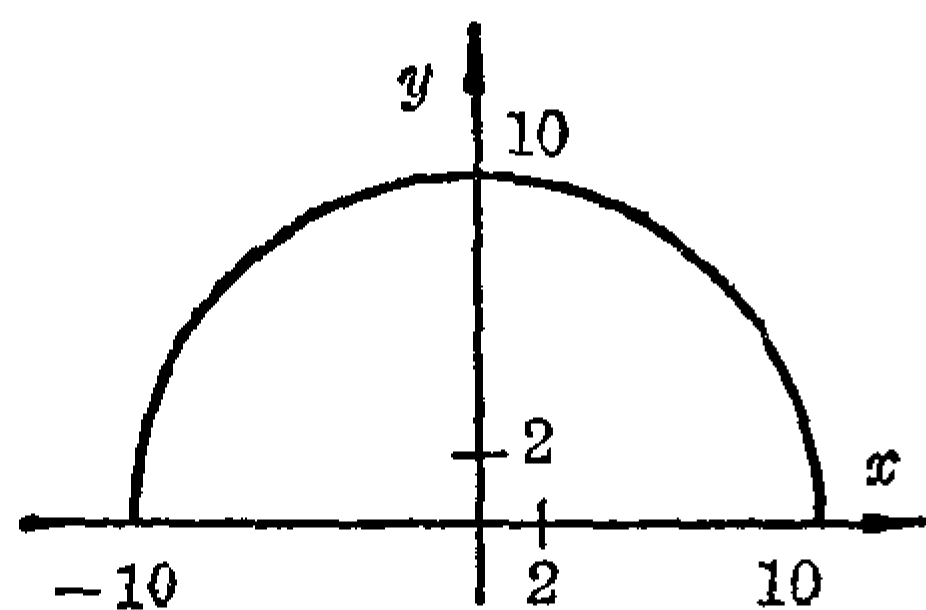


图 5.1-5 函数 $y=\sqrt{(100-x^2)}$ 的图形

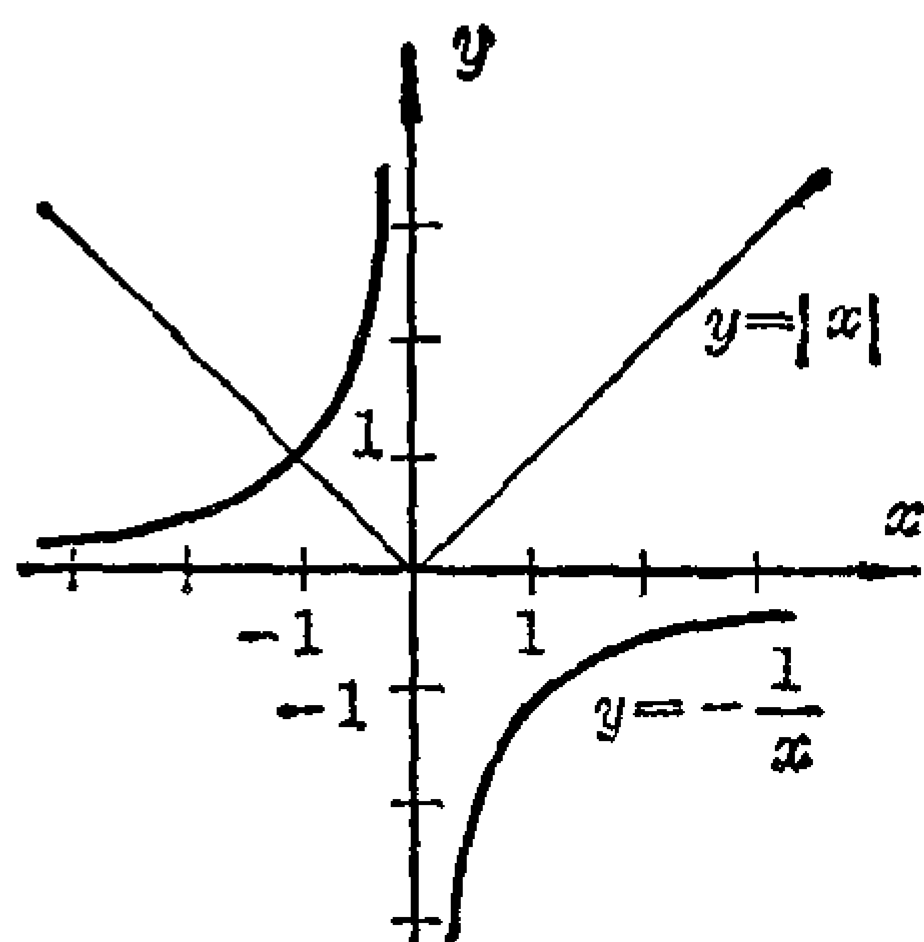


图 5.1-6 偶函数 $y=|x|$ 和奇函数 $y=-1/x$ 的图形

于 x 轴的直线 使函数的图形全部落在这两条直线之间。

偶函数和奇偶数 如果函数 $x \to y=f(x)$ 对其定义域内的每一个 x 都有 $f(-x)=f(x)$，则称此函数为**偶的**。如果函数 $x \to y=f(x)$ 对其定义域内每一个 x 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称此函数为**奇的**。

偶函数的图形关于 y 轴对称。奇函数的图形关于原点 (0, 0) 对称，绕这点旋转 180° 后图形的两部分重合(见图 5.1-6)。

偶　函　数	奇　函　数
$y=-x^2/2$	$y=x^3$
$y=\|x\|$	$y=-1/x$
$y=(x^2-1)/(x^2+1)$	$y=x/2$
$y=a\cdot x^{2n}$	$y=a\cdot x^{2n+1}$
$a\neq 0,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots$	
$y=\cos x$	$y=\sin x$

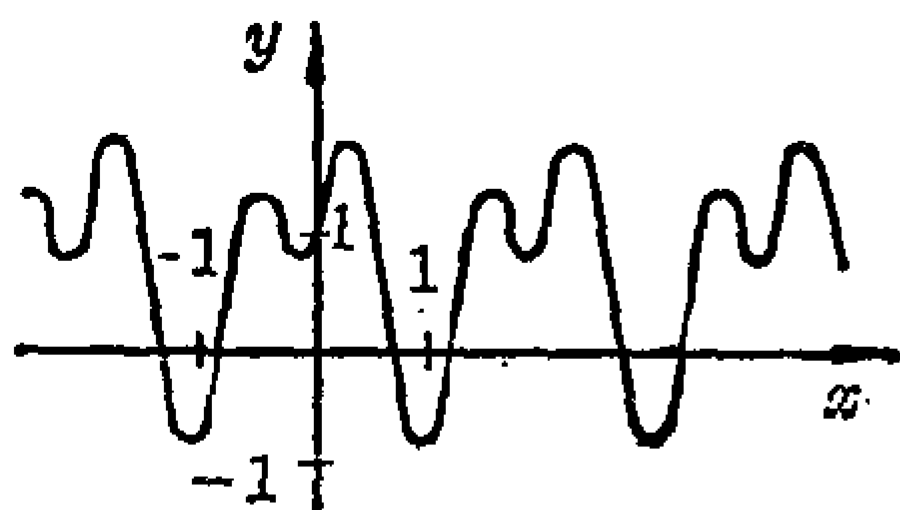


图 5.1-7 原始周期 $k=2$ 的周期函数图形

周期函数 $x \to y=f(x)$ 是一非常数值函数，如存在一数 $a>0$，使对于每一个可能的 x，都有 $f(x)=f(x+a)$，则称函数是**周期的**。此时也成立

$$f(x)=f(x+2a)$$

和

$$f(x)=f(x-a),$$

更一般地，对于每个整数 n 成立

$$f(x)=f(x+na),$$

只要值 $(x+na)$ 属于函数的定义域。每个这样的数 a 称为一个**周期**。称使 $f(x)=f(x+k)$ 成立的最小正数 k 为此周期函数的**原始周期**。周期函数若用图形表示，则在 x 轴方向平移一段等于周期整数倍的距离后，其图形又会重复出现

(见图 5.1-7)。最熟悉的周期函数是三角函数，用这些三角函数可以进一步构造更多的周期函数。例如: 函数 $y=b\sin(ax)$ 的周期为 $2\pi/a$，这里 $b\neq 0$ 及 $a\neq 0$。象 $y=b_1\sin(a_1x)+b_2\sin(a_2x)$ 这样的复合函数也是周期函数，只要 a_1 和 a_2 之比是有理数，也就是只要 $a_1/a_2=m/n$，其中 m 和 n 是互为素数的整数。第一个函数的周期是 $2\pi/a_1$，第二个函数的周期是 $2\pi/a_2$，它们的比为 $(2\pi/a_1):(2\pi/a_2)=a_2/a_1=n/m$。因此第一个函数周期的 m 倍正好等于第二个函数周期的 n 倍。因而复合函数的周期为 $m\cdot(2\pi/a_1)=n\cdot(2\pi/a_2)$。

【例】 由于和函数 $y=\sin(2x)+2\sin(3x/2)$ 的各个被加函数的周期为 π 和 $4\pi/3$，它们周期之比为 $\pi/4\pi/3=3/4$。因此所给的函数的周期为 4π (见图 5.1-8)。

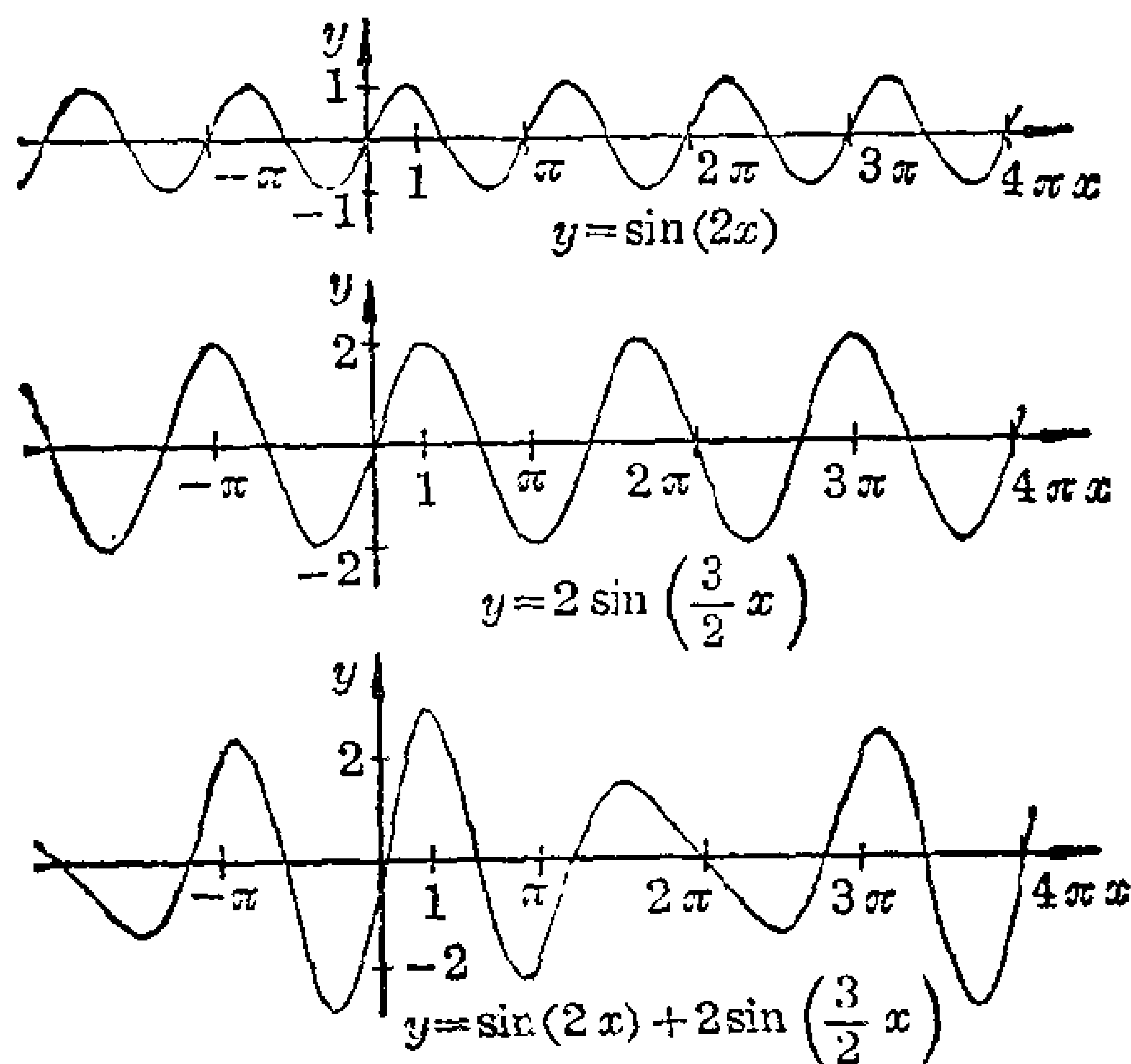


图 5.1-8 函数 $y=\sin(2x)$，$y=\sin(3x/2)$ 和 $y=\sin(2x)+2\sin(3x/2)$ 的图形

反函数

可逆函数 一个函数决定了定义域和值域的元素之间的单值对应，反过来对值域中的每个元素有定义域中一个或一个以上的元素与之对应。使值域每个元素只作为定义域中唯一的元素的象，那这种函数具有特殊的意义。因为这种逆对应也是单值的，对于值域中每个元素 r，在定义域中只有一个元素 d 与之对应。在这种情况下，所给函数 f 的值域

可以看成是新函数 φ 的定义域。如果所给函数 f 所确定的对应为 $d\to r=f(d)$，那末新的函数 φ 所确定的对应为 $r\to d=\varphi(r)$。换句话说，$(r, d)\in\varphi$的充要条件是 $(d, r)\in f$。定义域 X 和值域 Y 之间的对应能按上述意义反过来的函数称为可逆函数(见下图)，存在 X 到 Y 上的一一

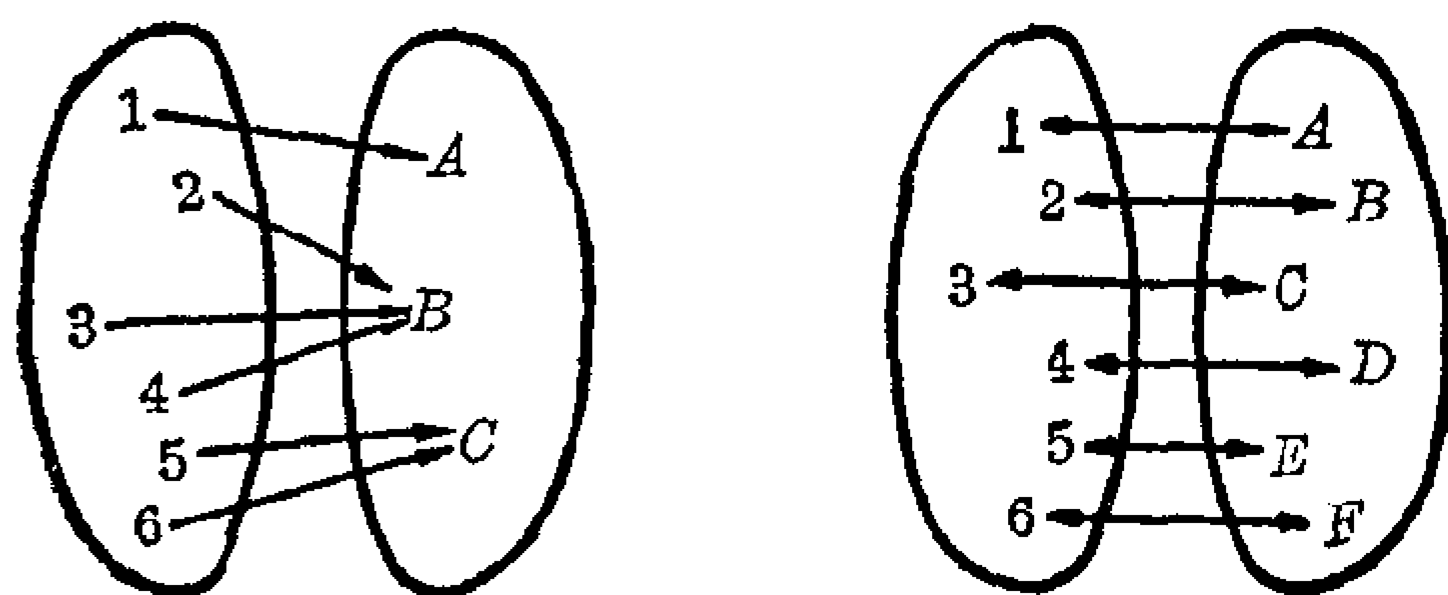


图 5.1-9　非可逆函数(左)和可逆函数(右)

对应。严格单调函数属于可逆函数类：任何严格单调函数总是可逆的。另一方面，可逆函数不一定是单调的。例如定义域和值域可以不是有序的集合，因此函数的单调性不能定义。又，非单调函数也可以是可逆的。例如下表所给出的函数就是这样的一种例子，它的定义域和值域只由有限个元素组成：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9

反函数　如果将可逆函数 f 的值域 Y 看成新函数 φ 的定义域，新函数的值域是 f 的定义域 X；如果将由函数 f 所给出的集合 X 和集合 Y 之间的单值对应反过来，就能得到给定函数 f 的*反函数* φ。反函数本身也是可逆的。考虑 $d\to r=f(d)$ 和 $r\to d=\varphi(r)$，很容易看出一给定函数 f 的反函数的反函数就是 f 本身。因而，可以讲 f 和 φ *互为反函数*。

【例1】　函数 f

定义域	1	2	3	4	5
值　域	a	b	c	d	e

f 的反函数 φ

定义域	a	b	c	d	e
值域	1	2	3	4	5

如果 $y=f(x)$ 是一可逆函数的方程，那末很自然也能用同样的方程来描述反函数，只要把 y 看成是自变量和把 x 看成为因变量就可以了。然而由于习惯，人们约定在用公式表示的函数方程中，x 总是表示自变量和 y 总是表示因变量，并且希望函数方程尽可能用显式表示。因此将方程进行如下的整理：

在特殊区间内的反函数　在讨论单调函数时已讲了非单调函数在定义域的某些区间内可以是单调的。在这些区间内，它们也是可逆的。

【例1】　函数 $y=x^2$ 在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 内是单调和可逆的。在这区间内，它的反函数为 $y=\sqrt{x}$。当然在区间 $-\infty<x\leqslant 0$ 内也是单调和可逆的，在此区间内它的反函数为

$$y=-\sqrt{x}。$$

【例2】　可将 $y=\sin x$ 的定义域分成一些区间，在这些区间内所给的函数是单调的，其反函数用 $y=\arcsin x$ 来表示，但在每一种情况下对其值域必须加以说明。因为不然的话，就不知道反函数是原来函数在哪一个单调区间上的反函数。例如，如果 $y=\sin x$ 在区间 $3\pi/2\leqslant x\leqslant 5\pi/2$ 内求反函数，那末反函数应该用 $y=\arcsin x$ $(3\pi/2\leqslant y\leqslant 5\pi/2)$ 来表示。如对值域不加说明，那末 $\arcsin x$ 总是被理解为是**主值**。它的值在区间 $[-\pi/2,+\pi/2]$ 内，并用 $\mathrm{Arc}\sin x$ 表示(见图 5.1-11)。

图 5.1-11　$y=\arcsin x$ 的图形，细线条表示主值 $y=\mathrm{Arc}\sin x$

【例3】　对于其他的三角函数也可选择一些区间，在这些区间内函数是单调的。因此在这些区间内可定义一些圆函数作为它们的反函数。例如，函数 $y=\cos x$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant+\pi$ 内从 $y=+1$ 单调递减到 $y=-1$。在递减过程中它值域内所有的值只取一次。因而在这区间内存在一反函数，它用 $y=\arcsin x$ 表示，它的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant+1$，值域为 $\pi\geqslant y\geqslant 0$。如果对函数 $f=\cos x$ 在另一个区间内（在这区间内函数是单调的）求反函数，例如在区间 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 内，于是 $y=\arccos x$ 的值域为 $\pi\leqslant y\leqslant 2\pi$。为了表明所要的是哪一个反函数，必须在每一种情况下给出其值域。如果没有说明，那末 $\arccos x$ 总被理解为是**主值**，它的值域为 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，并用 $\mathrm{Arc}\cos x$ 来表示。

下面两个函数的情况完全类似：对于函数 $y=\arctan x$ 有 $-\pi/2<\mathrm{Arc}\tan x<+\pi/2$，对于函数 $y=\mathrm{arc}\cot x$ 有 $0<\mathrm{Arc}\cot x<+\pi$(参见 **I.** 第10章)。

5.2 多项式和有理函数

有理函数的概念

称表达式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为 n 次多项式，这里 n 是自然数，系数 a_r 是任意的实数，且 $a_n\neq 0$。

有理函数的例题：1. $y=8x-3$。2. $y=\dfrac{4x^2+1}{x(x^3-2)}$。

3. $y=\sqrt{10}\cdot x^2-\dfrac{\ln 5}{x}$。4. $y=1/x^4$。

非有理函数的例题：1. $y=\sqrt{x^3}$。2. $y=\cos^2 x$。

3. $y=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$。

有理函数是这样一种函数，其形式为 p/q，这里 p 和 q 是多项式函数，q 至少有一个系数不为 0。

对于多项式函数，以所有实数组成的域 $\mathbf{R}$ 作为它们的定义域。如果没有用特殊条件加以限制的话，总认为 $\mathbf{R}$ 是它的定义域。对于有理函数也是如此，只要将那些使分母等于 0 的值排除在定义域之外。也应指出有理函数常在整个定义域中是连续的，且是任意阶可微的。

下面先考虑多项式函数，然后考虑有理函数。在得出一般的性质之前，首先考察那些经常遇见的类型特殊的函数。

线性函数

函数 $y=mx$ 函数 $y=x$，$y=x/2$ 和 $y=-4x/3$ 的数值表给出了一些数对 (x, y)。从这些数对可以在笛卡尔坐标系中得到函数图形的一些点（见图 5.2-1）。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x/2$	…	$-3/2$	1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	…
$y=-4x/3$	…	4	$8/3$	$4/3$	0	$-4/3$	$-8/3$	-4	…

由于数对(0, 0)总是出现,因此曲线总是通过坐标原点。这些曲线是直线,这是因为由 $y=mx$ 可以看出,任意选择的点 $P_1, P_2, \cdots, P$ 的坐标总是满足 $y_1/x_1=y_2/x_2=\cdots=y/x=m$, 在这里对于每个函数 m 总是一常数(见图 5.2-2)。如果 $P_{1x}, P_{2x}, \cdots, P_x$ 是点 $P_1, P_2, \cdots, P$ 在 x 轴上的投影,于是三角形 OP_1P_{1x}, OP_2P_{2x} 是相似的。既然点 $P_{1x}, P_{2x}, \cdots, P_x$ 在一条直线上,因此点 $P_1, P_2, \cdots, P$ 也一定在一条直线上。因为 m 是常数,各点所对应的坐标是成比例的, $y_1/x_1=y_2/x_2$, y 的大小和 x 的大小成正比,常数 m 是比例因子。如果一工作的进度 L 正比于工作时间 t(以小时为单位),二者之间的关系可用线性函数 $L=mt$ 来表示,比例常数表示每小时的进度。从线性函数 $y=mx$ 的图形以及函数 $y=x$, $y=x/2$ 和 $y=-4x/3$ 的数值表,可以看出函数是单调的。对于正的 m, 函数是单调递增的。对于负的 m, 函数则是单调递减的。对于道路和铁路,这个常数称为坡度(见图 5.2-3)。在数学上,坡度定义为高度的落差 BC 与水平距离 AB 之比(见图 5.2-4)。它用比例或百分比的形式给出,例如: 1:50, 3:150, 1/50, 2/100, 2% =0.02 都表示同样的意义。

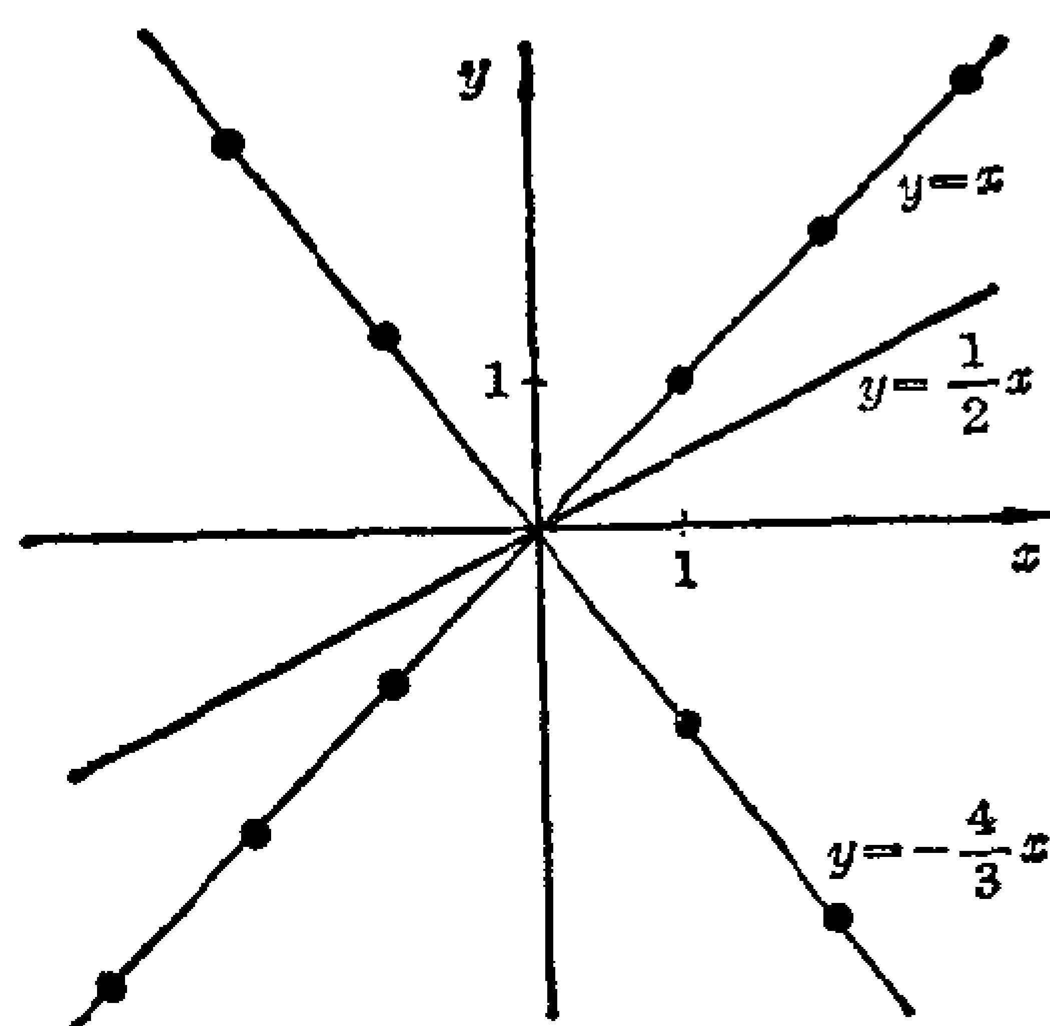


图 5.2-1　函数 $y=x$, $y=x/2$ $y=-4x/3$ 的图形, $m=1$, $m=1/2$, $m=-4/3$

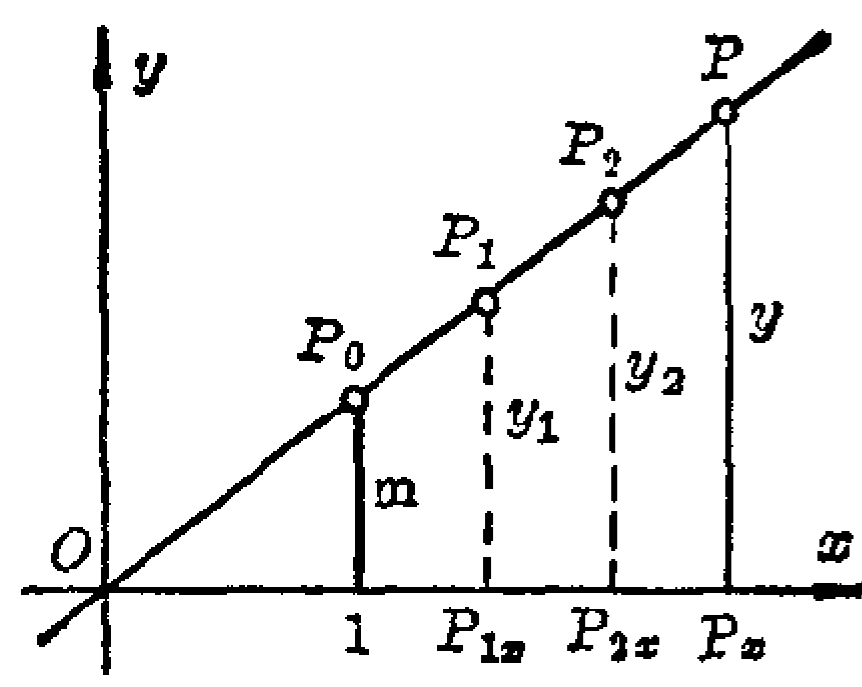


图 5.2-2　$y=mx$ 的图形是一条直线



图 5.2-3　一陡坡的符号

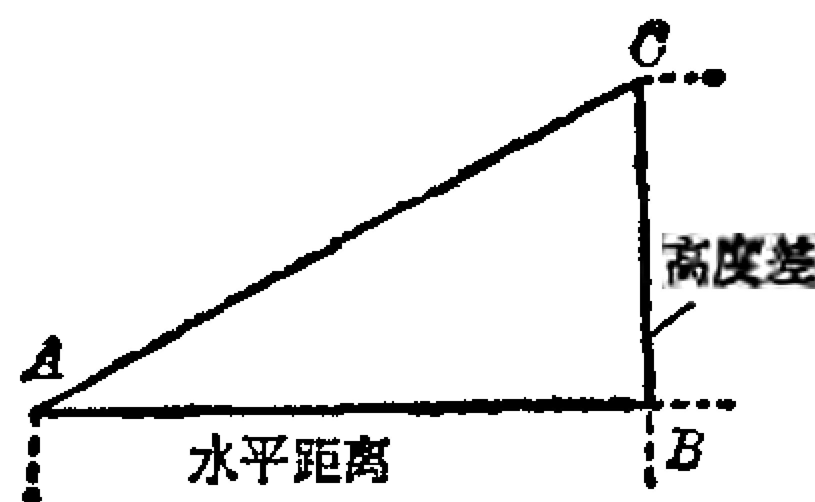


图 5.2-4　坡度

函数 $y=mx+c$ 如果在直线 $y=mx$ 上对每一个 x 将纵坐标 y 加上或减去一固定的值 c，这就意味着将直线 $y=mx$ 作一平移。这一点最容易从它在 y 轴的截距为 c 上看出来(见图 5.2-5)。这样，函数 $y=mx+c$ 的图形是一条直线，其斜率为 m，在 y 轴上的截距为 c(参见 I. 第 10 章)。

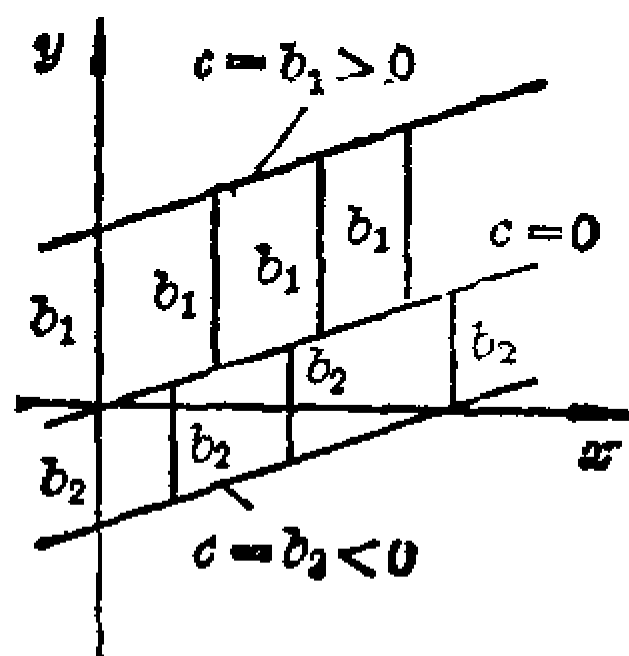


图 5.2-5 函数 $y=mx+c$

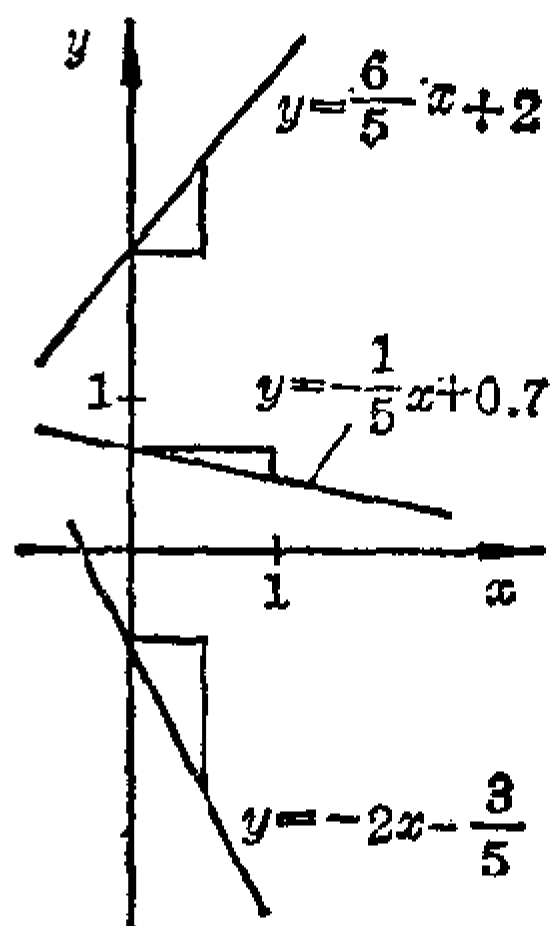


图 5.2-6 另一些函数 $y=mx+c$ 的图样

在作这条直线时实际上不必真的进行平移，可先在 y 轴上标出截距 c，想象通过截距这一端点有一根平行于 x 轴的直线，然后作所需的直线，使它关于想象的直线的坡度为所给的斜率(见图 5.2-6)。

线性函数的隐式表示 在笛卡尔坐标系中，只要 A 和 B 不同时为 0，$Ax+By+C=0$ 的图形总是一条直线(参见 I. 第 13 章)。此外，如果 $B\neq0$，则 $Ax+By+C=0$ 就能化成用显式表示的线性函数。经过整理，它的显式表示为 $y=-(A/B)x-(C/B)$，或 $y=mx+c$，这里 $m=-(A/B)$ 及 $c=-(C/B)$。当 $A=0$ 和 $B\neq0$ 时，所得的函数是一常数值，它的图形是一条平行于 x 轴的直线。当 $A\neq0$，$B=0$ 时，方程根本不是函数方程。方程 $Ax+C=0$ 的图形是一条平行于 y 轴的直线。

二次函数

函数 $y=x^2$ 由函数方程 $y=x^2$ 得到的曲线称为标准抛物线(见图 5.2-7)。

$y=x^2$ 的数值表为：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

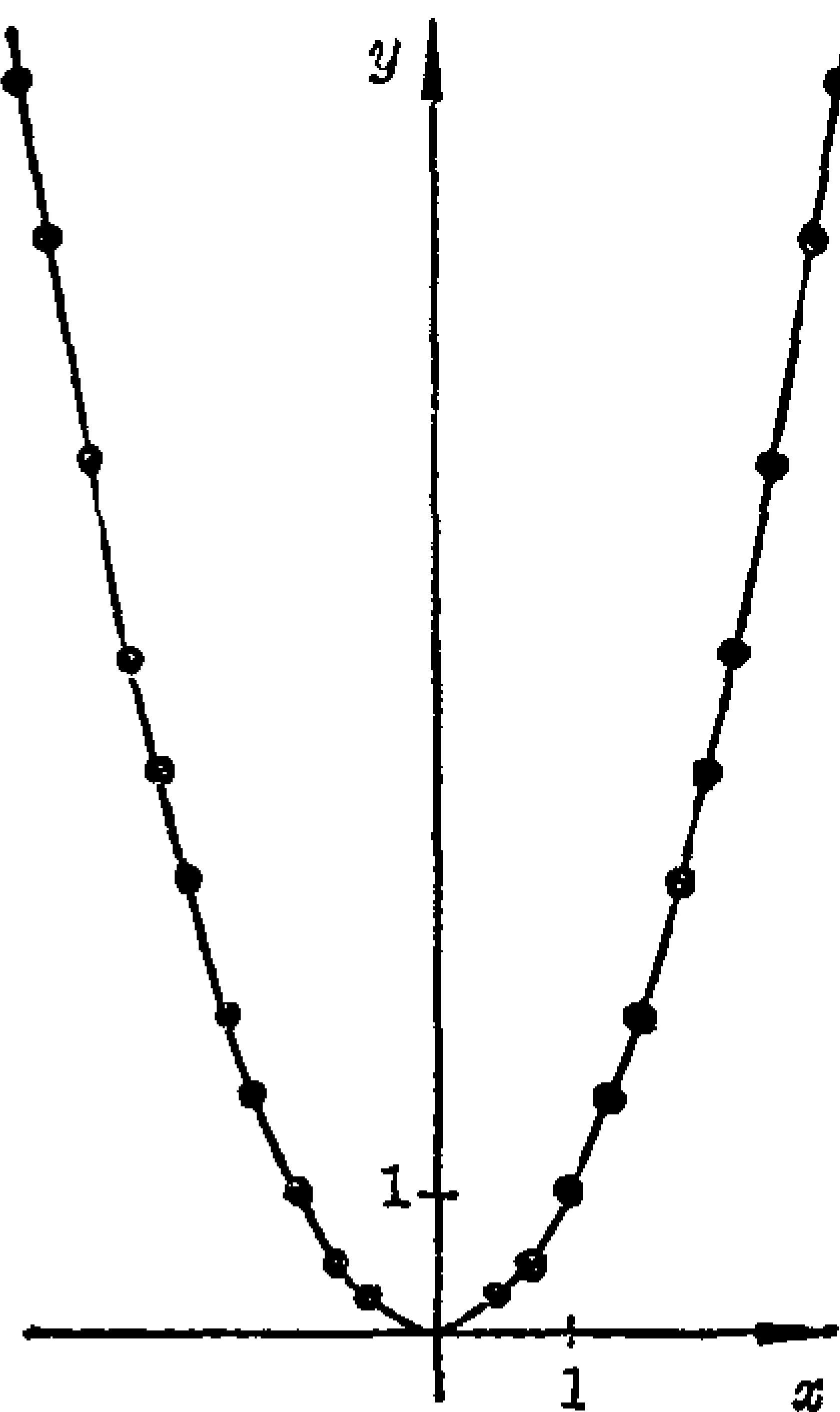


图 5.2-7　作为函数 $y=x^2$ 的图形的标准抛物线

对于表中列出的那些值之间的值可通过**平方表**查得，平方表是一张经过精巧排列的函数 $y=x^2$ 的数值表。

性质。因对于每个 x 值都有

$$x^2\geqslant 0,$$

故曲线总是在 x 轴的上方。这样，对应于定义域

$$-\infty<x<+\infty$$

的值域为

$$0\leqslant y<+\infty。$$

标准抛物线关于 y 轴是对称的(**轴对称**)。称零点为其**顶点**，零点的对称点即为本身。和直线相对照，标准抛物线的**曲率**可根据下列的事实粗略估计出来，即当 $|x|$ 均匀增加时，y 的变化越来越大。在表内列出了变量 x 和 y 的增量 Δx 和 Δy 的数值，以及 Δy 的增量 $\Delta^2 y$ 的数值。它表明了 Δx 虽然不变，但 Δy 在增加，并且只有 $\Delta^2 y$ 才保持不变。

Δx	…		1		1		1		1		1		1		1		1		…
x	…	−2		−1		0		1		2		3		4		5		6	…
y	…	+4		+1		0		+1		+4		+9		+16		+25		+36	…
Δy			−3		−1		+1		+3		+5		+7		+9		+11		…
$\Delta^2 y$	…			2		2		2		2		2		2		2			…

为了能比较直观地理解**曲率**，可以想象有一辆汽车按 x 值增加的方向沿着曲线行驶，如果方向盘必须向左转才能使汽车保持沿着曲线行驶，那末称这曲线的曲率是正的；如果必须向右转，则称其曲率是负的。于是，在整个标准抛物线上，其曲率都是正的。

函数 $y=x^2+px+q$　用配方方法，即若插进线性项 px 系数一半的平方，则所给出的函数可以表示为 $y=(x-a)^2+b$ 的形式：

$$y=x^2+px+q=x^2+px+(p/2)^2-(p/2)^2+q$$
$$=(x+p/2)^2-(q-p^2/4)。$$

记 $a=-p/2$, $b=(q-p^2/4)$,就可得 $y=(x-a)^2+b$ 或 $(y-b)=(x-a)^2$; 即 $\eta=\xi^2$, 其中 $y-b=\eta$, $x-a=\xi$。这就意味着在 ξ-η 坐标系中函数的图形是标准抛物线 $\eta=\xi^2$。但 ξ-η 坐标系可经线性变换 $x-a=\xi$, $y-b=\eta$, 变换成 x-y 坐标系,这种变换相当于坐标系的平移(见图 5.2-8)。在 x-y 坐标系中,标准抛物线 $\eta=\xi^2$ 的顶点坐标为 (a, b)。若用所给的二次函数方程 $y=x^2+px+q$ 的系数表示,则顶点坐标为 $(-p/2, q-p^2/4)$ (见图 5.2-9)。

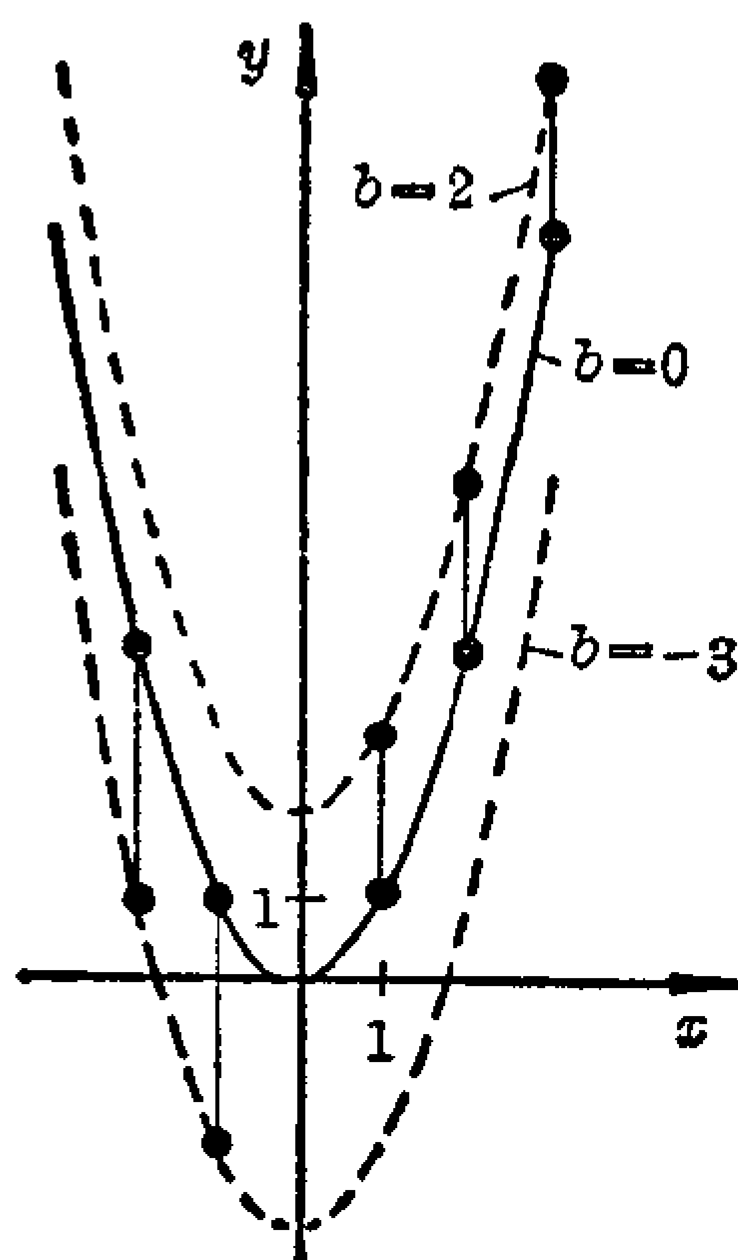


图 5.2-8 函数 $y=x^2+b$ 的图形

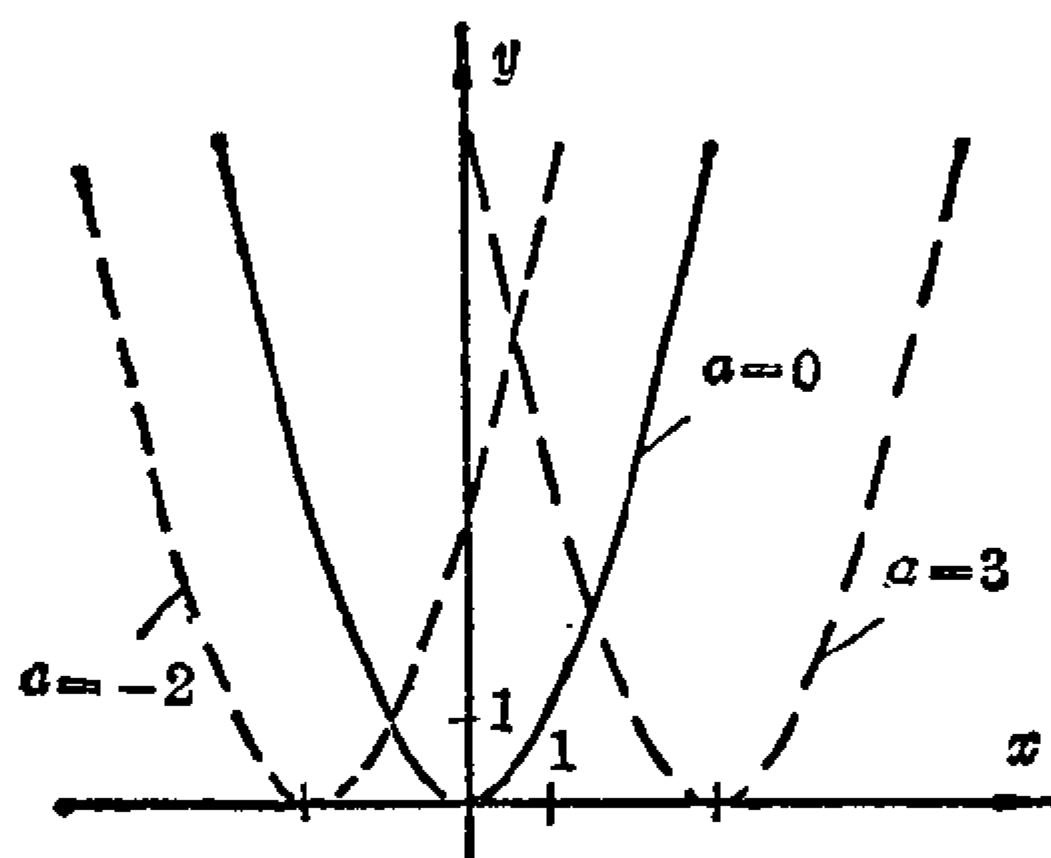


图 5.2-9 函数 $y=(x-a)^2$ 的图形

例如,将函数方程 $y=x^2+6x+11$ 进行配方得 $y=(x^2+6x+9)-9+11$,或 $(x+3)^2+2$。这样,可以马上知道它的图形是由标准抛物线经过平移得到的,其顶点为 $(-3, 2)$。

一般二次函数 $y=Ax^2+Bx+C$ 在这方程中假定 $A\neq 0$, 否则, 它根本不是二次函数。这样,因子 A 可以提出:

$$y=A[x^2+(B/A)x+(C/A)]=A\cdot Y。$$

下面这些二次函数 Y 的图形是已知的:

$$Y=x^2+(B/A)x+(C/A)=x^2+px+q,$$

$$Y=(x+p/2)^2+(q-p^2/4)=[x+B/(2A)]^2+[C/A-B^2/(4A^2)],$$

这里 $p=B/A$, $q=C/A$。Y 的数值是标准抛物线 [它的顶点在 x 轴方向被平移了 $p/2=-B/(2A)$] 的纵坐标 $[x+B/(2A)]^2$和在 y 轴方向的平移量 $b=q-p^2/4=[C/A-B^2/(4A^2)]$ 之和。但方程 $y=A\cdot Y$ 表示 Y 的每一个值与数 A 相乘。当 $A>1$ 时,标准抛物线的纵坐标以及 $[C/A-$

Δx	…		1		1		1		1		1		1		1		1	
x	…	−4		−3		−2		−1		0		1		2		3		4
y	…	−64		−27		−8		−1		0		1		8		27		64
Δy	…		37		19		7		1		1		7		19		37	
$\Delta^2 y$	…			−18		−12		−6		0		6		12		18		
$\Delta^3 y$	…				6		6		6		6		6		6			

三次抛物线的曲率在 $x<0$ 时是负的，在 $x>0$ 时是正的，在原点处改变符号。这种点称为*拐点*。因此三次抛物线在原点有一拐点。

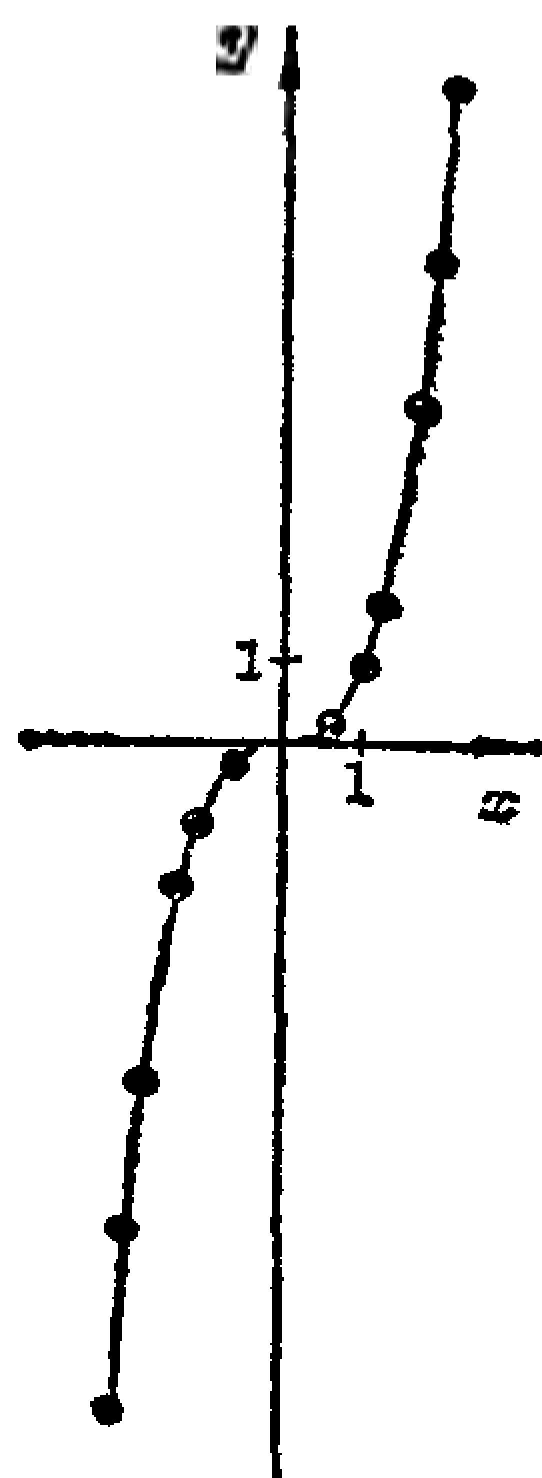


图 5.2-12 函数方程 $y=x^3$ 的三次抛物线

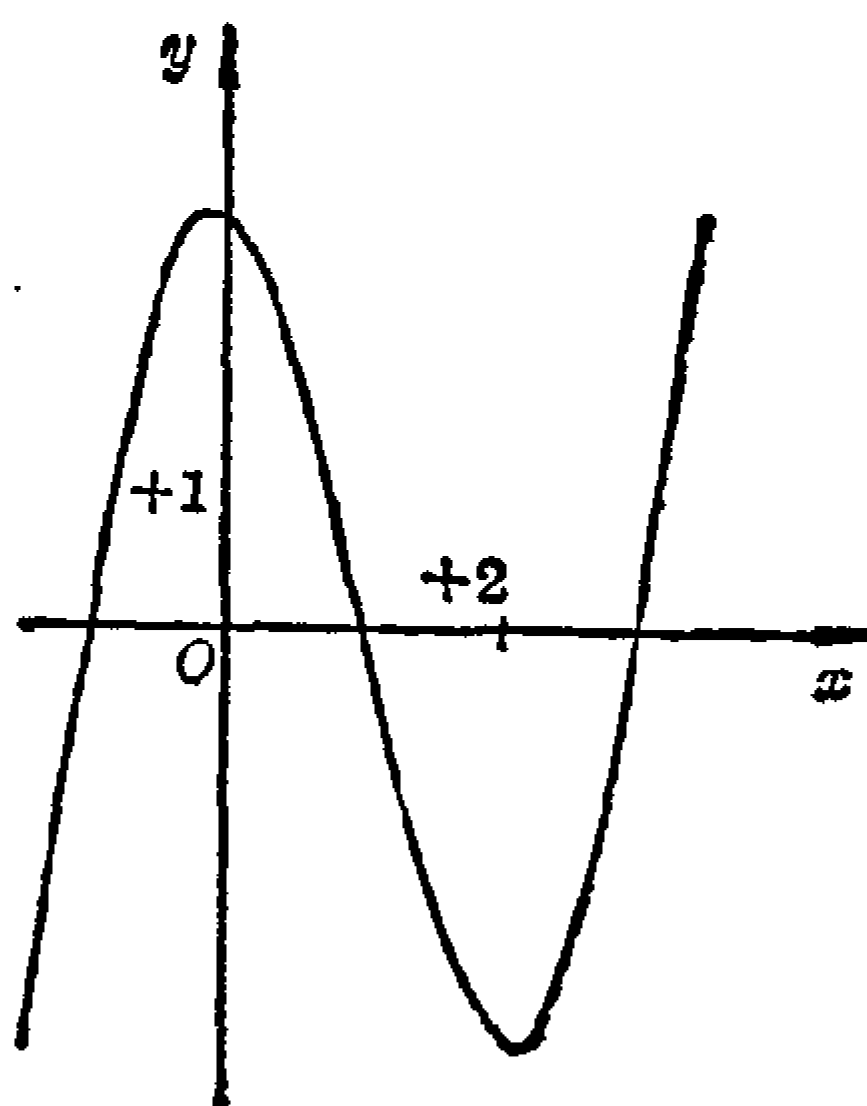


图 5.2-13 函数 $y=x^3-3x^2-x+3$ 的图形

其他三次函数 为了考察其他三次函数的图形和特性，常在同一坐标系中讨论它们与函数 $y=x^3$ 的关系，因此 $y=x^3$ 的图形也称为比较三次抛物线或标准三次抛物线。例如函数 $y=-x^3$ 的图形是标准三次抛物线关于 x 轴的镜象。对于函数 $y=kx^3$（扩展因子 $k>0$），在 $k>1$ 时，它的图形是由标准三次抛物线通过扩展而成的三次抛物线。而在 $k<1$ 时，它的图形是由标准抛物线通过压缩而成的三次抛物线。最后，函数 $y=(x-a)^3+b$ 的图形可从将标准三次抛物线作一平行于坐标轴的平移得到，它具有新的对称中心 $Z=(a, b)$。

一般的三次函数 $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ 总是有三个零点。若对系数之间的关系加上某些条件，则其中两个零点互为共轭复数。另外，在微分学中可以证明当有三个实数零点时，函数有两个极值，一个是(局部)极大值，另一个是(局部)极小值。由此说明这样一种函数的图形不能由标准三次抛物线经过简单的变换得到(见图 5.2-13)。

例如：$y=x^3-3x^2-x+3$。

数值表

x	-2	-1	-0.15	0	$+1$	2.15	$+3$
y	-15	0	$+3.08$	$+3$	0	-3.08	0

正指数的幂函数

幂函数的概念　函数 $y=x^n$ 为幂函数，其中 n 是一整数。如果 n 是正的，则函数是一多项式；如果 n 是负的，$n=-\nu(\nu>0$，是一整数)，那末函数可以表示成 $y=\dfrac{1}{x^\nu}$ 的形式。这是一个有理函数。

如果是偶数指数 $n=2m$，则多项式函数 $y=x^n$ 是偶函数。在 $-\infty<x\leqslant0$ 中，函数单调递减；而在 $0\leqslant x<+\infty$ 中，函数单调递增。当指数为奇数 $n=2m+1$ 时，函数 $y=x^n$ 是奇函数。它在整个实轴上是单调递增的。

偶次多项式幂函数 $y=x^{2m}$　这些函数的曲线关于 y 轴对称，它们的曲率在各处都是正的(见图 5.2-14)，每根曲线都经过原点以及点 $Q(-1, +1)$ 和 $P(+1, +1)$。在顶点附近，m 越大，它的切线越平。而在 Q 和 P 点附近，m 越大，切线越陡。对于在 $y=x^{2m_1}$ 上的每一个点 (x_1, y_1)，用微积分的方法可在 $y=x^{2m_2}(m_2>m_1)$ 上决定一点 (x_2, y_2)，使这两点的切线相互平行。这些曲线称为 $2m$ 次抛物线(见图 5.2-15)。

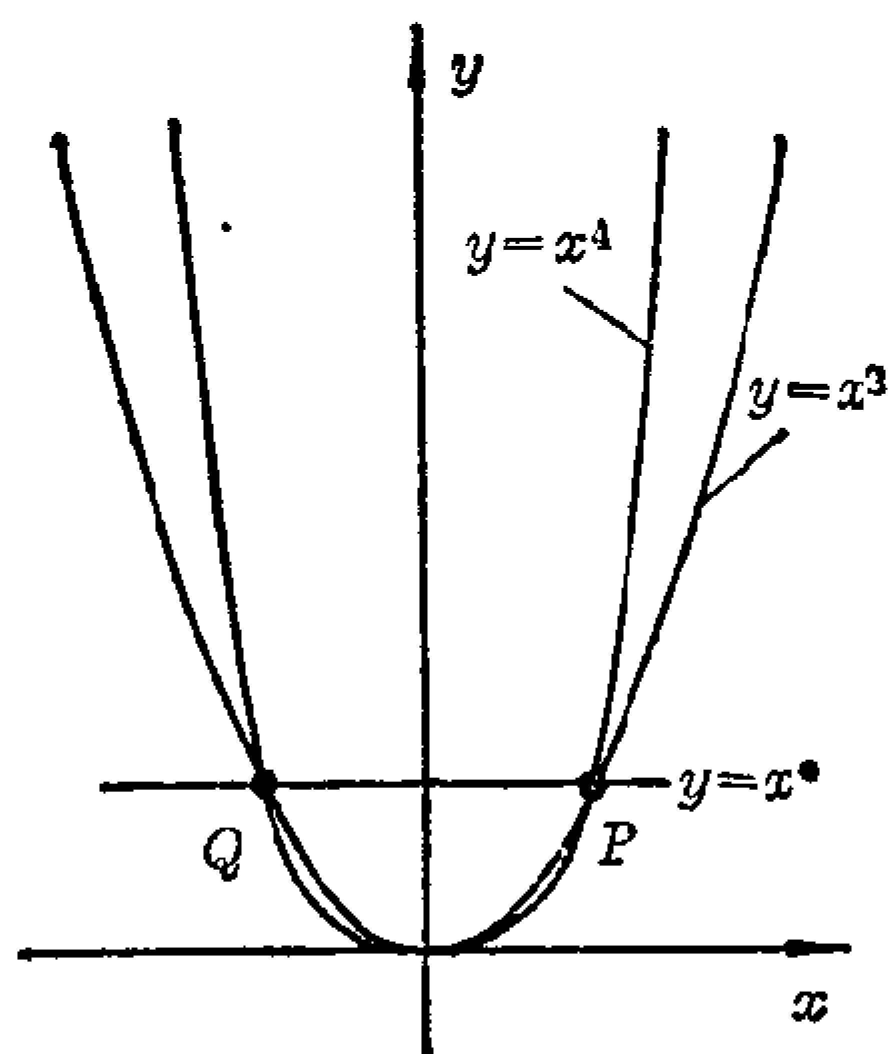


图 5.2-14　函数 $y=x^{2m}(m=0,1,2)$ 的图形，$y=x^0$ 在 $x=0$ 处无定义

奇次多项式幂函数 $y=x^{2m+1}$　它的曲线关于原点中心对称。除第一象

限和第二象限的角平分线 $y=x$ 外，在定义域内所有的负值($-\infty<x<0$)上，这些曲线的曲率为负；而在所有的正值($0<x<+\infty$)上，曲率为正。因此原点是它们的拐点。这些 $2m+1$ 次抛物线中的每一条曲线都通过($+1$, $+1$)和(-1, -1)这两点。在这两点附近，m 值越大，切线就越陡。但在它们的公共拐点(0, 0)附近，m 值越大，切线越平(见图 5.2-16)。

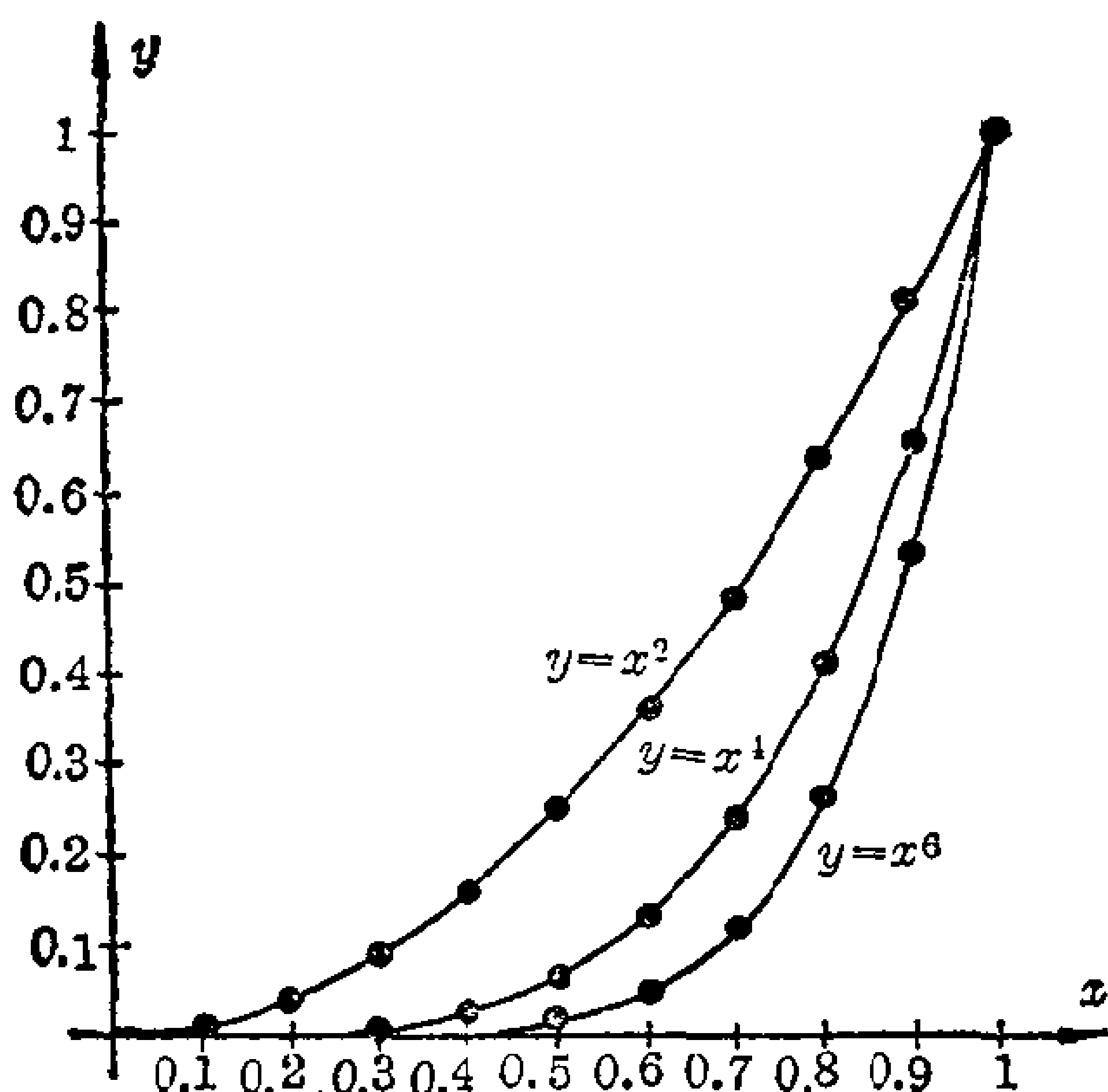


图 5.2-15 作为 $2m$ 次抛物线的函数 $y=x^{2m}$ 曲线的一部分

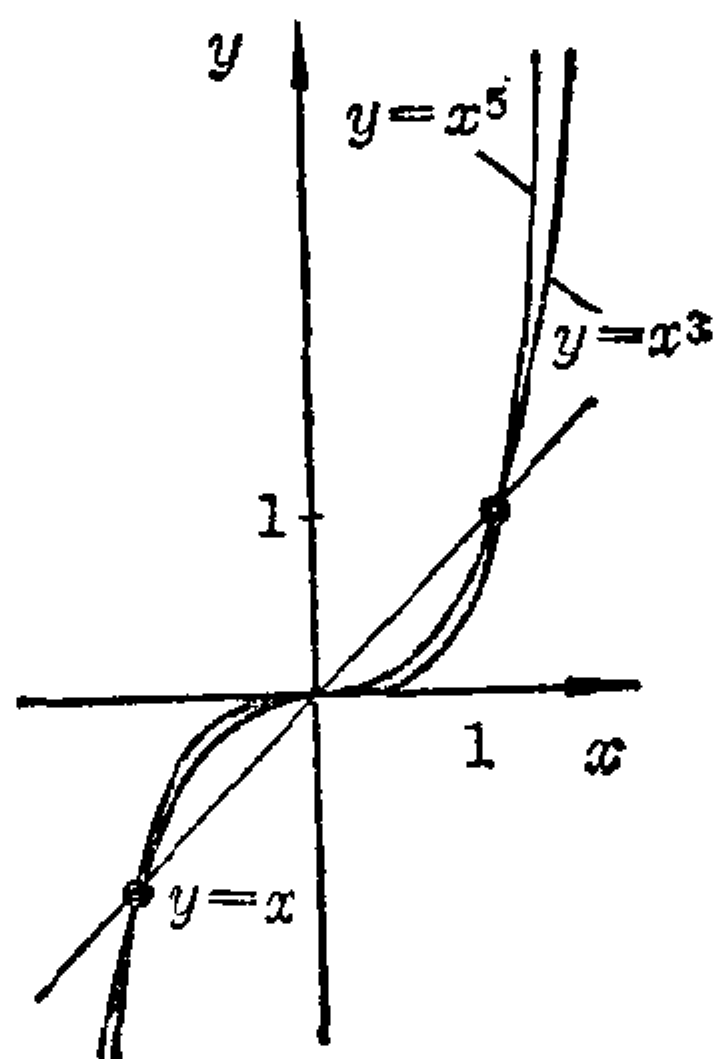


图 5.2-16 函数 $y=x^{2m+1}$ ($m=0$, 1, 2)的图形

多项式函数

在上面已定义了表达式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0$ ($a_n\neq0$) 为 n 次多项式。多项式是一种特殊的有理函数。

例如：$y=2(x^2-1)^2+(x+2)(x^3-2)-2x+x^2-1$

$$=2x^4-4x^2+2+x^4-2x+2x^3-4-2x+x^2-1,$$

或 $y=3x^4+2x^3-3x^2-4x-3$ 是一个四次多项式，系数为 $a_4=3$, $a_3=2$, $a_2=-3$, $a_1=-4$, $a_0=-3$。

多项式表示的唯一性 两个不同的多项式能表达同一个有理函数的假定，会导致矛盾。因为如果 $y_a=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 和 $y_b=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 是两个不同的多项式，则必定或者有 $n\neq m$，或者有 $n=m$，而此时至少有一对系数使 $a_i\neq b_i$。它们的差

$$(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)-(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x^1+b_0)$$

根据 x 的幂进行归并以后仍然是一个多项式，且至少有一个系数不为零，它的次数不会超过 m 和 n 中较大的数。因此这个多项式只有有限个不超过它的次数的零点。但由于假定 y_a 和 y_b 是表示同一个函数，它们的差必须恒为零，即对于所有的 x 函数值恒为零。从这一矛盾可以得到下面的结论：两个多项式具有相同的次数 $m=n$，它们相对应的系数也相等 $a_i=b_i$。因为只有这样两个多项式的差才恒等于零。

在这种意义上我们说多项式函数的表示式是唯一的。上述对应系数相等的结论，常被用来决定一多项式的系数，这种方法称为**系数相等法**。例如，在部分分式的分解中和解微分方程时都要用这种方法。

多项式的因式分解

$P(x)$ 是一次数 $n\geqslant 1$ 的多项式，如它能表示成次数更低的多项式的乘积，则称它是**可约的**。如果这种表示是不可能的，则称此多项式是**不可约的**。次数为零的多项式是常数值函数。由于它们既不是可约的，也不是不可约的，故对它们不进行这样的分类。然而一次多项式总是不可约的。

如果 n 次多项式 $P(x)$ 是可约的，即如果它能分解成乘积 $P(x)=p_1(x)\cdot p_2(x)$，那末多项式 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 的次数至少为1，且必须小于 n。如果 $p_1(x)$ 或 $p_2(x)$ 是可约的，可以重复上面的过程。最多经过 n 步后，多项式被分解成乘积 $P(x)=g(x)h(x)k(x)\cdots$，两个或更多的多项式的乘积若能被一不可约多项式整除，那末乘积中至少有一个多项式一定能被此不可约多项式整除。借助于这个定理（在此不加以证明）就能证明可约多项式的因式分解（除了次序和一个常数因子外）是唯一的。如果 $P(x)=g_1(x)h_1(x)k_1(x)\cdots$ 和 $P(x)=g(x)h(x)k(x)\cdots$ 是两种因式分解，其中每个因子是不可约因子，那末 $g_1(x)$ 一定能整除多项式 $g(x)$，$h(x)$，$k(x)$，…中的一个。但由于这些因式本身都是不可约的，因此除了一常数因子 c_1 外，它一定等于其中的一个。不失一般性，可以假定 $g(x)$ 就是这个多项式。于是 $g_1(x)=c_1g(x)$。用 $g(x)$ 除 $P(x)$ 有：

$$c_1h_1(x)k_1(x)\cdots=h(x)k(x)\cdots$$

同理有 $h_1(x)=c_2h(x)$，因而 $c_1c_2k(x)\cdots=k(x)\cdots$。于是除了常数因子外，这两种因式分解是完全一样的。

至于一个多项式是否可约的问题，当然主要取决于它的系数和不可约因式的系数是属于哪一种**数系**。例如，$4x^2-1$ 在整数域内是不可约的，

但在实数域内是可约的。x^2-2在有理数域内是不可约的,而在实数域内可分解为$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$。而x^2+4在实数域内是不可约的，但在复数域内可分解为$(x+2i)(x-2i)$。如果多项式的系数可以取任意的复数，那末代数学的基本定理证明了每一个n次多项式函数可以分解成n个线性因式$(x-\alpha_k)$，$k=1, 2\cdots n$的乘积，数α_k是函数的零点。在多项式系数为实数的情况下，如果复数$\alpha=a+bi$是它的零点，那末这个复数的共轭复数$\bar{\alpha}=a-bi$也是它的一个零点。于是对应的线性因式的乘积是$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=(x-a-bi)(x-a+bi)=(x-a)^2+b^2=x^2-2ax+(a^2+b^2)$,即是一系数为实数的**二次多项式**。如果用这种方法将所有的共轭复数对所对应的线性因子集中在一起，那末在实数域上不可约的因式或者是**实数的线性因式**，或者是系数为实数的**二次多项式**。当系数限于实数域时，那末所有不可约多项式的次数最多为2。如果进一步要求所给定的多项式和它的因式的系数都要是有理数,这一条定理就不再成立。例如,在实数范围内,因式分解$x^4-5=(x^2+\sqrt{5})(x^2-\sqrt{5})$就不能允许。

零点

如果函数$x\to y=f(x)$在α的值为0,即$\alpha\to f(\alpha)=0$，那末称α为该函数的一个零点。这样,当f为多项式时就有$f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$。

在函数的图形中,一实的零点就是曲线和x轴的交点或切点。

如果α是多项式$f(x)$的零点，那末$f(x)$就能被$(x-\alpha)$整除。因此,存在一多项式$g(x)$，使$f(x)=(x-\alpha)g(x)$。

在任何情况下,多项式$f(x)$总能用$(x-\alpha)$去除,其中α是任意的。这样除了以后,可得一商函数$g(x)$,其次数低于$f(x)$,而余数r一定比$(x-\alpha)$的次数低,因此它一定是个常数,于是有$f(x)=(x-\alpha)g(x)+r$。如果α是一零点,那末令$x=\alpha$，这一方程变为$0=0\cdot g(\alpha)+r$。因而余数r**必定为零**，即函数$f(x)$能被线性因式$(x-\alpha)$整除而没有余数，$f(x)=(x-\alpha)g(x)$。这一定理的推广可用归纳法来证明。

如果α_1、α_2、α_3、$\cdots$、α_k是多项式$f(x)$的零点,那末乘积$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)$是$f(x)$的一个因式,即$f(x)$可表示成$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)g(x)$。

例如：多项式 $f(x)=x^3-5x^2+7x-3$ 有一零点 $x=3$，用 $(x-3)$ 除后得商 x^2-2x+1。因此多项式可表示成

$$f(x)=(x-3)(x^2-2x+1)=(x-3)(x-1)^2。$$

多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 最多有 n 个不同的零点。

用归纳法证明： 1. 对于 $n=1$，即对于多项式 a_1x+a_0（$a_1\neq0$，否则的话多项式就不是一次的），定理成立，因为这多项式只具有一个零点 $x=-a_0/a_1$。

2. 设 $f(x)$ 是 $n+1$ 次多项式，α 是多项式的一个零点。根据前面的定理，$f(x)$ 能表示为 $f(x)=(x-\alpha)g(x)$ 的形式，这里 $g(x)$ 的次数仅为 n 次。乘积 $(x-\alpha)g(x)$ 只有当其中至少一个因式为零时才为零。当 $x=\alpha$ 时，第一个因式为零，同时根据归纳法假设最多有 n 个不同的 x 值使第二个因式为零。因此，最多有 $n+1$ 个不同的 x 值，使乘积也就是使 $f(x)$ 等于零。定理证毕。

零点的重数　一零点为 α 的多项式可能不仅被 $(x-\alpha)$ 整除，也可能被 $(x-\alpha)^2$，$(x-\alpha)^3$ 或 $(x-\alpha)$ 的更高幂次所整除。如果 $f(x)$ 能被 $(x-\alpha)^k$ 整除，但不能被 $(x-\alpha)^{k+1}$ 整除，那末称 α 为函数 $f(x)$ 的 k 阶零点或称此零点的重数为 k（$k\geqslant1$，为一整数）。

【例】　多项式 $x^4-9x^3+27x^2-31x+12$ 有一二阶零点 $x=1$，即它能被 $(x-1)^2$ 整除，但不能被 $(x-1)^3$ 整除。

$$f(x)=(x-1)^2(x^2-7x+12)=(x-1)^2(x-3)(x-4)。$$

单阶和多阶零点。零点的重数不同会引起它附近的函数图形的形状也不同。在单阶零点（重数为1），曲线的斜率不为零（正的或者负的）。而在多阶零点曲线的斜率为零，因此曲线在该点的切线和 x 轴重合（见图5.2-17）。

重数为偶数和奇数的零点。曲线的形状也根据零点的重数是偶数还是奇数而变。设 α 为 $f(x)$ 的 k 阶零点，那末 $f(x)$ 可因式分解成 $f(x)=(x-\alpha)^kg(x)$。由 $g(x)$ 的连续性，它在 α 的一个邻域内不为0，因而在此邻域内函数不改变符号。于是，存在一 $\varepsilon>0$，使得对于每一个满足 $|x-\alpha|<\varepsilon$ 的 x 成立 $g(x)\neq0$。但当 x 从 $x<\alpha$ 变到 $x>\alpha$ 时，线性因式 $(x-\alpha)$ 改变了符号（见图）。因此当且仅当 k 为奇数时，多项式 $f(x)=(x-\alpha)^kg(x)$ 才在 x 通过零点时改变符号。而当 k 为偶数时，$f(x)$ 的符

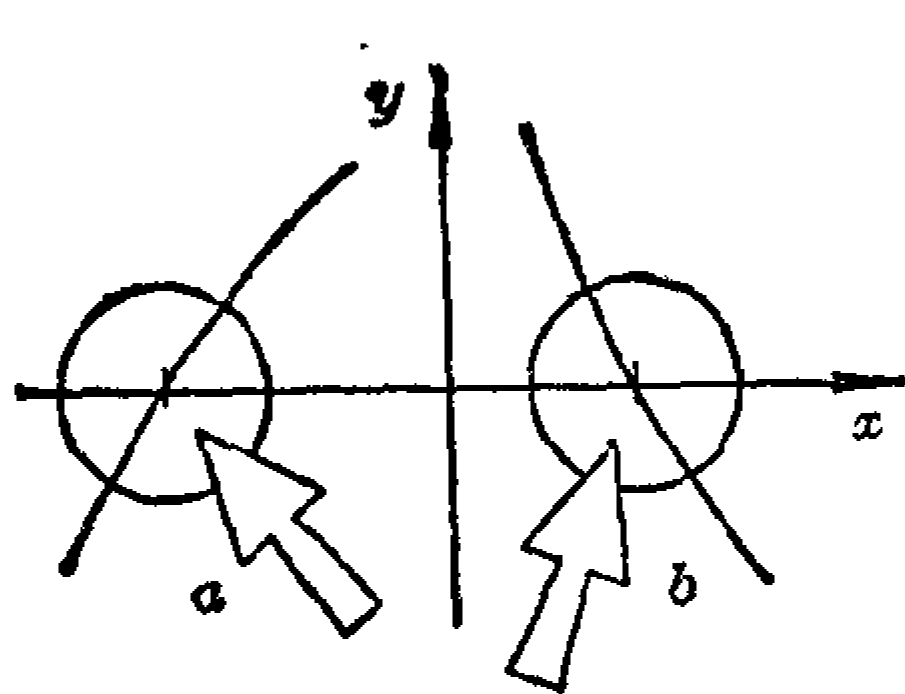


图5.2-17 单阶零点附近的函数曲线

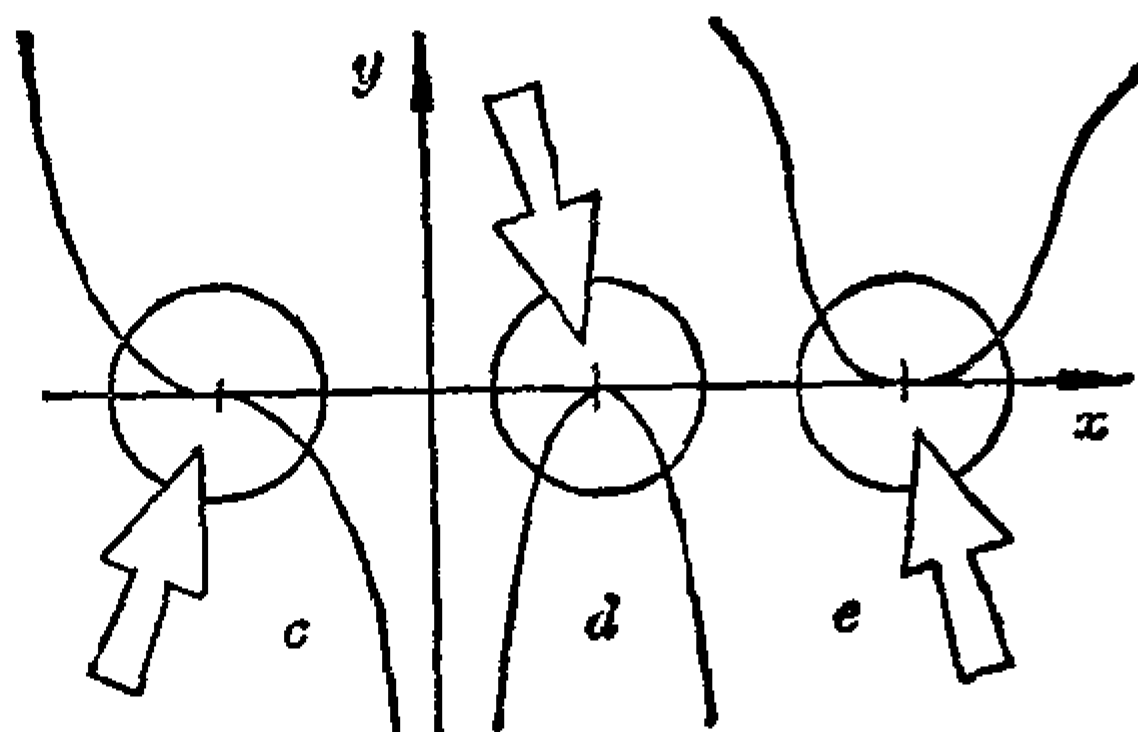


图5.2-18 在多阶零点附近的曲线 c 是重数为奇数时的情况；d、e 是重数为偶数时的情况

号保持不变(见图 5.2-18)。

零点和因式分解。每一个多项式函数都能表示成不可约因式的乘积形式:

$$f(x)=c(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+a_1x+b_1)^{s_1}$$
$$\cdot(x^2+a_2x+b_2)^{s_2}\cdots(x^2+a_lx+b_l)^{s_l}。$$

在这个表达式中 c 是次数为零的多项式，即是一不为零的常数。α_i, a_j 和 b_j 是实数，r_i 和 s_j 是自然数。指数 r_i 和 s_j 满足条件 $n=\sum_{i=1}^{k}r_i+2\sum_{j=1}^{l}s_j$。显而易见 α_i 是函数的零点，而且没有其他实的零点。当 x 不为 α_1、α_2、…、α_k 时，线性因式 $(x-\alpha_i)i=1,2,\cdots,k$ 不为零。如果当 $x=\alpha$ 时，二次多项式 $x^2+a_jx+b_j$ 中有一个等于零，那末该二次多项式就是可约的，这和假设矛盾。对于所有实的 x，不可约二次多项式在 x 都不为零，因为它的零点只有两个互为共轭的复数。根据这些论述可得到下面的定理:

偶数次多项式的实的零点的个数（按照它的重数进行计算）是偶数。而次数为奇数时，其个数为奇数。特别是奇次多项式至少有一实的零点。

斯图谟(Sturm)定理 如果已经知道零点附近的一个 x 值，那末用逼近法，例如牛顿逼近法可以将多项式的这个根近似地计算出来，且可达到任意的精度。笛卡尔、牛顿和傅里叶(Fourier)都已设法找到一种判别准则，用来判别一多项式在定义域中一给定的区间内是否有根。只要适当选择区间，就能在零点附近找到这样的 x 值。

笛卡尔符号法则。笛卡尔考虑了多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 系数的符号，这里假定 a_n 和 a_0 都不为零。如当其他项的系数为 0 时，则这些项的系数不包括在序列 a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 中。如果两个相

邻系数的符号不同，则称为发生了一次变号。

笛卡尔发现多项式的正零点个数等于它的系数序列的变号次数，或与它相差一个正的偶数。类似地，负零点数也可以从多项式 $f(-x)$ 的系数序列中发生的变号次数得出。

【例】 多项式 $f(x)=x^5-x^4+2x^3+x^2-3x+2$ 的正零点个数有4个、2个或者为0，因为在它的系数序列 $1, -1, 2, 1-3, 2$ 中发生了四次变号。如果写出 $f(-x)=-x^5-x^4-2x^3+x^2+3x+2$，从中可以看出 $f(x)$ 一定有一个且恰好有一个负零点，因为在 $f(-x)$ 的系数序列中只发生了一次变号。

关于零点的精确数目是由斯图谟定理给出的。它先将多项式分解成

$$f(x)=c(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}\cdot(x^2+a_1x+b_1)^{s_1}\cdot(x^2+a_2x+b_2)^{s_2}\cdots(x^2+a_lx+b_l)^{s_l}。$$

如果式中有多重不可约因式，则只要考察多项式

$$\varphi(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)\cdot(x^2+a_1x+b_1)\cdots(x^2+a_lx+b_l)$$

就可以了。在这式子中包含了每个因式，但每个因式只出现一次。于是 $\varphi(x)$ 和 $f(x)$ 的零点相同，但 $\varphi(x)$ 的零点仅是单阶的。

利用函数乘法的微分法则，求得的导数 $\varphi'(x)$ 是一和式。在和式的每一项中，只对不可约因式中的一个因式求微分。因此每一项少掉了一个因式。这和式不能被这些因式中的任何一个整除：$\varphi(x)$ 和 $\varphi'(x)$ 之间除了一个常数外没有公因式。如果用 $\varphi'(x)$ 除 $\varphi(x)$，可得到一多项式 $q_1(x)$ 和一余式 $-\varphi_2(x)$，$\varphi_2(x)$ 的次数比 $\varphi'(x)$ 低，且 $\varphi(x)=q_1(x)\varphi'(x)-\varphi_2(x)$。因此用 $\varphi_2(x)$ 除 $\varphi'(x)$，可得到另一个余式 $-\varphi_3(x)$，使 $\varphi'(x)=q_2(x)\varphi_2(x)-\varphi_3(x)$。这一过程经过有限次后就会结束。将符号简写，可得到下面的附表。从最后的方程式往前一步一步地推，一直推到第一个方程式，很明显 φ_r 是 φ_{r-1} 的因子，φ_{r-1} 是 φ_{r-2} 的因子，φ_{r-2} 是 φ_{r-3} 的因子等等，最后 φ' 是 φ 的因子。由于 φ 和 φ' 没有公因式，故 φ_r 只可能是不为零的常数。这些函数所组成的序列 $\varphi, \varphi', \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_r$ 称为斯图谟链。在斯图谟链的多项式中，用一特定的值 a 代入 x，可得一实数序列 $\varphi(a)$，$\varphi'(a)$，$\varphi_2(a), \cdots, \varphi_r(a)$。如果在这序列中，相邻两个数 $\varphi_i(a)$ 和 $\varphi_{i+1}(a)$ 的符号不同，则称为发生了一次变

$$\begin{aligned}
\varphi &= q_1\varphi'-\varphi_2\\
\varphi' &= q_2\varphi_2-\varphi_3\\
\varphi_2 &= q_3\varphi_3-\varphi_4\\
\varphi_3 &= q_4\varphi_4-\varphi_5\\
\varphi_4 &= q_5\varphi_5-\varphi_6\\
&\cdots\cdots\\
\varphi_{r-2} &= q_{r-1}\varphi_{r-1}-\varphi_r\\
\varphi_{r-1} &= q_r\varphi_r
\end{aligned}$$

号，用 $W(a)$ 表示斯图谟链中在 $x=a$ 时发生的变号次数。很明显，变号次数 $W(x)$ 只有当自变量 x 通过链 $\varphi, \varphi', \varphi_2, \cdots, \varphi_{r-1}$ 中某一个多项式的零点时才能发生变化，首先使 φ 后面的多项式 $\varphi', \varphi_2, \cdots, \varphi_{r-1}$ 中的某一个多项式在 $x=\xi$ 等于零。从上面的附表可以直接看出，与它相邻的两项不等于零，且符号相反，因此变号次数 $W(x)$ 在通过这一值时不会发生改变。要发生改变只有当 x 通过 φ 本身的一个零点时才可能。事实上在这种情况下，$W(x)$ 正好减少 1。由于 φ 只有单阶零点，因此在通过零点时中改变了符号。而 φ' 在这点的某个邻域内不为零，且由 φ' 的连续性知 φ 在此邻域内，符号不变。这就证明了下面的定理。

斯图谟定理。如果 $\varphi(x)$ 是只有单阶零点的多项式，又 $a>b$ 且 $\varphi(a)\neq 0$，$\varphi(b)\neq 0$，那末 $W(a)-W(b)$ 等于多项式 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内零点的个数。

为了用这一定理来决定多项式 $\varphi(x)$ 所有的零点的确切个数，对于 x_1 和 $x_2>x_1$ 我们选取数 $-M$ 和 $+M$，使它们的绝对值大于零点绝对值的最大值，即 $M>\max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \cdots, |\alpha_k|)$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是 $\varphi(x)$ 的零点。为此，要在不知道零点的情况下决定 M，而这是能做到的。因为对于所讨论的多项式 $\varphi(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，它的零点的绝对值有下面的估计式：

$$\max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \cdots, |\alpha_k|)<1+|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|。$$

每一个 $a_n\neq 1$ 的多项式可用 a_n 来除，使它规范化，这样做时，它的零点不会发生改变。因此可以选择 $M=1+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|$。于是可以确定 $\varphi(x)$ 所有的零点落在区间 $[-M, M]$ 内。这里如对此加以证明，将会离题太远，然而如果想到 $f(x)=x^2+ax+b$ 的两个零点 x_1 和 x_2（假定为实数）和系数 a, b 之间的关系，那末对这点是容易理解的。众所周知，$x_1+x_2=-a$ 及 $x_1x_2=b$。从这里可清楚地看到 $|x_1|$ 和 $|x_2|$ 不可能非常大而同时 $|a|$ 和 $|b|$ 却非常小，换句话说，零点的绝对值不可能超过与系数的绝对值有关的某个界限。

【例】 为了决定多项式 $\varphi(x)=x^5-2x^4-x+2$ 实的零点的个数，必须计算斯图谟链。为了简化计算，用一正数乘所给例子中的链多项式，显然这样做不会使变号次数发生变化。从斯图谟链以一零次多项式为结尾这一事实，可以看出 $\varphi(x)$ 只有单阶的零点，因此可以应用斯图谟定理。

对于所给的例子可列出下表：

斯图谟链	计算	式子	在区间两端的符号	
$\varphi(x)=x^5-2x^4-x+2$			$\varphi(-6)=-10\,360$	$\varphi(+6)=+5180$
$\varphi'(x)=5x^4-8x^3-1$	$5\varphi:\varphi'$	$\varphi=q_1\varphi'-\varphi_2$	$\varphi'(-6)=+8207$	$\varphi'(+6)=+4751$
$\varphi_2(x)=16x^3/5+4x-48/5$	$4\varphi':5\varphi_2/4$	$\varphi'=q_2\varphi_2-\varphi_3$	$\varphi_2(-6)=-724\,^4/_5$	$\varphi_2(+6)=+705\,^3/_5$
$\varphi_3(x)=25x^2-100x+100$	$5\varphi_2/4:\varphi_3/25$	$\varphi_2=q_3\varphi_3-\varphi_4$	$\varphi_3(-6)=+1600$	$\varphi_3(+6)=+400$
$\varphi_4(x)=-53x+76$	$53\varphi_3/25:\varphi_4$	$\varphi_3=q_4\varphi_4-\varphi_5$	$\varphi_4(-6)=+394$	$\varphi_4(+6)=-242$
$\varphi_5(x)=-16\,^{52}/_{53}$			$\varphi_5(-6)=-16\,^{52}/_{53}$	$\varphi_5(+6)=-16\,^{52}/_{53}$

对于多项式 $\varphi(x)=x^5-2x^4-x+2$，M 可取为 $1+|-2|+|-1|+|+2|=6$。于是多项式所有的零点在区间$[-6, 6]$内。在表中列出了 $\varphi(-6)$，$\varphi'(-6)$，$\varphi_2(-6)$，$\varphi_3(-6)$，$\varphi_4(-6)$，$\varphi_5(-6)$ 和 $\varphi(6)$，$\varphi'(6)$，$\varphi_2(6)$，$\varphi_3(6)$，$\varphi_4(6)$，$\varphi_5(6)$ 的值。计算一下变号的次数可得 $W(-6)=4$，$W(6)=1$。因此多项式只有 $4-1=3$ 个实的零点。

零点的分隔　所谓**零点的分隔**就是确定一些区间，使在每个区间内有且恰好只有一个零点。利用上面的例子可以看到，借助于斯图谟定理这样做是可能的。

用 $x=0$ 代入 $\varphi(x)=x^5-2x^4-x+2$ 的斯图谟链，由 $W(-6)-W(0)$ 得出在区间$[-6, 0]$中的零点个数。由于 $\varphi(0)=+2$，$\varphi'(0)=-1$，$\varphi_2(0)=-9^3/_5$，$\varphi_3(0)=+100$，$\varphi_4(0)=+76$，$\varphi_5(0)=-16\,^{52}/_{53}$，故有 $W(0)=3$。但 $W(-6)=4$，因此 $W(-6)-W(0)=1$。所以在区间 $[-6, 0]$ 中恰好有一个零点，另外两个零点一定在区间$[0, 6]$内。为了将它们分隔开，可以再将此区间分成两半。考察 $x=3$ 的斯图谟链，得到 $W(3)=1$。因为 $W(0)-W(3)=2$，故两个零点一定都在区间 $[0, 3]$ 之中，这样它们还是没有被分隔开。再将区间一分二，可得 $W(1.5)=2$。现在 $W(0)-W(1.5)=1$，$W(1.5)-W(3)=1$，因此在区间$[0, 1.5]$和$[1.5, 3]$中刚好各有一个零点。现在将三个零点都分隔开了。

斯图谟定理的推广　现在我们来考察斯图谟定理中关于在 $f(x)$ 的因式分解中没有**多重**因式这一假定。对于一给定的多项式一般不可能一眼就看出它是否满足这一条件。尽管如此，还是能采用斯图谟的方法。如果能用**欧几里得算法**决定 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最大公因式，那末有两种可能：

a) 如果 $f(x)$ 满足给定的条件，那末最大公因式是一个不等于零的常数，可以直接应用斯图谟定理。

b) 如果 $f(x)$ 不满足条件，那末 $f(x)$ 具有 $(x-a_i)^{r_i}$ 或 $(x^2+a_jx+b_j)^{s_j}$

($r_i>1$ 或 $s_j>1$) 形式的因式。从函数乘法的微分法则可以看出，$(x-\alpha_i)^{r_i-1}$ 或 $(x^2+a_jx+b_j)^{s_j-1}$ 是 $f'(x)$ 的一个因式。故这些因式的乘积可能还乘一常数 $c(c\neq0,\ c\neq1)$作为$f(x)$ 和 $f'(x)$的最大公因式。当 $f(x)$ 除以这最大公因式时，其商满足斯图谟定理的假定，因此可对它使用斯图谟定理。至于 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最大公因式的零点则不必进一步去研究，因为它的零点只可能是商多项式的零点。

多项式函数在无穷远处的性态

除了零点外，多项式函数其他一些特殊的性质也很有兴趣。主要有极值、拐点、在零点和拐点处的斜率等。对这些性质的探讨要用到微积分，因此在这里不作进一步的论述。然而，这些探讨的共同点是只在定义域中的一个有界区间中讨论。现在提出了这样一个问题：在这样一个区间外面，多项式函数的图形是什么样子的？如果$|x|$大于函数所有零点、极值点、拐点等绝对值中的最大值，函数会取何种值？对这些问题的回答通常就被称为是函数在**无穷远处的性态**。将表达式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的 a_nx^n 项提出得：

$$f(x)=a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\frac{a_{n-2}}{a_nx^2}+\cdots+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)。$$

从这表达式中可以看出当 $|x|$ 无限增加时，$|f(x)|$ 也无限地增加。因这时括号内的表达式趋向于 1，而 $|a_nx^n|$ 可以变得任意的大。这一特性常用符号 $\lim\limits_{|x|\to\infty}|f(x)|=\infty$ 表示。当 $|x|\to\infty$ 时，函数 $f(x)$的符号只取决于 a_nx^n。因为括号内的表达式从某一值 x_p 开始，对于所有的 $|x|>x_p$，肯定是正的。$f(x)$ 的符号只有在表内列出的几种可能性。

a_n	n	$x\to$	$f(x)\to$
>0	偶	$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$+\infty$
	奇	$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$-\infty$
<0	偶	$+\infty$	$-\infty$
		$-\infty$	$-\infty$
	奇	$+\infty$	$-\infty$
		$-\infty$	$+\infty$

【例1】 函数 $y=x^4-x^3-x^2-x-2$ 的实数零点为 $x=-1$ 和 $x=2$。在 $x\approx1.3$ 处函数有极小值，拐点在 $x\approx0.73$ 和 $x\approx-0.23$ 处。函数在无穷远处的性态为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$。求出函数的一些值可得到下面的数值表：

x	-2	-1.6	-1.3	-1	-0.7	-0.23	0	0.3
y	20	7.6	2.6	0	-1.2	-1.8	-2	-2.4
x	0.73	1	1.3	1.6	2	2.3	3	
y	-3.4	-4	-4.3	-3.7	0	6.2	40	

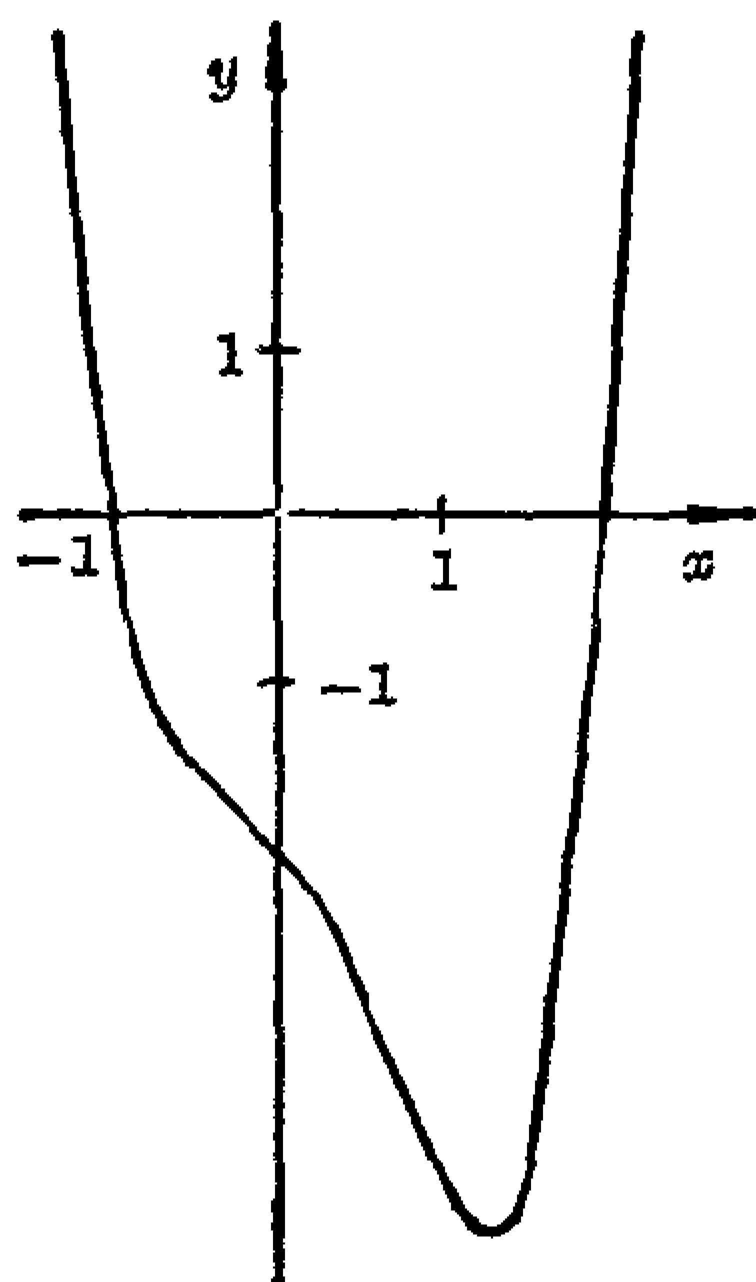


图 5.2-19　函数 $y=x^4-x^3-x^2-x-2$ 的图形

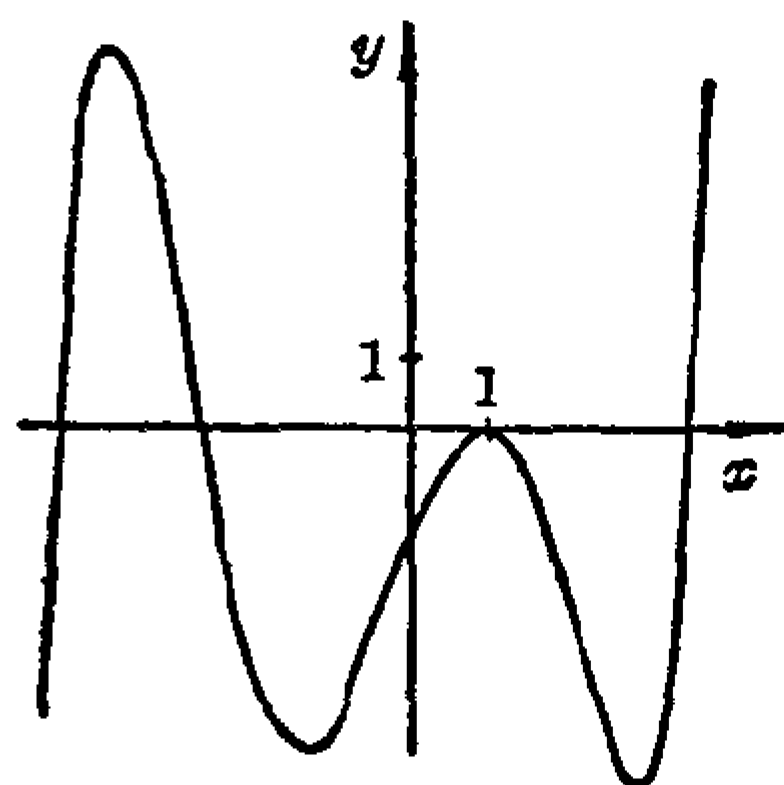


图 5.2-20　函数 $y=0.025x^5+0.05x^4-0.6x^3-0.55x^2+2.575x-1.5$ 的图形

现在函数就能用图形来表示了(见图 5.2-19)。

【例2】 函数 $y=0.025x^5+0.05x^4-0.6x^3-0.55x^2+2.575x-1.5$ 具有单阶零点 $x=-5$, $x=-3$ 和 $x=4$ 以及一个二阶零点 $x=1$。局部极小值在 $x=-1.53$ 和 $x=3.16$ 处出现，局限极大值在 $x=-4.24$ 和 $x=1$ 处出现。拐点在 $x=-3.22$, $x=-0.3$ 和 $x=2.32$ 处(这些数字是近似值)。函数在无穷远处的性态为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$。可用下面的数值表来画出函数的图形(见图 5.2-20)。

x	-5.3	-5	-4.7	-4.23	-3.8	-3.22	-3	-2.3	-1.53	-1	-0.3
y	-6.4	0	3.6	5.3	4.3	1.25	0	-3.25	-4.5	-4	-2.3
x	0	0.5	1	1.5	2	2.32	3	3.16	3.7	4	4.3
y	-1.5	-0.42	0	-0.45	-1.7[illegible]	-2.9	-4.8	-5	-3.2	0	5.6

负指数的幂函数

最简单的有理函数（不是多项式）是指那些对应规则能用 $y=1/x^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 表示的函数。称这些函数为**负指数幂函数**，这是因为可将 $1/x^n$ 改写成 x^{-n}。我们首先来研究这些函数。

函数 $y=1/x$ 很明显这是一个奇函数，因此它的图形关于原点成中心对称(见图5.2-21)。

$y=1/x$ 的数值表为：

x	-4	-3	-2	-1	$-1/2$	$-1/100$	$-1/1000$	$1/50$	1
y	$-1/4$	$-1/3$	$-1/2$	-1	-2	-100	1000	50	1

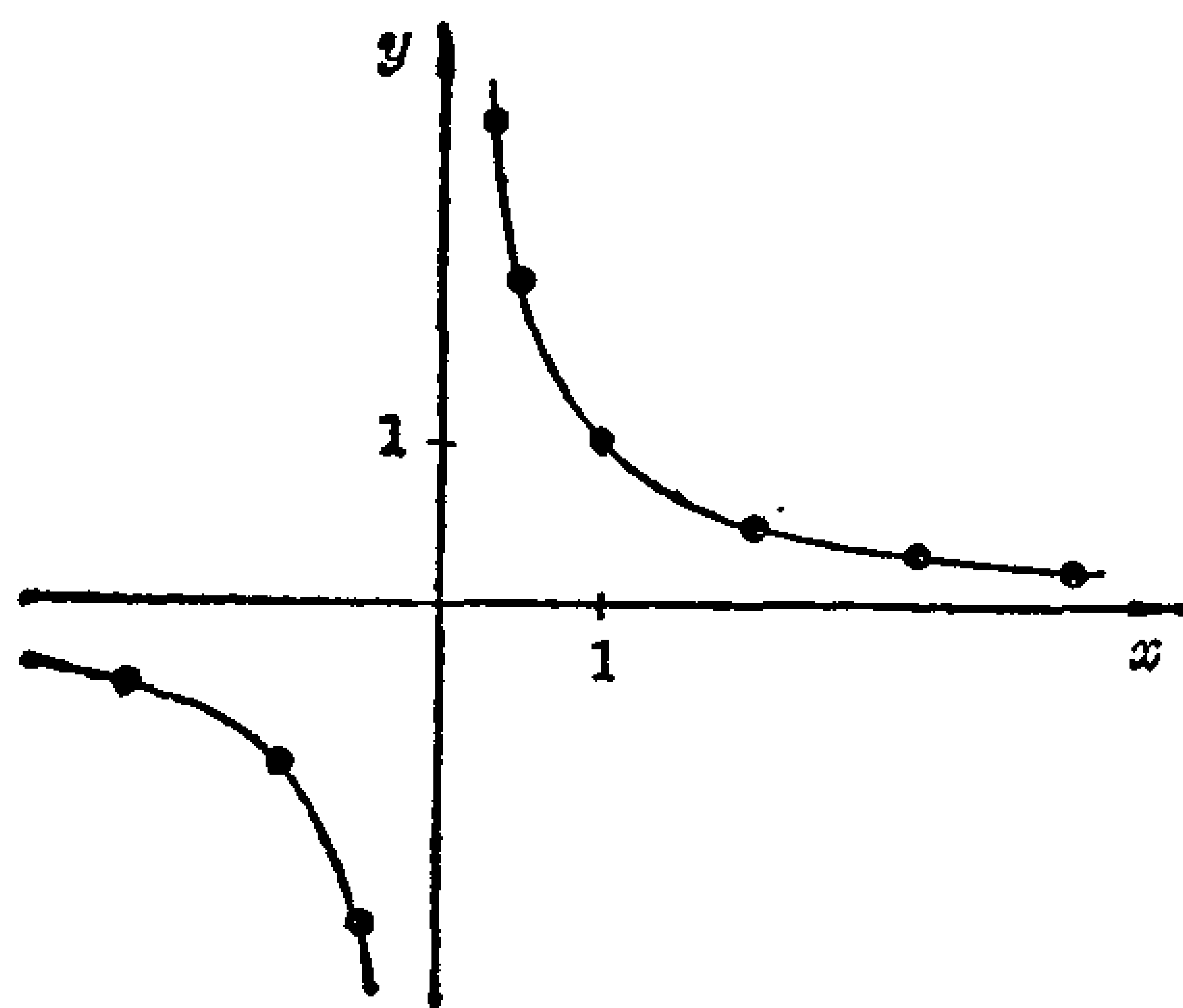


图5.2-21　函数 $y=1/x$ 的图形

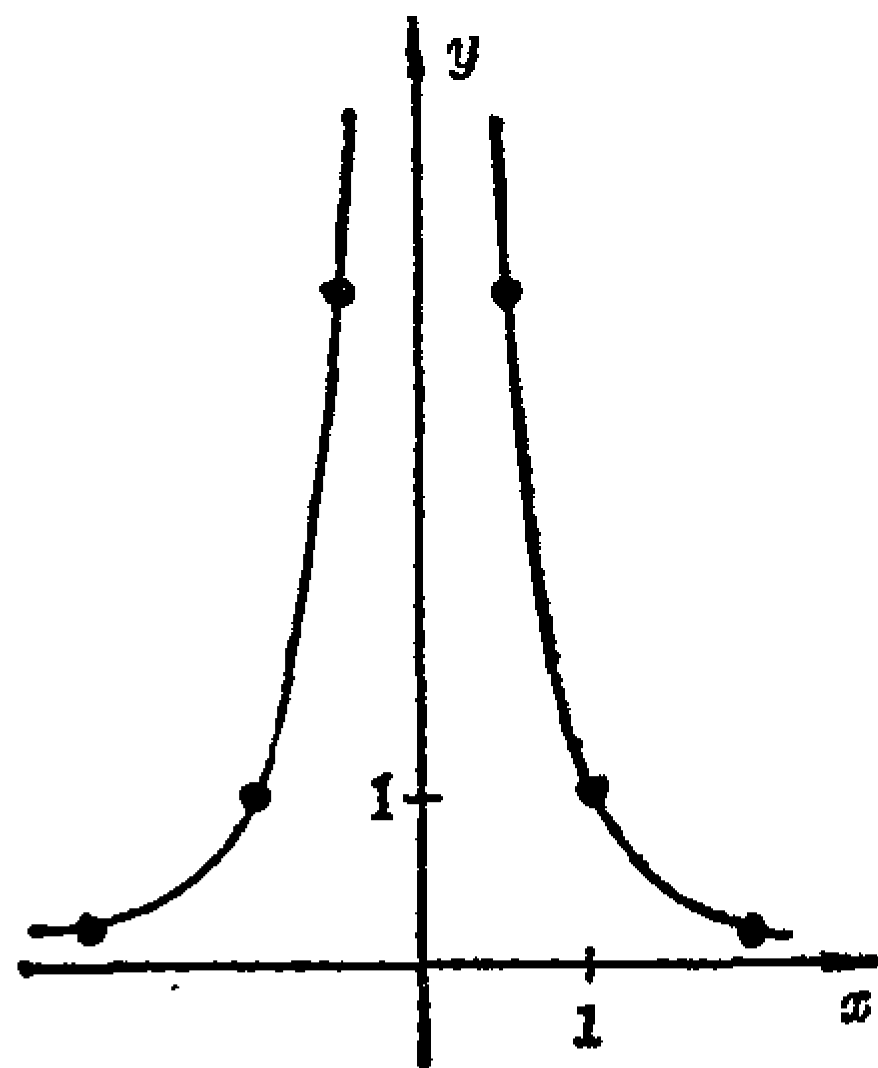


图5.2-22　函数 $y=1/x^2$ 的图形

当 $|x|>1$ 时，$|x|$ 越大，曲线的纵坐标越接近零值。而在区域 $-1<x<+1$ 中，当 $|x|$ 越来越小时，纵坐标无限增大。曲线趋近于正 x 轴和负 x 轴，也趋近于正、负 y 轴，但不与它们相交。x 和 y 轴是曲线的渐近线。在

$x=0$ 处函数没有值，即函数 $y=1/x$ 在 $x=0$ 处无定义。曲线由两条分支组成，它是一**直角双曲线**。

函数 $y=1/x^{2m+1}$　这些曲线的形状和双曲线 $y=1/x$ 的形状类似，同样也是奇函数。在 $x=0$ 处曲线没有定义。曲线有两个分支，一支在第一象限，另一支在第三象限。所有的曲线都通过点 $P(1,1)$ 和 $R(-1,-1)$。在区域 $-1<x<0$ 和 $0<x<+1$，m 越大，它们的值减小得越快。对于 $|x|>1$，m 越大，它们趋近 x 轴就越快。x 轴和 y 轴也是它们的渐近线。

函数 $y=1/x^2$　它是一偶函数。它的图形关于 y 轴对称（见图5.2-22）。在 $x=0$ 处它没有定义，因此它有两个分支。正、负 x 轴和正 y 轴是渐近线。

函数 $y=1/x^{2m}$　这些曲线和 $y=1/x^2$ 的曲线相似。至于曲线变化的情况，那些关于函数 $y=1/x^{2m+1}$ 的曲线分支的论述同样对它们适用。点 $P(1,1)$ 和 $Q(-1,1)$ 是所有曲线的公共点。

幂函数和比例　从 $y=kx^n$ 可得出：对于所有的对应值比例

$$y_1/x_1^n=y_2/x_2^n=\cdots=y/x^n=k=\text{常数},$$

我们说 x 的 n 次幂正比于 y。

在 $y=k/x$ 中，y 越小，x 就越大，反之亦然。这个关系称为**反比例关系**，并可由对应值的乘积是一常数 $xy=k$ 这种性质来明确表示。这两种情况 k 都称为**比例常数**。

在自由落体中，下降的距离 s 正比于时间 t 的平方，两个物体之间的吸引力 F 与它们之间的距离 r 平方成反比，因而所对应的定律一定具有 $s=kt^2$ 和 $F=m/r^2$ 的形式。这时如果知道一对值 (s, t) 或 (r, F)，则比例常数可以计算出来。

有理函数的一般形式

和多项式函数一样，有理函数也有一种表示式作为**正规形式**。

每个有理函数 $f(x)$ 的对应规则能表示成两个没有公因式的多项式的商，即 $x\to f(x)=p(x)/q(x)$。

如果分母多项式的次数为 0，那末它是一个常数，这是多项式函动的特殊情况。以下假定 $q(x)$ 的次数至少为 1，因此所讨论的有理函数就不会是多项式。

有理函数的零点和极点

零点 一有理函数只能在那些使正规形式 $p(x)/q(x)$ 的分子取零值而 $q(x)$ 不为零的 x 上才能取到零值。因此，当 $p(\alpha)=0$ 及 $q(\alpha)\neq 0$ 时，数 α 就是零点。对于一任意给定的有理函数 $f(x)=g(x)/h(x)$（这里 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是多项式），也可能发生对于同一个数 α，$g(\alpha)$ 和 $h(\alpha)$ 都为零的情况。此时 α 不属于定义域，因为 $f(x)$ 无意义。发生这种情况是由于 $f(x)$ 没有用正规形式来表示：$g(x)$ 和 $h(x)$ 有一公因式。$g(x)$ 可以表示成 $g(x)=(x-\alpha)^k g_1(x)$，同样 $h(x)$ 可表示成 $h(x)=(x-\alpha)^l h_1(x)$，其中 $k, l\geqslant 1$。这样 $g(x)$ 和 $h(x)$ 有公因式 $(x-\alpha)^m$，对于所有 $x\neq\alpha$，可以在 $g(x)/h(x)$ 中消去这个公因式，这里 m 是 k 和 l 两个值中较小的一个。于是有三种可能性：1. 当 $k>l$ 时，$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$，因此 $f(x)$ 在 α 附近的情形和消去 $(x-\alpha)^m$ 以后所得的函数在零点 α 附近的情形相同。2. 当 $k=l$ 时，$\lim\limits_{x\to\alpha} f(\alpha)=c\neq 0$。3. 当 $k<l$ 时，$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\infty$，因此 $f(x)$ 在 α 附近的情形和消去 $(x-\alpha)^m$ 以后所得的函数在极点 α 附近的情形相同（参见下面的一段）。如果 $f(x)=p(x)/q(x)$ 已经是正规形式，那末，有理函数的零点问题归结为已经解决了的多项式 $p(x)$ 的零点问题。

极点 如果 $q(\alpha)=0$，$p(\alpha)\neq 0$，称函数 $f(x)=p(x)/q(x)$ 在 $x=\alpha$ 处有一极点。如果线性因式 $(x-\alpha)$ 在 $q(x)$ 的因式分解式中出现 k 次，即 $q(x)=(x-\alpha)^k q_1(x)$，那末称这极点为 k 阶极点。在这极点附近，函数 $f(x)$ 可以表示成 $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{1}{(x-\alpha)^k}\cdot\dfrac{p(x)}{q_1(x)}$ 的形式。如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 没有公因式，那末 $p(x)$ 和 $q_1(x)$ 在 $x=\alpha$ 的一个邻域中两者都没有零点，因而它们不会改变符号。在此邻域中它们的商恒取正值或负值（不为零）且有界，但是函数 $1/(x-\alpha)^k$ 在 $x\to\alpha$ 时无限增加。如果 x 的值以增大的方式接近极点 $(x<\alpha)$，那末 $(x-\alpha)$ 是负的，并且当 k 为奇数时，$1/(x-\alpha)^k$ 趋向于 $-\infty$；当 k 为偶数时，$1/(x-\alpha)^k$ 趋向于 $+\infty$。如果 x 的值以减小的方式接近极点 $(x>\alpha)$，那末 $(x-\alpha)$ 是正的，因此，$1/(x-\alpha)^k$ 总是趋向于 $+\infty$。函数 $1/(x-\alpha)^k$ 在 α 附近的这种性态只是在因子 $p(x)/q_1(x)$ 为负值时，才会和函数 $f(x)$ 的性态不同，这时函数 $f(x)$ 的符号要和 $1/(x-\alpha)^k$ 的符号相反。直线 $x=\alpha$ 是函数的渐近线。

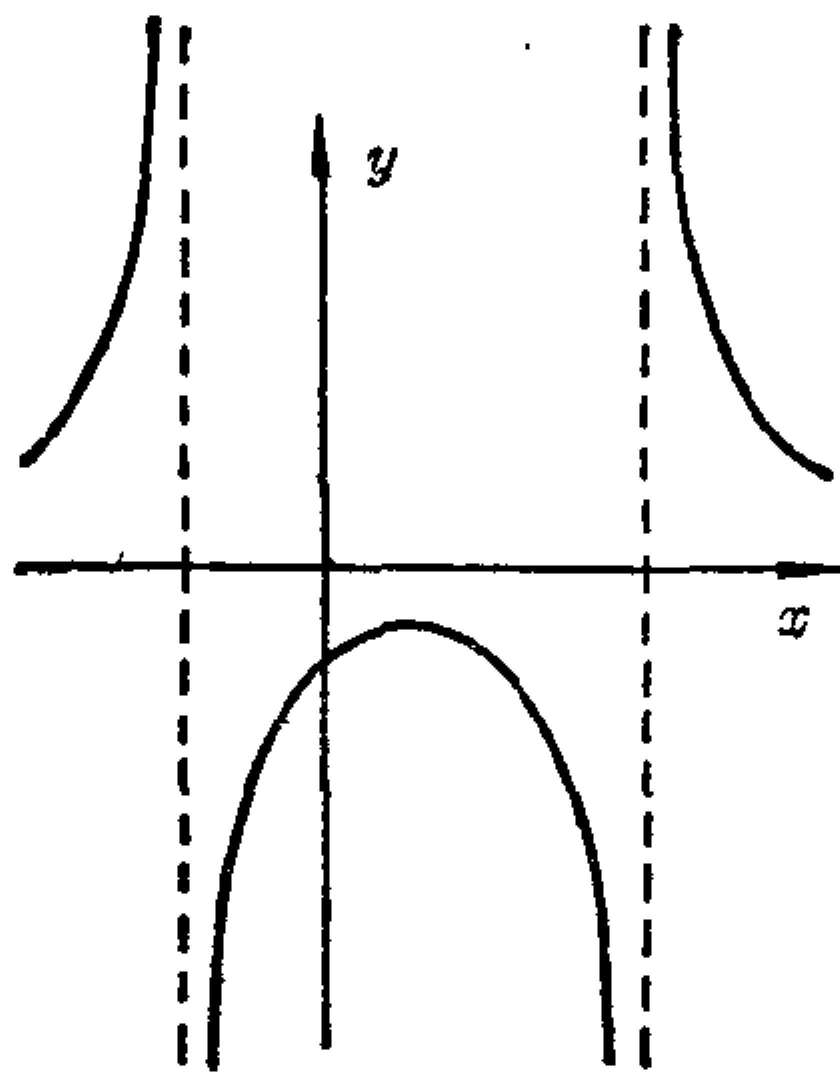


图5.2-23 极点的阶数为奇数的函数图形

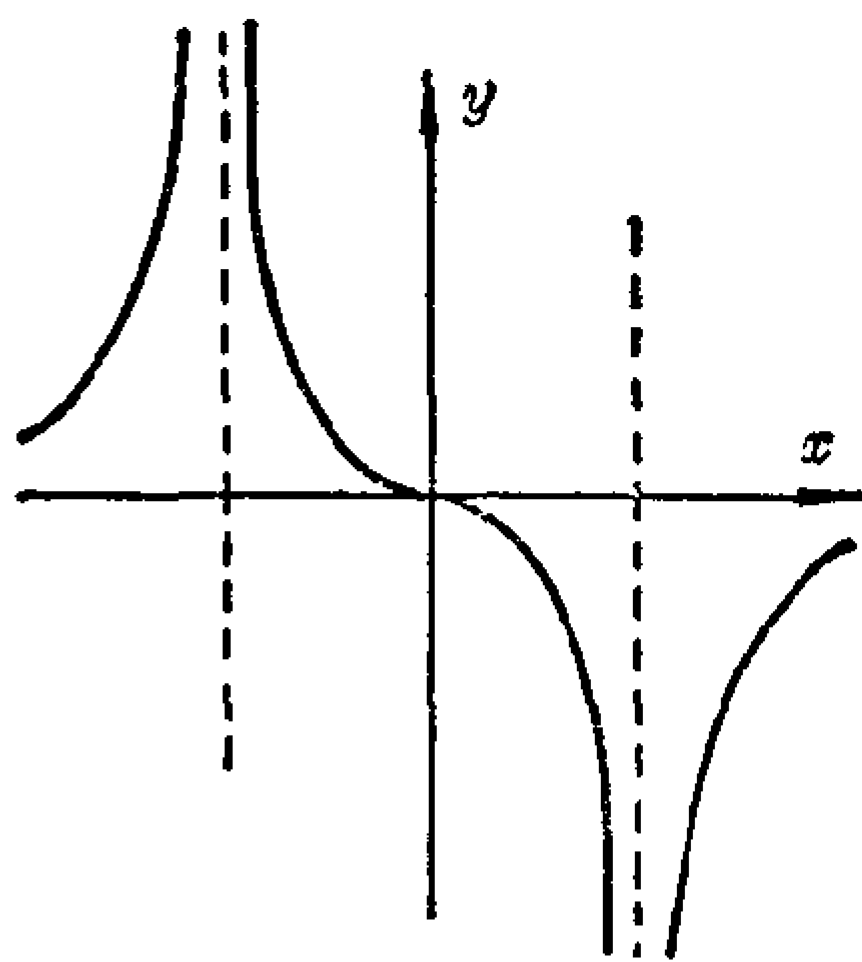


图5.2-24 极点的阶数为偶数的函数图形

有理函数在无穷远处的性态

先讨论一般形式

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1 x+b_0}。$$

考虑三种可能性,即 $m<n$, $m=n$, $m>n$。如果分子多项式 $p(x)$ 的次数比分母多项式 $q(x)$ 的次数大或相等($m\geqslant n$),称函数 $f(x)$ 为**假有理函数**。用分母除分子可分离出一个次数为 $(m-n)$ 的多项式 $g(x)$:

$$f(x)=p(x)/q(x)=g(x)+r(x)。$$

在 $m=n$ 的情况下, $g(x)$ 是常数 a_m/b_n。余项 $r(x)$ 总是一**真有理函数**,即分子的次数比分母的小。由于多项式函数在无穷远处的性态已经知道,剩下的只要研究真有理函数就行了。用 $x^m(m<n)$ 除分子和分母,可得:

$$f(x)=\frac{a_m+a_{m-1}/x+\cdots+a_1/x^{m-1}+a_0/x^m}{b_n x^{n-m}+\cdots+b_1/x^{m-1}+b_0/x^m}。$$

当 $|x|\to\infty$ 时,分子趋向于 a_m,而同时分母的绝对值可以任意大。这样,当 $|x|\to\infty$ 时,$|f(x)|\to 0$,因而 x 轴是函数 $f(x)$ 的渐近线。根据 a_m, b_m 的符号以及次数 $n-m$ 的奇偶性,函数的图形从 x 轴上面或下面(函数取正值或负值)逐渐趋近于 x 轴。例如,如果 $a_m>0$, $b_n>0$ 及 $n-m$ 是奇数。于是当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 为正值;当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)$ 为负值。将

多项式函数 $g(x)$ 从假有理函数 $f(x)$ 中分离出来后，所得的余项 $r(x)$ 也有相应的结论。当 $|x|\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 逐渐趋近于函数 $g(x)$，如果 $r(x)$ 的值很小，且是正的，则 $f(x)$ 从上面趋向 $g(x)$。如果 $r(x)$ 以负值趋向于零，则 $f(x)$ 从下面趋向 $g(x)$。函数 $g(x)$ 的图形为**极限曲线**。特别是如果 $m=n$，$g(x)=a_m/b_n$，那末和 x 轴相距 a_m/b_n 的平行线是函数 $f(x)$ 在 $|x|\to\infty$ 时的渐近线。

【例1】 函数 $y=\frac{3x-6}{x^3-3x+2}$ 具有一个零点 $x=2$。$x=-2$ 处有一单阶极点，在 $x=1$ 处有一二阶极点。在 $x\approx-0.74$ 和 $x\approx2.74$ 处有两个局部极值，且都是极大值。函数在无穷远处的性态是 $\lim\limits_{|x|\to\infty} y=0$。因此 x 轴是函数曲线当 $|x|\to\infty$ 时的渐近线。为了考虑在整个定义域内函数值的符号，将函数的方程改写为更有用的形式：$y=\frac{3(x-2)}{(x-1)^2(x+2)}$，容易看出，对于 $-\infty<x<-2$，y 是正的；对于 $-2<x<1$ 和 $1<x<2$，y 是负的；对于 $x>2$，y 又是正的(见图 5.2-25)。为了更精确地画出函数图形，需列出下面的数值表：

x	-5	-4	-3	-2.5	-2.2	-1.8	-1.5	-1	-0.74
y	0.2	0.36	0.94	2.20	6.15	-7.27	-3.36	-2.25	-2.14
x	-0.3	0	0.5	1.3	1.5	1.8	2	2.74	3
y	-2.4	-3	-7.2	-7.1	-1.72	-0.25	0	0.16	0.15

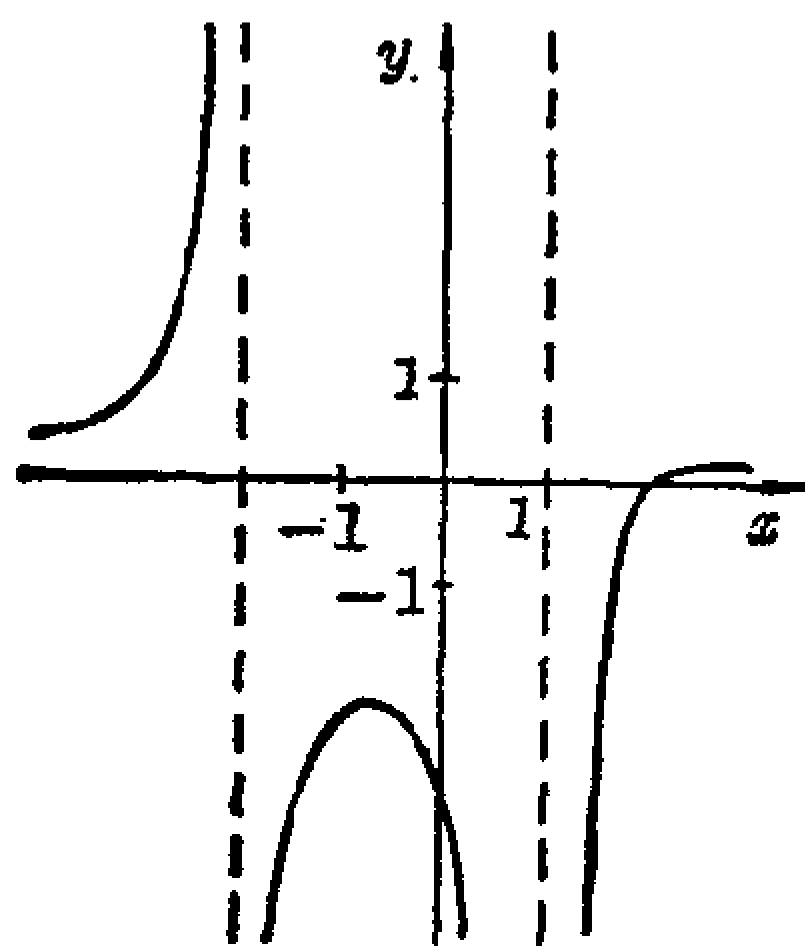


图 5.2-25 函数 $y=\frac{3x-6}{(x-1)^2(x+2)}$ 的图形

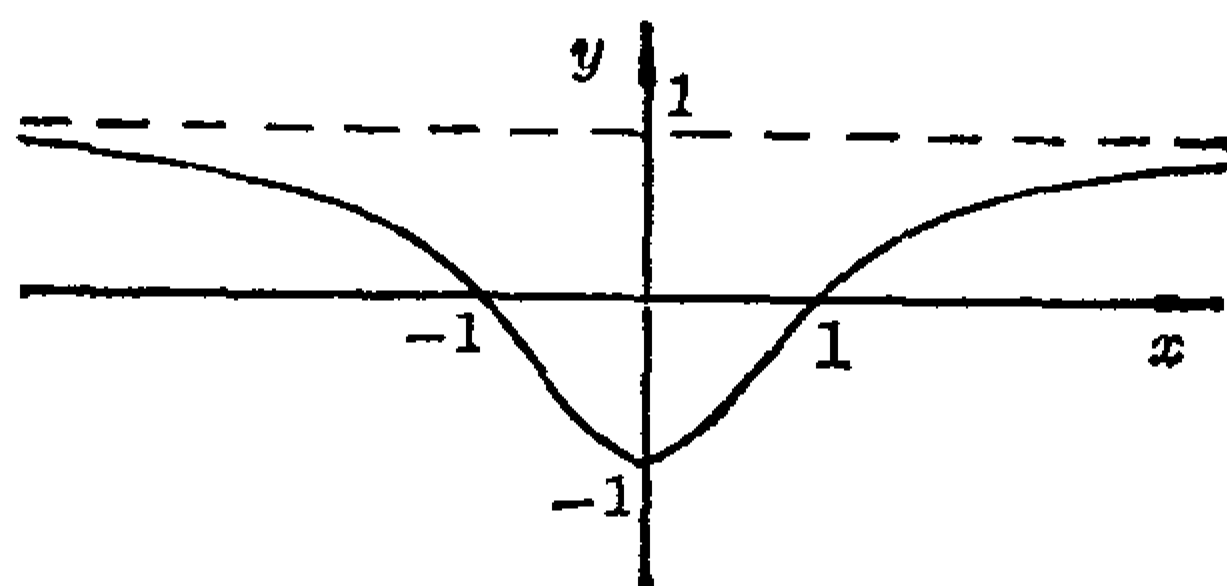


图 5.2-26 函数 $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 的图形

【例2】 函数 $y=(x^2-1)/(x^2+1)$ 有两个零点 $x=-1$ 和 $x=1$，它没有极点，在 $x=0$ 处有一极值（极小值），在 $x\approx-0.57$ 和 $x\approx0.57$ 处有两个拐点。分子和分母相除后得 $y=1-2/(x^2+1)$。直线 $y=1$ 是函数曲线的渐近线，这是因为 $\lim\limits_{|x|\to\infty} y=1$。另外又容易看出，函数的图形全部位于渐近线的下面(见图 5.2-26)。数值表:

x	0	±0.3	±0.5	±1	±1.5	±2	±3	±5
y	−1	−0.84	−0.6	0	0.38	0.6	0.8	0.92

【例3】 函数 $y=(x^2-x-2)/(2x-6)$ 有两个零点 $x=-1$ 和 $x=2$，在 $x=3$ 处有一极点，局部极值在 $x=1$ 处(极大值)和 $x=5$ 处(极小值)。将多项式部分分离出来，得表达式 $y=x/2+1+4/(2x-6)$，于是 $y=x/2-1$ 是函数曲线的渐近线。当 $x\to-\infty$ 时，曲线从下面趋近渐近线。当 $x\to+\infty$ 时，曲线从上面趋近渐进线(见图 5.2-27)。

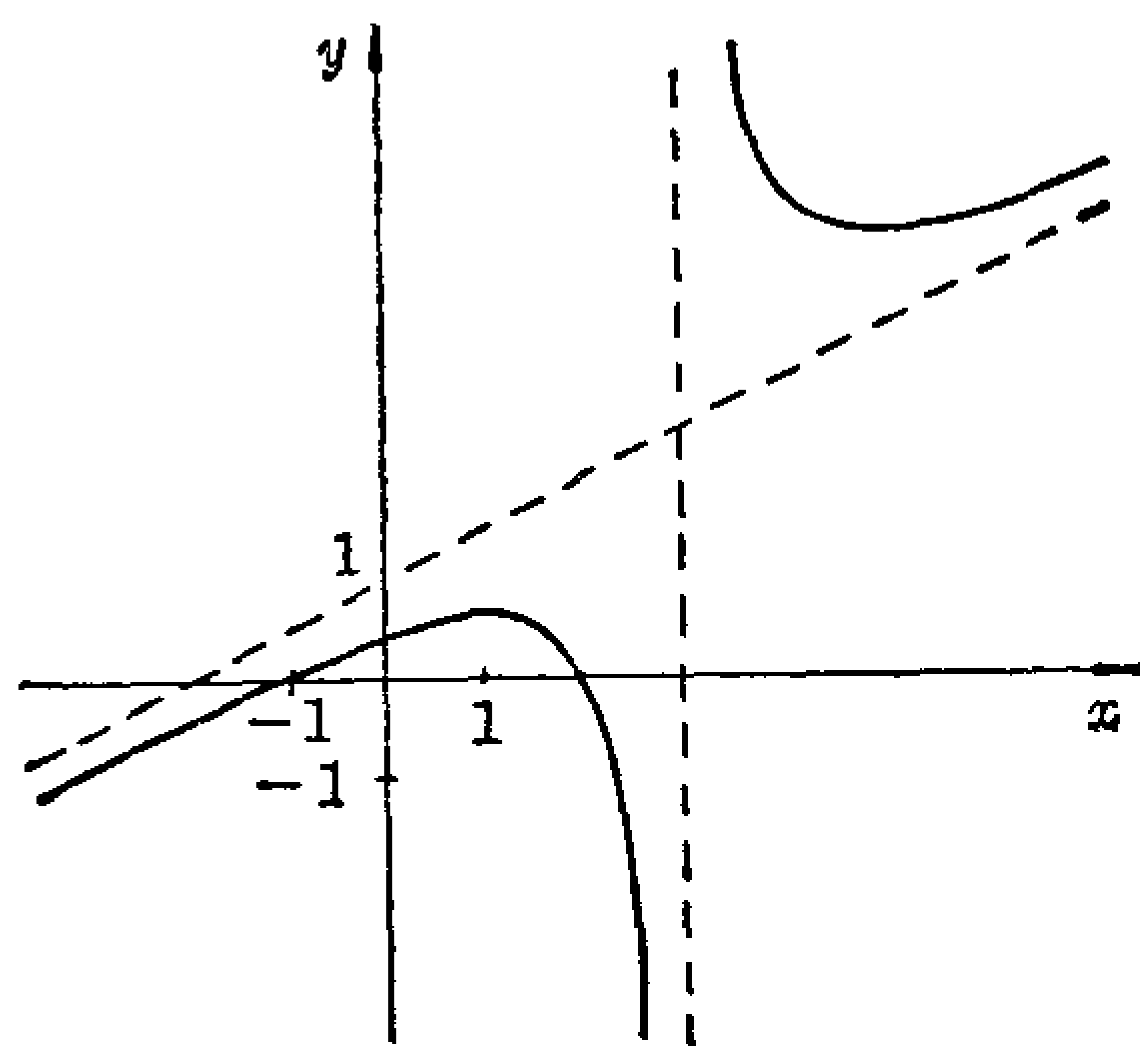


图 5.2-27　函数 $y=\dfrac{x^2-x-2}{2x-6}$ 的图形

数值表:

x	−5	−3	−2	−1	0	1	1.5	2
y	−1.75	−0.83	−0.4	0	0.33	0.5	0.42	0
x	2.5	2.8	3.5	4	5	6	7	
y	−1.75	−7.6	6.75	5	4.5	4.67	5	

【例 4】 对于

$$y=f(x)=(x^3+2)/2x,$$
$$y=x^2/2$$

是它的极限曲线。因为

$$(x^3+2)/2x=x^2/2+1/x,$$
$$\lim_{|x|\to\infty}[(x^3+1)/2x-x^2/2]=\lim_{|x|\to\infty}(1/x)=0。$$

分解成部分分式

为了对有理函数 $f(x)$ 积分，首先必须将它表示成部分分式的和。假定在正规形式 $f(x)=p(x)/q(x)$ 中，分子 $p(x)$ 和分母 $q(x)$ 没有公因式，如果分子 $p(x)$ 的次数大于或等于分母的次数，那末两者相除后可将一多项式函数 $g(x)$ 分离出来，$f(x)=g(x)+p_1(x)/q(x)$。除了一常数因子外（此常数因子可并入分子中），就分母本身来讲，它能表示成线性因式的乘积：

$$q(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x-\beta_1)^{s_1}(x-\bar{\beta}_1)^{s_1}\cdots(x-\beta_l)^{s_l}(x-\bar{\beta}_l)^{s_l},$$

这里有 k 个阶数为 r_i 的实零点 α_i，以及 l 对阶数为 s_j 的共轭复数零点 β_i 和 $\bar{\beta}_i$。两个共轭复数线性因式的乘积是一个二次实系数多项式：

$$(x-\beta)(x-\bar{\beta})=x^2-(\beta+\bar{\beta})x+\beta\bar{\beta}$$
$$=x^2+ax+b。$$

这里用 a 代替了 $-(\beta+\bar{\beta})$，b 代替了 $\beta\bar{\beta}$。于是 $q(x)$ 能表示成下面的在实数域内不可约的多项式乘积：

$$q(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+a_1x+b_1)^{s_1}\cdots(x^2+a_lx+b_l)^{s_l}。$$

如果一个真分式的分母是线性因式的幂或不可约的二次多项式的幂，那末这种真分式称为部分分式。在前一种情况下分子是一常数 A，在后一种情况下分子是线性多项式 $B+Cx$。真有理函数 $p_1(x)/q(x)$ 能表示成下面的形式：

部分分式分解	$\frac{p_1(x)}{q(x)}=\frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\frac{A_{21}}{x-\alpha_2}+\frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2}+\cdots+\frac{A_{2r_2}}{(x-\alpha_2)^{r_2}}+\cdots\cdots+\frac{A_{k1}}{x-\alpha_k}+\frac{A_{k2}}{(x-\alpha_k)^2}+\cdots+\frac{A_{kr_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}+\frac{B_{11}+C_{11}x}{x^2+a_1x+b_1}+\frac{B_{12}+C_{12}x}{(x^2+a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{B_{1s_1}+C_{1s_1}x}{(x^2+a_1x+b_1)^{s_1}}+\frac{B_{21}+C_{21}x}{x^2+a_2x+b_2^2}+\frac{B_{22}+C_{22}x}{(x^2+a_2x+b_2)^2}+\cdots+\frac{B_{2s_2}+C_{2s_2}x}{(x^2+a_2x+b_2)^{s_2}}+\cdots\cdots+\frac{B_{l1}+C_{l1}x}{x^2+a_lx+b_l}+\frac{B_{l2}+C_{l2}x}{(x^2+a_lx+b_l)^2}+\cdots+\frac{B_{ls_l}+C_{ls_l}x}{(x^2+a_lx+b_l)^{s_l}}$

这里 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} 是实的常数。从下面可以看出，在分母是线性因式的幂时这样分解是存在的。设 α 是分母 $q(x)$ 的 r 阶零点，因此 $q(x)=(x-\alpha)^r q_1(x)$，这里 α 不是 $q_1(x)$ 的零点。如果部分分式 $A/(x-\alpha)^r$ 从所给定的真有理函数 $p_1(x)/q(x)$ 中分解出来，可得：

$$\frac{p_1(x)}{(x-\alpha)^r q_1(x)}-\frac{A}{(x-\alpha)^r}=\frac{p_1(x)-Aq_1(x)}{(x-\alpha)^r q_1(x)}=\frac{\Phi(x)}{(x-\alpha)^r q_1(x)}。$$

因为当 $x=\alpha$ 时，$p_1(x)$ 和 $q_1(x)$ 都不为零。待定常数 A 可以取数 $p_1(\alpha)/q_1(\alpha)$，这样就保证了函数 $\Phi(x)=p_1(x)-Aq_1(x)$ 在 $x=\alpha$ 处有一零点，于是有 $\Phi=(x-\alpha)\varphi(x)$。将 $(x-\alpha)$ 消去后可得

$$\frac{p_1(x)}{(x-\alpha)^r q_1(x)}-\frac{A}{(x-\alpha)^r}=\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^{r-1}q_1(x)}。$$

这个函数又是一个**真有理函数**，因为 $\varphi(x)$ 的次数比 $\Phi(x)$ 的次数小 1，而 $\Phi(x)$ 的次数至多等于 $p_1(x)$ 或 $q_1(x)$ 的次数，故无论如何它总是小

于 $q(x)=(x-\alpha)^r q_1(x)$ 的次数。用同样的方法，部分分式 $A_1/(x-\alpha)^{r-1}$ 又能从函数 $\dfrac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^{r-1}q_1(x)}$ 中分解出来。对于分母 $q(x)$ 的其他零点也有类似的结果。

如果可以允许暂时用一下复数，那末对于分母 $q(x)$ 的零点 β 和 $\bar{\beta}$ 也可进行同样的讨论。但须记住，用 $\bar{\beta}$(β 的共轭复数）代入实系数函数 $p_1(x)$ 和 $q_1(x)$ 中随便哪一个，仍然有 $p_1(\bar{\beta})=\bar{p}_1(\beta)$ 及 $q_1(\bar{\beta})=\bar{q}_1(\beta)$，故有 $A_1=p_1(\bar{\beta})/q_1(\bar{\beta})=\bar{p}_1(\beta)/\bar{q}_1(\beta)=\bar{A}_1$。因而对于每个部分分式 $A/(x-\beta)^r$，也会有部分分式 $\bar{A}/(x-\bar{\beta})^r$。所以在它们的和

$$\frac{A(x-\bar{\beta})^r+\bar{A}(x-\beta)^r}{[x^2-(\beta+\bar{\beta})x+\beta\bar{\beta}]^r}。$$

中，每个复数用它的共轭复数取代，其值不变，这就意味着它们的和一定是实的，并且具有 $h(x)/(x^2+ax+b)^r$ 的形式。这里 $h(x)$ 的次数最多为 r。如果它的次数大于 1，那末 $h(x)$ 能用 (x^2+ax+b) 除尽得

$$h(x)=h_1(x)(x^2+ax+b)+Bx+C$$

或
$$\frac{h(x)}{(x^2+ax+b)^r}=\frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^r}+\frac{h_1(x)}{(x^2+ax+b)^{r-1}}。$$

如果 $h_1(x)$ 的次数仍大于 1，那末可将它再用 (x^2+ax+b) 除。这一种分解是唯一的，这一点可从先用 $(x-\alpha_\lambda)^{r_\lambda}$ 乘等式两边，然后比较等式两边的系数看出来。

部分分式具体分解法 在对有理函数具体进行部分分式的分解时，有各种方法。例如，可以按照上面证明的步骤一步一步地进行。然而通常使用另一种办法，显得更加方便，这可用下面的例子来说明。这种方法称为**待定系数法**。

【例 1】 将函数 $y=\dfrac{2x-1}{(x+2)^2(x-1)}$ 用部分分式的和来表示。从一般的定理可以知道，分解后的形式一定是:

$$\frac{2x-1}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{A_1}{(x+2)^2}+\frac{A_2}{(x+2)}+\frac{A_3}{x-1}。$$

如果用分母 $(x+2)^2(x-1)$ 乘这方程两边，得

$$2x-1=A_1(x-1)+A_2(x+2)(x-1)+A_3(x+2)^2。$$

将等式中的括号去掉，将同幂次 x 的系数归并在一起，得

$$2x-1=(A_2+A_3)x^2+(A_1+A_2+4A_3)x+(-A_1-2A_2+4A_3)。$$

比较等式两边系数后，得下列含待定常数A_1, A_2和A_3的方程组。I. $A_2+A_3=0$; II. $A_1+A_2+4A_3=2$; III. $-A_1-2A_2+4A_3=-1$。它有唯一的解$A_1=5/3$, $A_2=-1/9$, $A_3=1/9$。于是所要求的分解是:

$$\frac{2x-1}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{5}{3(x+2)^2}-\frac{1}{9(x+2)}+\frac{1}{9(x-1)}。$$

【例2】 将$y=p_1(x)/q(x)$分解成部分分式，这里$p_1(x)=x^2+5x$, $q(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x-1)^2(x^2+1)$。先有:

$$\frac{x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{(x-1)}+\frac{B+Cx}{x^2+1}。$$

用公共分母乘等式两边得:

$$x^2+5x=A_1(x^2+1)+A_2(x^2+1)(x-1)+(B+Cx)(x-1)^2。$$

从而有

$$x^2+5x=(A_2+C)x^3+(A_1-A_2+B-2C)x^2$$
$$+(A_2-2B+C)x+(A_1-A_2+B)。$$

系数A_1, A_2, B和C必须满足下面的方程组: I. $A_2+C=0$; II. $A_1-A_2+B-2C=1$; III. $A_2-2B+C=5$; IV. $A_1-A_2+B=0$。解得$A_1=3$, $A_2=1/2$, $B=-5/2$及$C=-1/2$。于是所要求的部分分式分解是

$$\frac{x^2+5x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{5+x}{2(x^2+1)}。$$

5.3 非有理函数

非有理函数——也称*无理函数*——它的定义已由它的名字给出: 不是有理函数的函数。

根函数

函数$y=\sqrt{x}$ 和平方根的定义相对应，函数$y=\sqrt{x}$只有当x不是负数时才有定义。如果用使式子$\sqrt{x}$有意义的最大的域$0\leqslant x<+\infty$作为它的定义域，那末值域为$0\leqslant y<+\infty$。另外根据定义，在区间$0\leqslant x<+\infty$内$y=\sqrt{x}$是$y=x^2$的反函数。函数$y=\sqrt{x}$的图形可借助于平方根表，或可用$y=x^2$在区间$0\leqslant x<+\infty$的“半根”抛物线关于直线$y=x$的镜象来画出(见图5.3-1)。$y=x^2$的反函数在区间$-\infty<x<0$是$y=-\sqrt{x}$(这里$0<x<+\infty$)。

函数$y=\sqrt[3]{x}$ 严格说来，最初这函数也只当自变量不是负数时才

有定义。在定义域 $0\leqslant x<+\infty$ 中，它是 $y=x^3(y\geqslant 0)$ 的反函数，因此 $x\geqslant 0$。它的图形也可取 $y=x^3$ 在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 的"半根"三次抛物线关于直线 $y=x$ 的镜象得到(见图 5.3-2)。

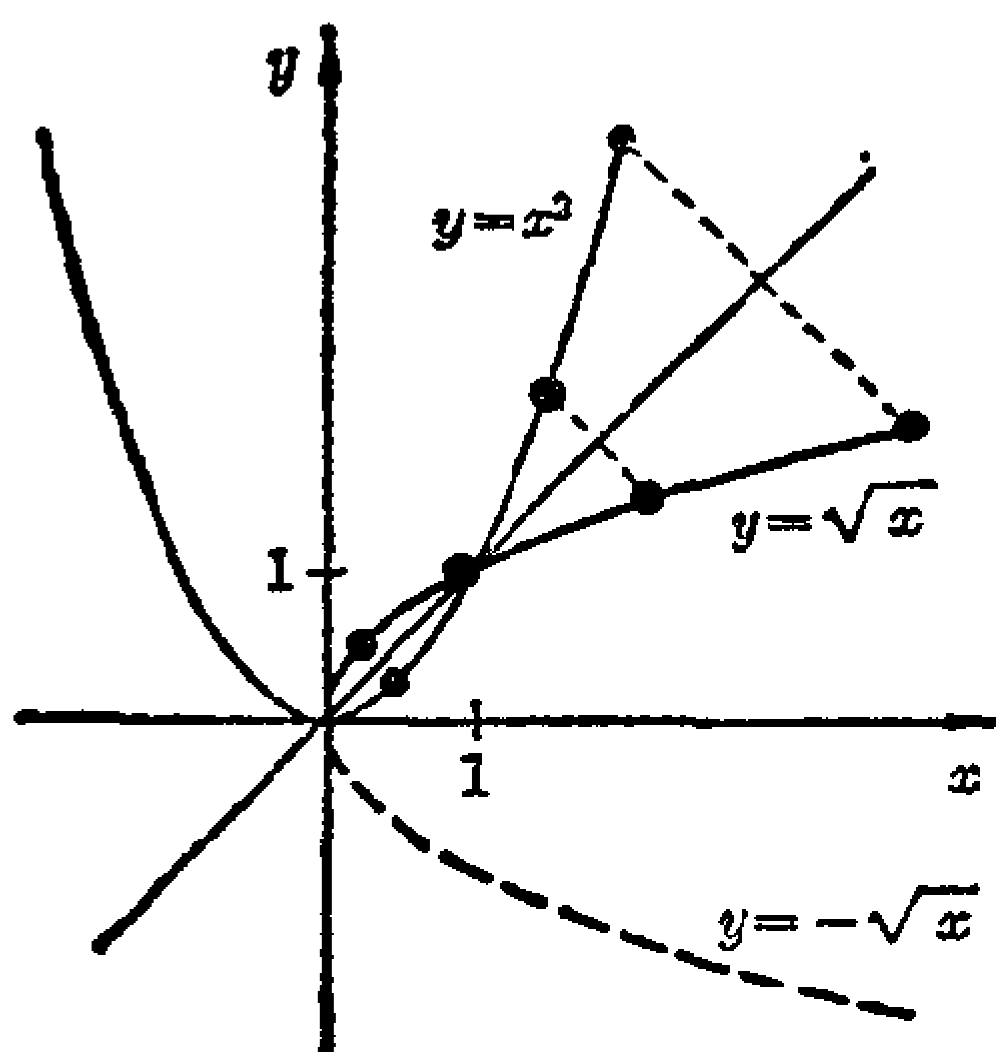


图 5.3-1　函数 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x^2$ 的图象互为镜象

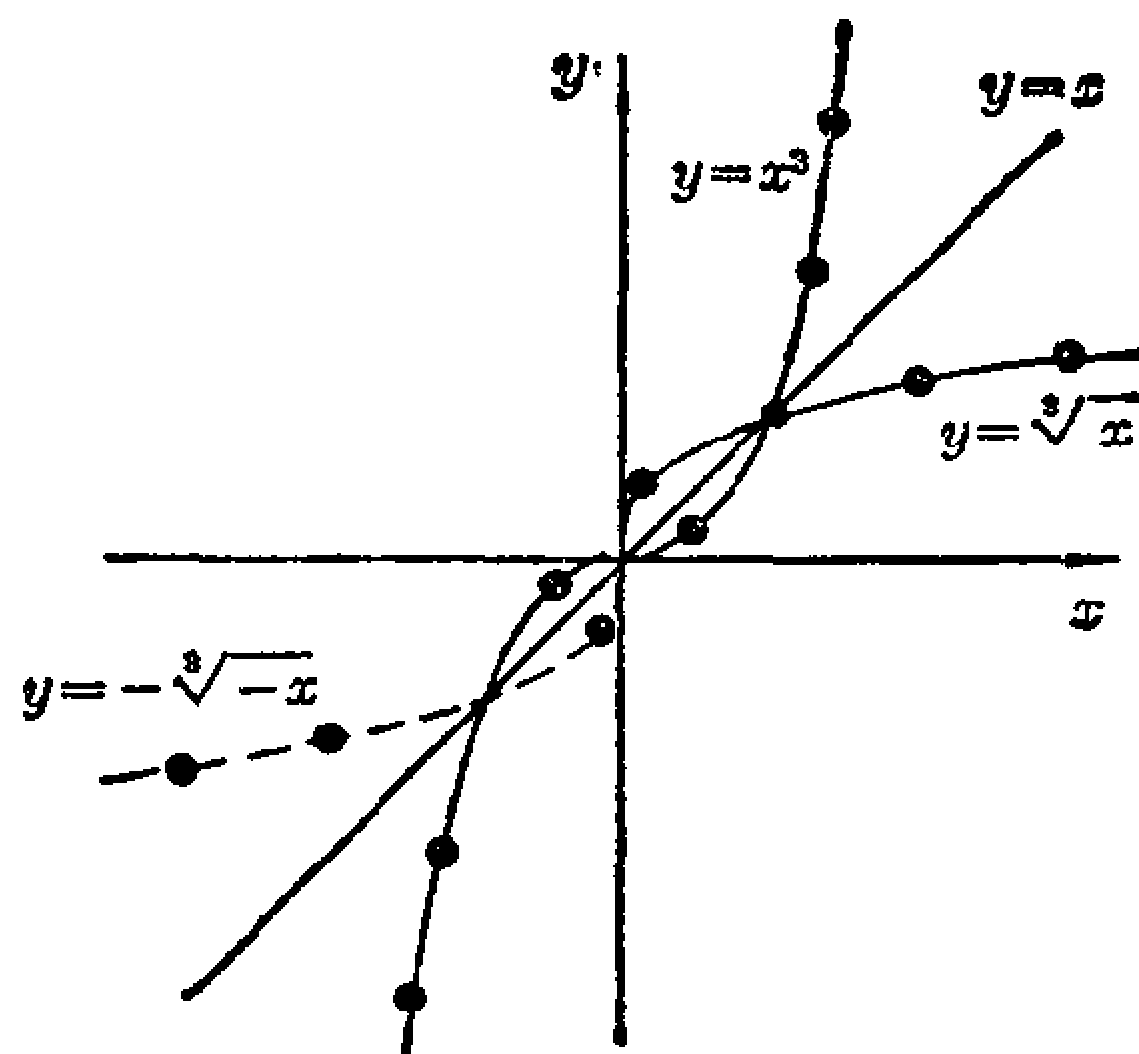


图 5.3-2　$y=x^3$ 的反函数图形

另一方面，$y=x^3(y<0$，因而 $x<0)$ 的反函数可用方程 $y=-\sqrt[3]{-x}$ (定义域为 $-\infty<x<0$)来描述(参见图中虚线部分)。因而需要两个方程来明确地描述在整个定义域上 $y=x^3$ 的反函数。因为 $y=x^3$ 是一一对应的,所以反函数一定存在。但通常将这两个方程合并成一个表达式 $y=\sqrt[3]{x}$,这样 $y=\sqrt[3]{x}$ 对所有定的 x 都有定义了(参见 I. 第 3 章)。

函数 $y=\sqrt[n]{x}$　根据根号的一般定义,要求 n 为大于 1 的整数,$n=2$ 和 $n=3$ 的情形已讨论过了，探讨更大的 n 基本上不会有什么新的东西。对于定义域 $0\leqslant x<+\infty$ 和值域 $0\leqslant y<+\infty$，所有的函数单调递增。但相互之间有所不同：若 $n<m$，当 $0<x<1$ 时，有 $\sqrt[n]{x}<\sqrt[m]{x}$；当 $x>1$ 时,有 $\sqrt[n]{x}>\sqrt[m]{x}$。函数 $y=\sqrt[n]{x}$ 是幂函数的反函数。如果 n 是偶数,那末 $y=x^n$ 在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 中单调递增,因而在该区间可以有反函数 $y_1=\sqrt[n]{x}$。在区间$(-\infty, 0]$中,函数 $y=x^n$ 和 $y=-\sqrt[n]{x}$ 互为反函数(见图 5.3-3)。当 n 为奇数时，$y=x^n$ 在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 中单调递增,并具有反函数 $x=y^n$，在 $0\leqslant x<+\infty$ 上它的显式表示为 $y=\sqrt[n]{x}$；在 $-\infty<x\leqslant 0$ 上为 $y=-\sqrt[n]{-x}$(见图 5.3-4)。或者在整个实数域上统一表示成 $y=\sqrt[n]{x}$。

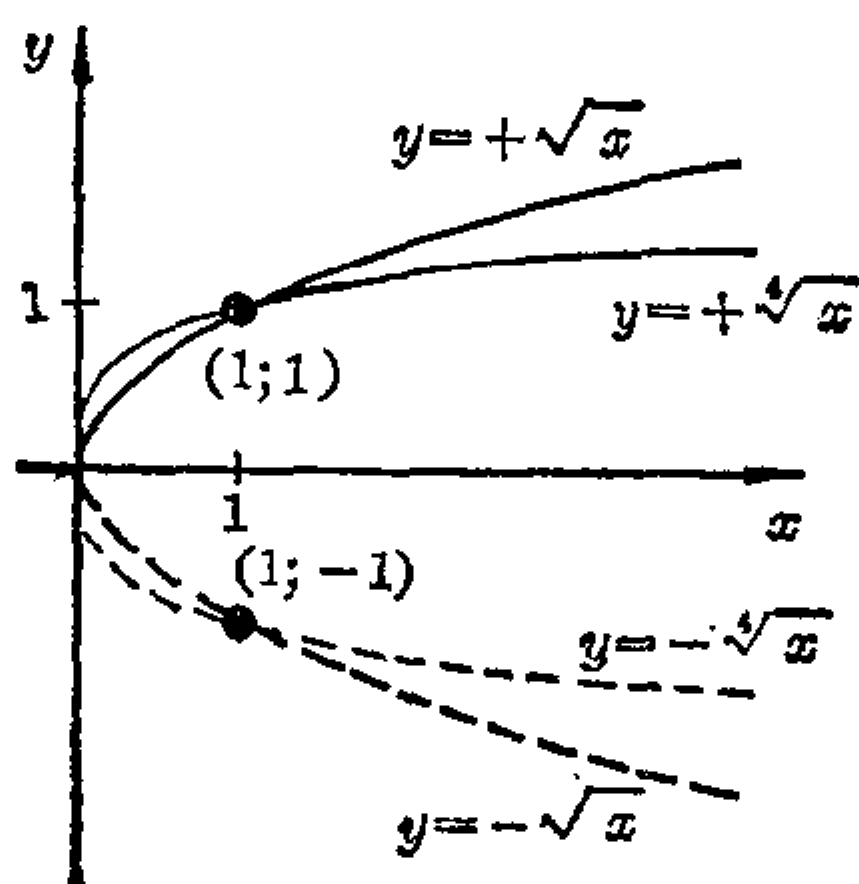


图 5.3-3　函数 $y=+\sqrt{x}, y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$ 和 $y=-\sqrt[4]{x}$ 的图形

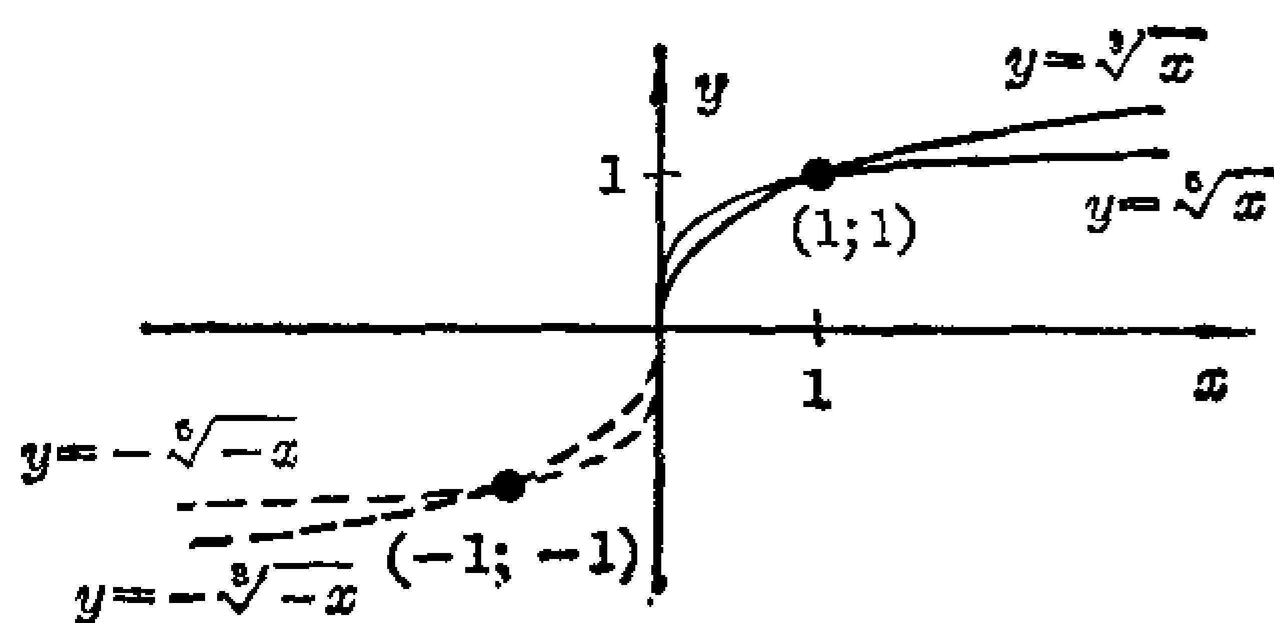


图 5.3-4　函数 $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-\sqrt[3]{-(x)}$, $y=\sqrt[5]{x}$ 和 $y=-\sqrt[5]{-x}$ 的图形

指数函数

e 函数 $y=e^x$　这个对应规则能用含有无限多个有理运算的明显表达式来给出,用这表达式,函数在每一个实数(或复数) x 的函数值可以近似计算到任意的精度。这只要将 x 代入级数 $y=e^x=1+x/1!+x^2/2!+x^3/3!+\cdots$中即可。特别当 $x=1$ 时,得到超越数 e 的值:

$$e=2.718281828459\cdots$$

某些对数表含有这个函数的一些经过四舍五入的值。

函数 $y=e^x$ 的数值表:

x	$\cdots$ −3	−2	1	0	1/3	1/2	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$ 0.05	0.14	0.37	1	1.4	1.65	2.72	7.39	20.09	$\cdots$

根据指数运算的规则, $e^0=1$ 以及 $e^{-x}=1/e^x$。由于对于正的 x 函数 $y=e^x$ 只取正值, 并且当 $x\to\infty$ 时函数单调递增到无穷大, 因此函数 $y=e^{-x}$ 也只能取正值,且当自变量 x 增加时, y 的值单调递减。当 $x\to+\infty$ 时曲线逐渐趋近于 x 轴(见图 5.3-5)。

指数函数常常被称为自然**增长函数**, 因为许多自然过程可归纳为这种函数。如果物体的数目 N 在时间 t 的增长或减少率 $\pm dN/dt$ 正比于数 N 本身,即有 $\pm dN/dt=Nk$,这里 k 是比例常数,那末 $dN/N=\pm kdt$,或 $e^{\pm kt}=N$。例如,森林的生长, 地球上人口的增长以及放射性物质的蜕变等都可归结为这种函数。

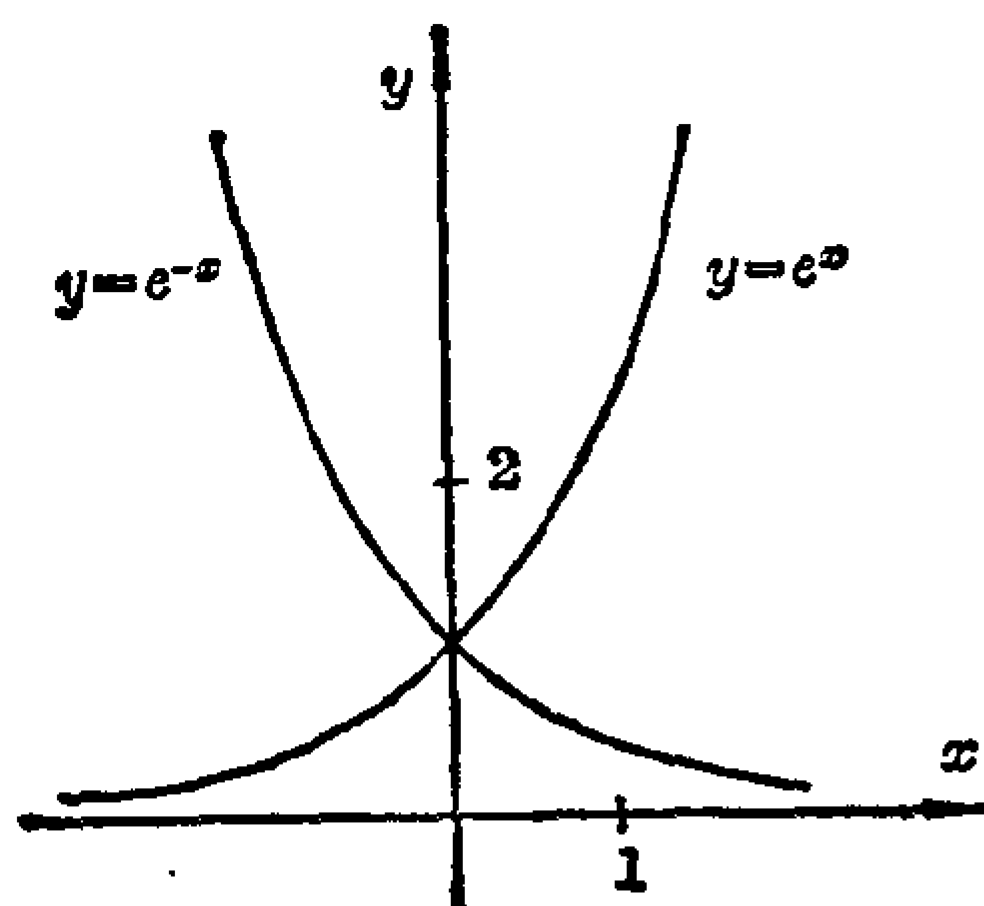


图 5.3-5 函数 $y=e^x$ 和 $y=e^{-x}$ 的图形

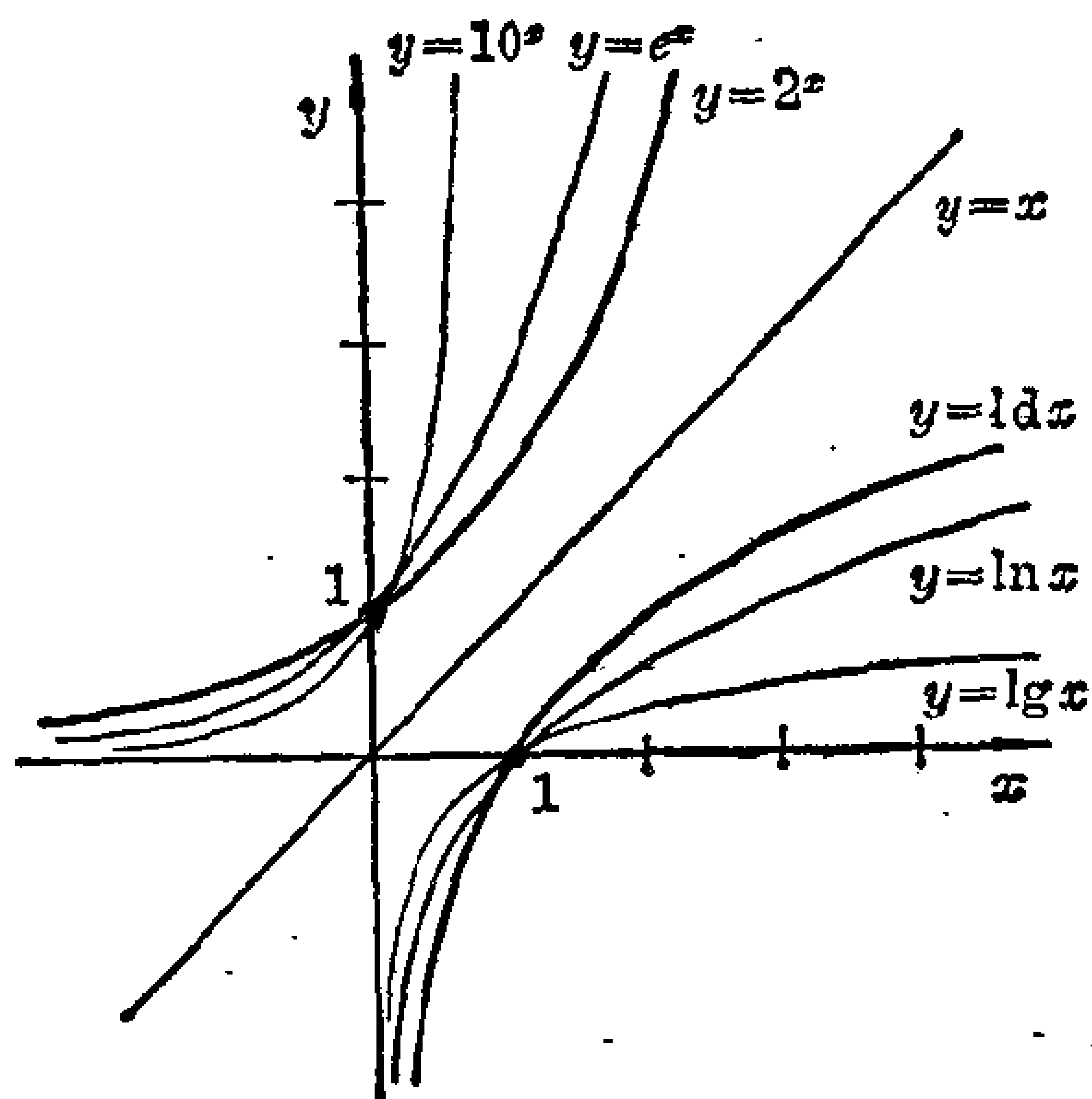


图 5.3-6 对数和指数函数的图形

函数 $y=a^x$ 根据指数运算规则，$a=e^{\ln a}$。这是因为数 $\ln a$ 是一个幂，e 必须自乘 $\ln a$ 次才能得到 a。我们有 $y=a^x=e^{x\ln a}$，即一般的指数函数是一种 e 函数 $y=e^{kx}$，它的定义区间被均匀一致地扩展或压缩了常数因子 $k=\ln a$ 倍。于是从 x 到 $x+1$ 的区间长度不再为 1，而是 $1\cdot k=\ln a=\lg a/\lg e=2.30259\cdots\lg a$。例如，当 $a=2$ 时，这个值比 1 小 ($k=0.693$)；而当 $a=10$ 时，则比 1 大($k=2.30$)。如果 e^x 的自变量 x 增加 1，函数 $y=2^x=e^{x\ln 2}$ 的自变量 kx 只增加了 0.693，但函数 $y=10^x=e^{x\ln 10}$ 却增加了 2.30。函数 $y=2^x$ 的增加比 e 函数 e^x 要慢，而函数 $y=10^x$ 的增加则比 e^x 快(见图 5.3-6)。

总的说来，当 $0<a<e$ 时 $y=a^x$ 增加得比 e^x 慢，当 $a>e$ 时则比 e^x 快。

$$\boxed{y=a^x=e^{x\ln a}}$$

函数 $y_1=2^x$ 和 $y_2=10^x$ 的数值表

x	-3	-2	-1	0	1/3	1/2	1	2	3
y_1	0.125	0.25	0.5	1	1.26	1.41	2	4	8
y_2	0.001	0.01	0.1	1	2.15	3.16	10	100	1000

在实数域内，当 $a=0$ 或 a 为负值时对数没有定义。因此一般指数函数 $y=a^x=e^{x\ln a}$ 仅仅在底 a 的值为正时才有意义。底越接近于 1，指数函数

的曲线越平。在 $a=1$ 时对于一切 x，函数值 $y=1$，这时函数曲线是一条平行于 x 轴的直线。对于 $0<a<1$，$y=a^x=(1/a)^{-x}$，因而 $y=a^x$ 的图形可由函数 $y=b^x(b=1/a>1)$ 的曲线取关于 y 轴的镜象而得到。

函数 $y=k\cdot a^x$　由于多了一个正的常数因子 k，函数的纵坐标 y 按比例 $1:k$ 扩展(对于 $k>1$)或缩小(对于 $k<1$)。由此可以看出这就是将曲线平行于 x 轴作一移动。因为 $k=e^{\ln k}$，所以 $y=k\cdot a^x=e^{\ln k}\cdot e^{x\ln a}=e^{x\ln a+\ln k}$，故平行于 x 轴的移动量为 $c=-\ln k$。

对数函数

函数 $y=\log_a x$　这是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，当然它在整个定义域中是单调的。由于指数函数的值域为 $0<y<+\infty$，因此对数函数只能当自变量为正时才有定义，所以定义域为 $0<x<+\infty$。有两个特殊的反函数，一个是 $y=e^x$ 的反函数：$y=\ln x$；另一个是 $y=10^x$ 的反函数：$y=\lg x$。它们的图形可由 $y=e^x$ 和 $y=10^x$ 的图形关于直线 $y=x$ 的镜象得到(见图 5.3-6)。有关 $y=\lg x$ 及计算尺的知识已在 I. 第2章中讨论了。

函数 $y=\log_a x^k$　很清楚这函数又可写为 $y=k\log_a x$，因此将上述函数乘以常数 k 后就可得到这函数的函数值。它的值也可以是负的，因为当 $k=-\varkappa(\varkappa>0)$ 时，可得

$$y=\log_a x^{-\varkappa}=\log_a(1/x^{\varkappa})=-\log_a x^{\varkappa}=-\varkappa\log_a x。$$

特别当 $k=-1$ 时，函数的图形是函数 $y=\log_a x$ 的图形关于 x 轴的镜象。$y=-\log_a x=\log_a x^{-1}=\log_a(1/x)$ 是函数 $y=a^{-x}$ 的反函数。

函数 $y=\log_a(kx)$　在常数 k 为正值时，由于 $y=\log_a(kx)=\log_a k+\log_a x$，故这函数的图形可以通过将 $y_1=\log_a x$ 的图形作一平行于 $+y$ 轴的平移得到，平移的距离为 $d=+\log_a k$。对于负值 $\varkappa=-k(k>0)$，函数只是对负的 x 有定义。并且因 $\varkappa x=|kx|$，故其函数值和 $y=\log_a(kx)$ 在 $(0<x<+\infty)$ 上的函数值相同。

三角函数和圆函数

三角函数或称角函数和圆函数或称弧函数是经常遇见的非有理函数。在 I. 第10章中将对它们进行深入的讨论。

三角函数和圆函数之间的关系　由于圆函数定义为三角函数的反函数，因而直接可得到下列关系：$\sin(\arcsin x)=x$；$\cos(\arccos x)=x$ 等等。

对于正的 x，如果两边都取主值，则 $\mathrm{Arc}\cot x=\mathrm{Arc}\tan(1/x)$ 也成立，这是因为 $\cot x=1/\tan x$。由于这一原因，在大多数的讨论中函数 $y=\mathrm{arc}\cot x$ 都可避免不用。下面是另外一些比较重要的关系式:

$\sin(\mathrm{Arc}\cos x)=\sqrt{(1-x^2)}$	$\sin(\mathrm{Arc}\tan x)=\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$
$\cos(\mathrm{Arc}\sin x)=\sqrt{(1-x^2)}$	$\cos(\mathrm{Arc}\tan x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$\tan(\mathrm{Arc}\sin x)=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\tan(\mathrm{Arc}\cos x)=\dfrac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$

这里只要证明第一个关系式就足够了，因为其他关系式的证明完全类似。对于 $\mathrm{arc}\cos x$ 的主值 $0\leqslant\mathrm{Arc}\cos x\leqslant\pi$，从 $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ 可得 $\sin y=\pm\sqrt{(1-\cos^2 y)}$，或 $\sin(\mathrm{Arc}\cos x)=\pm\sqrt{(1-x^2)}$。在这个定义域内，正弦函数没有负值，即 $\sin(\mathrm{Arc}\cos x)\geqslant 0$，因此平方根前的符号取正号，如表内所给的那样有：$\sin(\mathrm{Arc}\cos x)=+\sqrt{(1-x^2)}$。同样，对于主值 $-\pi/2\leqslant\mathrm{Arc}\sin x\leqslant+\pi/2$，有 $\cos(\mathrm{Arc}\sin x)=+\sqrt{(1-x^2)}$，这是因为余弦函数在这区间内不取负值。利用欧拉首先发现的三角函数和指数函数之间的关系式，可得到**反三角函数和对数函数**之间的关系式。这些关系在**复数域**内成立。

欧 拉 公 式	$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$
$\sin\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$	$\cos\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$
$\tan\varphi=-i\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}$	$\cot\varphi=+i\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}$

从上面得到的关系式，对于 $\sin\varphi=x$ 和主值 $\mathrm{Arc}\sin x=\varphi$，第一个欧拉公式变成 $e^{i\varphi}=ix+\sqrt{(1-x^2)}$，两边取对数可得 $i\varphi=i\,\mathrm{Arc}\sin x=\ln(ix+\sqrt{(1-x)^2})$。对其他反函数也可用类似的方法计算，从而得到下列关系式:

$$\mathrm{Arc}\sin x = -i\ln[xi + \sqrt{(1-x^2)}]$$
$$\mathrm{Arc}\cos x = -i\ln[x + i\sqrt{(1-x^2)}]$$
$$\mathrm{Arc}\tan x = -i\ln\sqrt{(1+xi)/(1-xi)}$$
$$\mathrm{Arc}\cot x = -i\ln\sqrt{(xi-1)/(xi+1)}$$

双曲函数

由下列函数方程定义的函数称为**双曲函数**:

1. **双曲正弦**: $y=\sinh x=(e^{x}-e^{-x})/2$;
2. **双曲余弦**: $y=\cosh x=(e^{x}+e^{-x})/2$;
3. **双曲正切**: $y=\tanh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$;
4. **双曲余切**: $y=\coth x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$。

函数 $y=\sinh x$ 从定义可得出 $y=(e^{x}-e^{-x})/2$ 对于所有的 x 值都有定义。在 $x=0$ 处,函数有一零点。如果 $x\to+\infty$, e^{-x} 可任意小。但同时 e^{x} 却无限增加,因此函数值可变得任意大。当 $x\to-\infty$, e^{-x} 变得任意大而 e^{x} 却趋向于零,所以函数值趋向于 $-\infty$。从定义函数的方程可进一步看出 $\sinh x=-\sinh(-x)$成立,因而函数是**奇函数**。它的图形关于坐标原点**中心对称**,值域为 $-\infty<y<+\infty$(见图 5.3-7)。

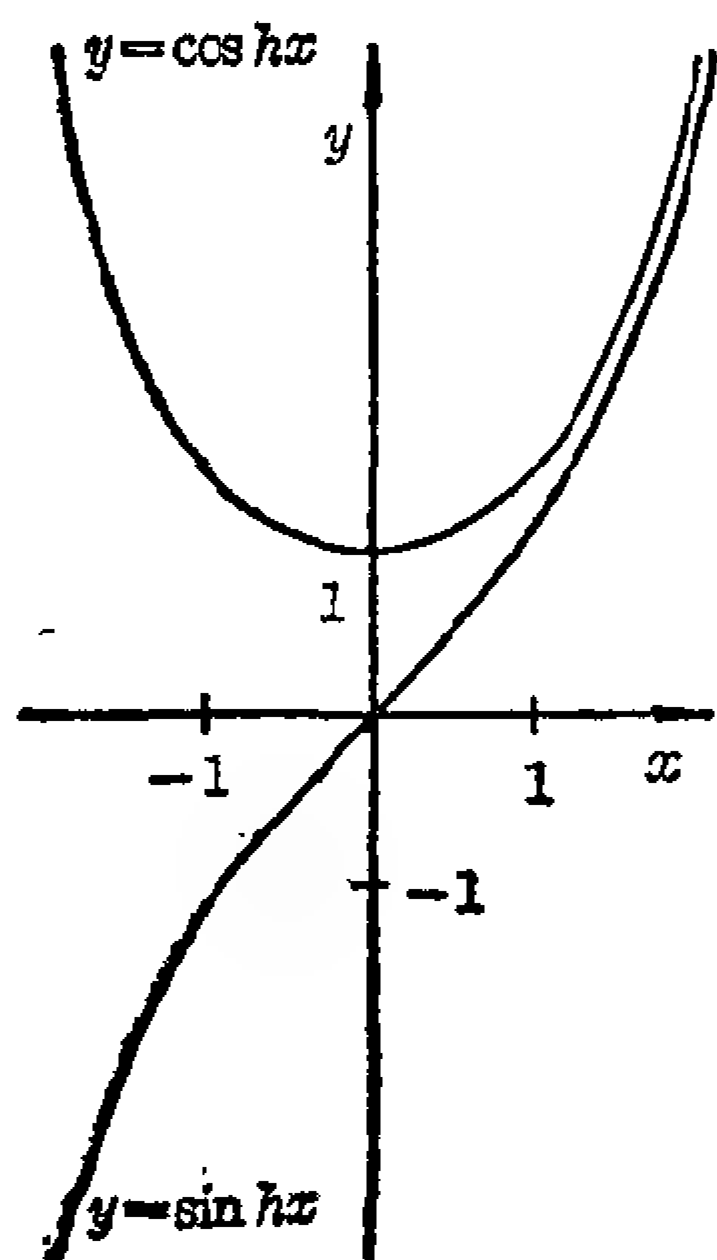


图 5.3-7 $y=\sinh x$ 和 $y=\cosh x$ 的图形

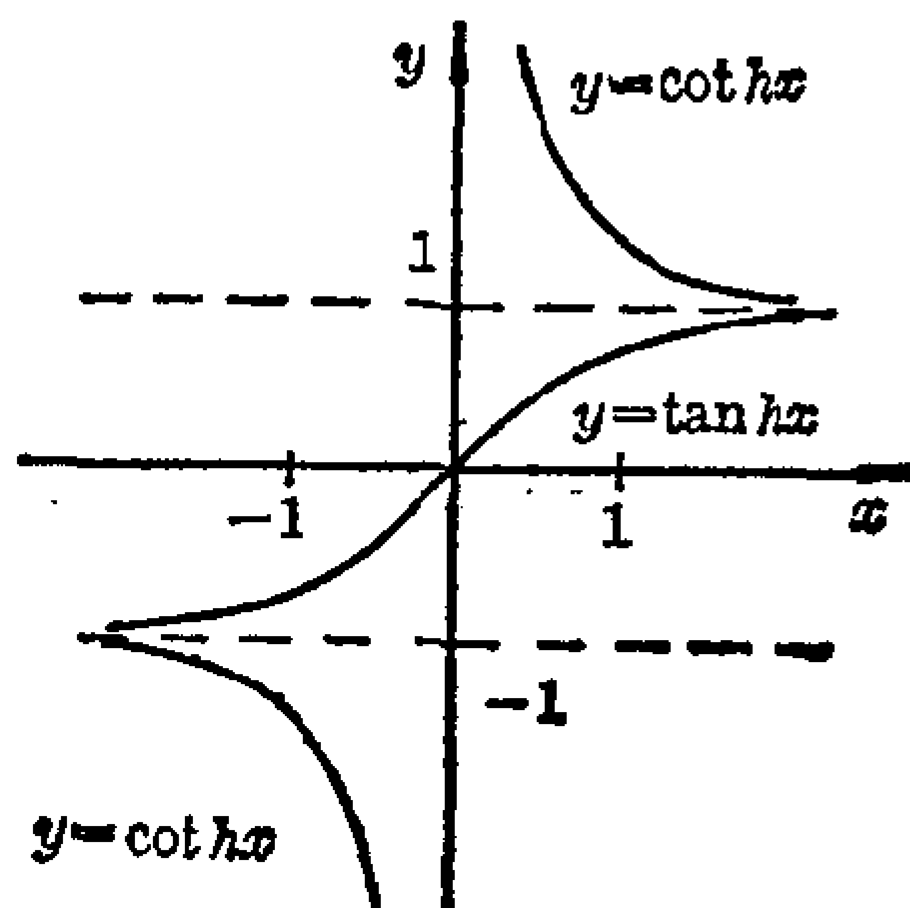


图 5.3-8 函数 $y=\tanh x$ 和 $y=\coth x$ 的图形

函数 $y=\cosh x$ 从函数方程 $y=(e^x+e^{-x})/2$ 可以看出，函数对于所有的 x 都有定义，值域为 $1\leqslant y<+\infty$。函数是偶函数，它的图形关于 y 轴是对称的(见图 5.3-8)。一根较重的铁链或绳子由于本身的重量下悬所成的形状就是函数 $y=a\cosh(x/a)$ 的图形。这里 a 是一正的常数，它取决于材料的特性(参见图 19.5-11)。

函数 $y=\tanh x$ 和 $y=\coth x$ 第一个函数对于所有的 x 都有定义，但第二个函数的定义域不包括 $x=0$。$y=\tanh x$ 的值域是有界的：$-1<y<+1$。与之对比，$y=\coth x$ 的值域为 $-\infty<y<-1$ 和 $+1<y<+\infty$。两个函数都是奇函数(见图 5.3-8)。

双曲函数之间的关系式 从函数方程可以马上得出下列恒等式：

$$\tanh x=\sinh x/\cosh x \quad \coth x=1/\tanh x \quad \cosh^2x-\sinh^2x=1$$

这些关系式和三角函数之间的关系式极为相象，因而称它们为双曲正弦、双曲余弦等等。至于为什么说它们是双曲函数，只要看一下第三个关系式就清楚了。令 $\cosh x=X$ 和 $\sinh x=Y$，这一关系式变成 $X^2-Y^2=1$。这是 $X-Y$ 平面上的双曲线方程，但它只表示右边一个分支，因为

$$\cosh x\geqslant 1。$$

双曲函数的反函数

双曲函数是可逆的。对于 $y=\sinh x$ 和 $y=\tanh x$，可从它们的图形中看出。对于 $y=\coth x$，此结论也成立，这是因为函数是一一对应的。对于 $y=\cosh x$，函数在两个区间 $-\infty<x\leqslant 0$ 和 $0\leqslant x<+\infty$ 内是单调的，因而在这两个区间的每一个上都可定义反函数。

反双曲正弦，$y=\sinh^{-1}x$ 这是 $y=\sinh x$ 的反函数。解方程 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，求出 x。首先有 $2y=e^x-e^{-x}$，两边乘以 e^x 后得 $2ye^x=e^{2x}-1$，或 $e^{2x}-2ye^x-1=0$，这是关于 e^x 的二次方程。只有 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$ 才是所需的解，这是因为 $y-\sqrt{y^2+1}$ 总是负的，而 e^x 只能取正值。两边取对数后得 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$。从这一式子可以得到反函数方程的显式表示式 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，这就是 $y=\sinh^{-1}x$。函数 $y=\sinh^{-1}x$ 的图形是方程 $y=\sinh x$ 的曲线关于直线 $y=x$ 的镜象。

反双曲余弦，$y=\cosh^{-1}x$ 可象对 $y=\sinh x$ 求逆那样，对 $y=$

$\cosh x$ 求逆，经过类似的几步后，得方程 $e^{2x}-2ye^{x}+1=0$。解之得 $e^{x}=y\pm\sqrt{y^2-1}$。最后可得：在区间 $-\infty<x\leqslant 0$ 上，反函数为 $y=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ 而在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 上，反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$。两个反函数的定义域都是 $1\leqslant x<+\infty$。前面一个反函数的值域为 $-\infty<y\leqslant 0$；后面一个的值域则为 $0\leqslant y<+\infty$。值域为 $0\leqslant y<+\infty$ 的反函数被称为反双曲余弦的主值，它的显函数表示式为

$$y=\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})。$$

反双曲正切，$y=\tanh^{-1}x$　先将函数方程 $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 的分子和分母同乘以 e^{x}，得 $y=(e^{2x}-1)/(e^{2x}+1)$，因而有 $ye^{2x}+y=e^{2x}-1$ 或 $ye^{2x}-e^{2x}=-y-1$。两边乘以 -1，并将 e^{2x} 的项合并得 $e^{2x}(1-y)=(1+y)$ 或 $e^{2x}=(1+y)/(1-y)$，$e^{x}=\sqrt{(1+y)/(1-y)}$。两边取对数，最后将变量互换位置，得 $y=\tanh^{-1}x$ 的显式方程 $y=\ln\sqrt{(1+x)/(1-x)}$ 或 $y=(1/2)\ln[(1+x)/(1-x)]$。它的定义域为 $-1<x<+1$，但值域由所有的实数组成。

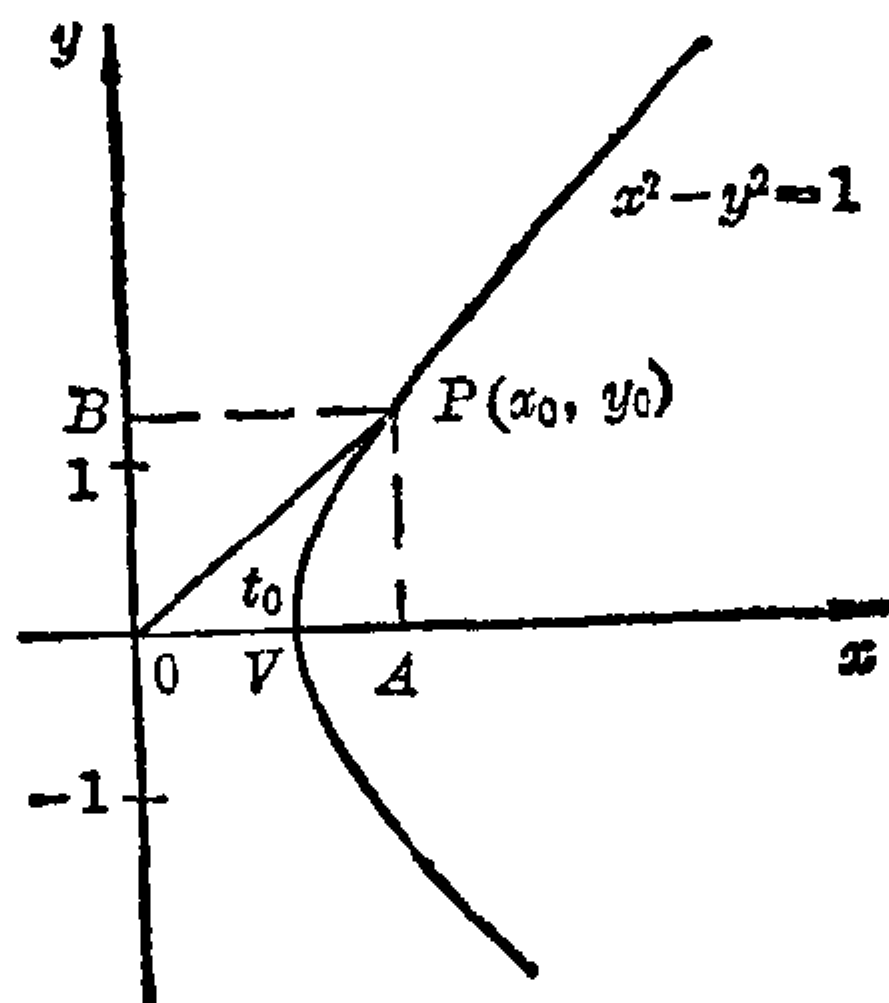


图 5.3-9　反双曲函数的几何意义

为了完整起见，反双曲余切 $y=\coth^{-1}x$ 的方程给出于下：

$$y=(1/2)\ln[(x+1)/(x-1)]。$$

定义域为 $-\infty<x<-1$ 以及

$$1<x<+\infty。$$

反函数的几何意义　三角函数的反函数在几何上可以看成是弧长，当自变量为这些弧长时，正弦函数、余弦函数、正切函数或余切函数的函数值都为给定的值 x。如果用这弧长作为一参变量 t，于是 $x=\cos t$ 和 $y=\sin t$ 表示 x-y 平面中单位圆上的一点，这是因为 $\cos^2 t+\sin^2 t=1$。类似地，对双曲函数也可引进参变量 t 使 $x=\cosh t$ 和 $y=\sinh t$。由于 $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$，故点 $P(x, y)$ 在直角双曲线 $x^2-y^2=1$ 上(见图 5.3-9)。可以证明，此时参变量 t 表示线段 $|OV|$，弧 VP 和直线 OP 所围面积的两倍。用积分可计算面积如下：

$$面积\ VAP=\int_1^{x_0}\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x_0+\sqrt{x_0^2-1}|;$$

面积 $$OVPB=\int_0^{y_0}\sqrt{y^2+1}\,dy$$
$$=\frac{1}{2}y_0\sqrt{y_0^2+1}+\frac{1}{2}\ln|y_0+\sqrt{y_0^2+1}|。$$

从这里，可以用两种方法计算面积 $\frac{t_0}{2}=OVP$:

1. $$OVP=OAP-VAP=\frac{1}{2}x_0y_0-VAP$$
$$=\frac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2-1}-\frac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2-1}+\frac{1}{2}\ln|x_0+\sqrt{x_0^2-1}|$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x_0+\sqrt{x_0^2-1}|;$$

2. $$OVP=OVPB-OPB$$
$$=\frac{1}{2}y_0\sqrt{y_0^2+1}+\frac{1}{2}\ln|y_0+\sqrt{y_0^2+1}|$$
$$-\frac{1}{2}y_0\sqrt{y_0^2+1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln|y_0+\sqrt{y_0^2+1}|。$$

在讨论反双曲余弦函数时我们已经看到

$$\frac{1}{2}\ln|x_0+\sqrt{x_0^2-1}|=\frac{1}{2}\cosh^{-1}x_0,$$

因此 $t_0=\cosh^{-1}x$。另一方面在讨论 $\sinh^{-1}x$ 时也已证明过

$$\frac{1}{2}\ln|y_0+\sqrt{y_0^2+1}=\sinh^{-1}y_0,$$

所以 $$t_0=\sinh^{-1}y_0。$$

5.4 多于一个自变量的函数

一般定义

如果 M_1, M_2, $\cdots$, M_n 是 n 个非空集合，相互之间可以相同。依次从每个集合中挑选一个元素，例如从 M_1 挑选 x_1, M_2 为 x_2, ……, M_n 为 x_n, 挑选中要注意序列的次序，所有这些元素的集合(x_1, x_2, $\cdots$, x_n)称为一个 n 组。如果对每一个 n 组(其次序按序列排)在一集合 N 中只有一个元素与之对应，那末说由此对应所确定的函数具有 n 个自变量。一般写为 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

具有两个自变量的实函数

下列讨论的函数总假定定义域由有序的实数对组成，而值域被包含在实数集中。其一般形式通常写成 $z=f(x, y)$，这里 z 为应变量，而 x 和 y 是自变量。

定义域在平面上的表示 具有两个自变量的实函数的定义域可以有其几何意义，因为每一个有序的实数对唯一地对应于坐标平面上的一点。反过来，具有各种形状的平面区域可以用来作为一个函数的定义域。例如，定义域可以是连通的，或者在另一个极端情况下，它也许只是由一些孤立的点组成。

【例 1】 由 $-\infty<x<+\infty$ 和 $0\leqslant y<+\infty$ 给定的定义域对应于 x-y 平面的上半平面，包括 x 轴(见图 5.4 1)。

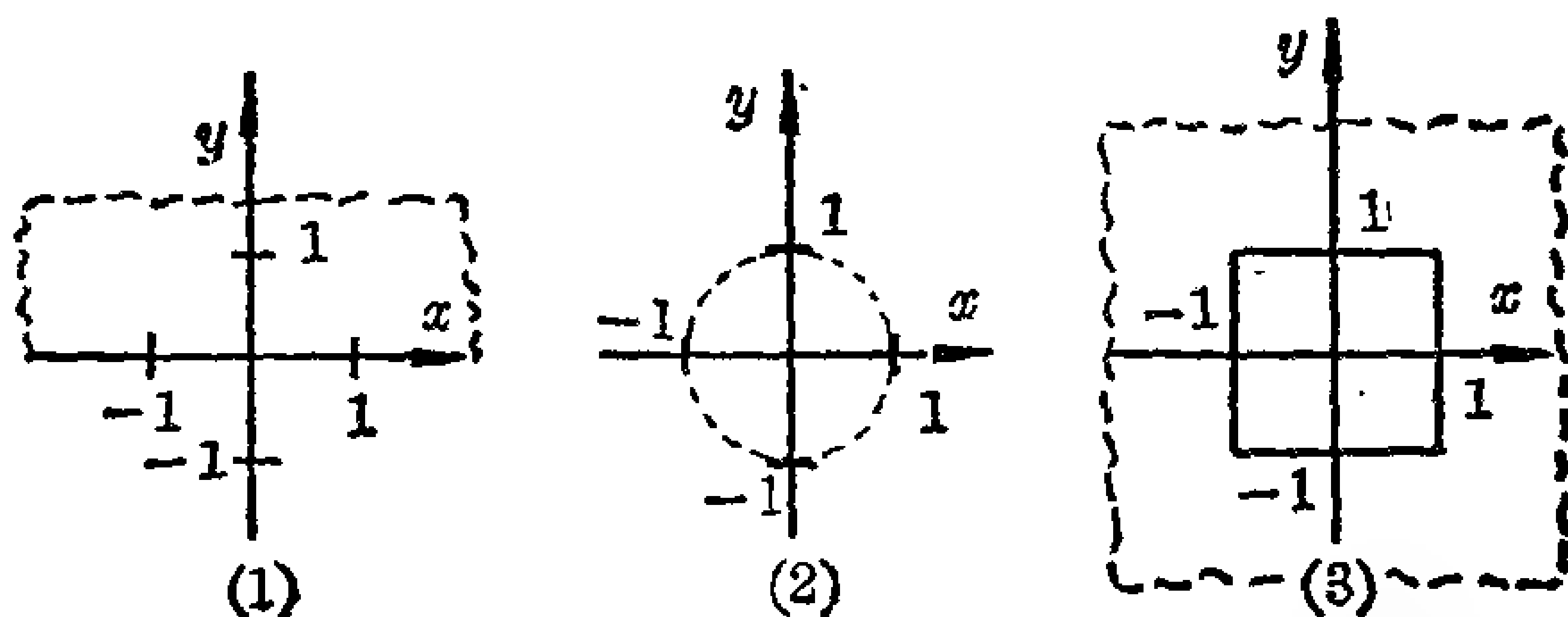


图 5.4-1 在例子中给出的一些区域的几何表示

【例 2】 由条件 $x^2+y^2<1$ 决定的定义域是单位圆内部所成的区域(见图 5.4-1)。

【例 3】 条件 $-\infty<x\leqslant-1$ 或 $1\leqslant x<+\infty$ 和 $-\infty<y<+\infty$，以及 $-1<x<+1$ 和 $+1\leqslant y<+\infty$ 或 $-\infty<y\leqslant-1$ 一起决定的定义域是整个平面除去正方形的内部所成的区域(见图 5.4-1)。

函数在空间的表示 由于一共有三个变量，因而可采用由三个坐标轴组成的空间坐标系来进行几何表示。通常是用一直角坐标系。

对于每三个有序的实数，正好对应于空间直角坐标系中的一点，反之亦然。基于这种对应的唯一性，所有两个自变量的实函数都能在几何上加以表示。如果数 z_0 是函数 $z=f(x,y)$ 相应于数对 (x_0,y_0) 的函数值，那末在几何上对应于坐标为 (x_0, y_0, z_0) 的一点 P_0。因此这函数的图形表示空间中一个曲面。

现在的问题是：给出一个具体的函数，如何知道这个函数所表示的曲面的特性呢？当然，可先列出**数值表**，然后再画图，这在原则上是可能的。但用这种方法画出直观的图，其数值表必定会十分长。因此，实际上常采用其他的方法。例如，决定一些可能的极值、鞍点等等，然后根据**微积分**的一些结果来画图。关于这一点在此不进行深入的讨论。如果将函数的三个变量中的一个看作常数保持不变，就可对图形有相当的了解。例如，从定义域中选择所有使 x 值等于一固定常数 c 的数对 (x, y)，从 $z=f(x, y)$ 可得到函数方程 $z=f(c, y)$。现在它只含有一个自变量，它的图形是一条曲线，这条曲线是由 $z=f(x, y)$ 决定的曲面与由 $x=c$ 给出的平面的**交线**。如果对于不同的 x 画出这些曲线，可得**一族曲线**。这一族曲线能给出这个曲面的近似图形。自然，对变量 y 也可采用同样的方法。如果将应变量 z 固定，情况少许有点不同。对于每个特定的 z 值会得到一具有两个变量的方程：从 $z=f(x, y)$ 可得到 $f(x, y)=c$。满足这一方程的数对 (x, y) 的集合在几何上可以解释为是由 $z=c$ 所给定的平面上的一个点集。如果假定 c 是属于函数的值域，那末这个点集是非空的，一般它形成某条曲线，由于通常认为 z 轴是垂直的，故这些曲线称为**等高线**或**水平曲线**。原则上它们和**地图**上的等高线是一样的。在这两种情形中，等高线上的点是那些在某一标准平面以上或以下而且有同一高度的点。在地图上这一标准平面通常就是海平面，而在所讨论的问题中，这就是 x-y 平面。

【例 1】 函数 $z=x+y$ 在整个 x-y 平面上都有定义，很明显它的值域为 $-\infty<z<+\infty$。如果将 x 固定，那末对于每一个特定的 x 值，所对应的方程为 $z=y+c$。在几何上它表示一族直线。如果考虑由 $x+y=c$ 给出的**等高线**，可得到一族平行的直线。函数 $z=x+y$ 的图形是一个平面（见图 5.4-2）。

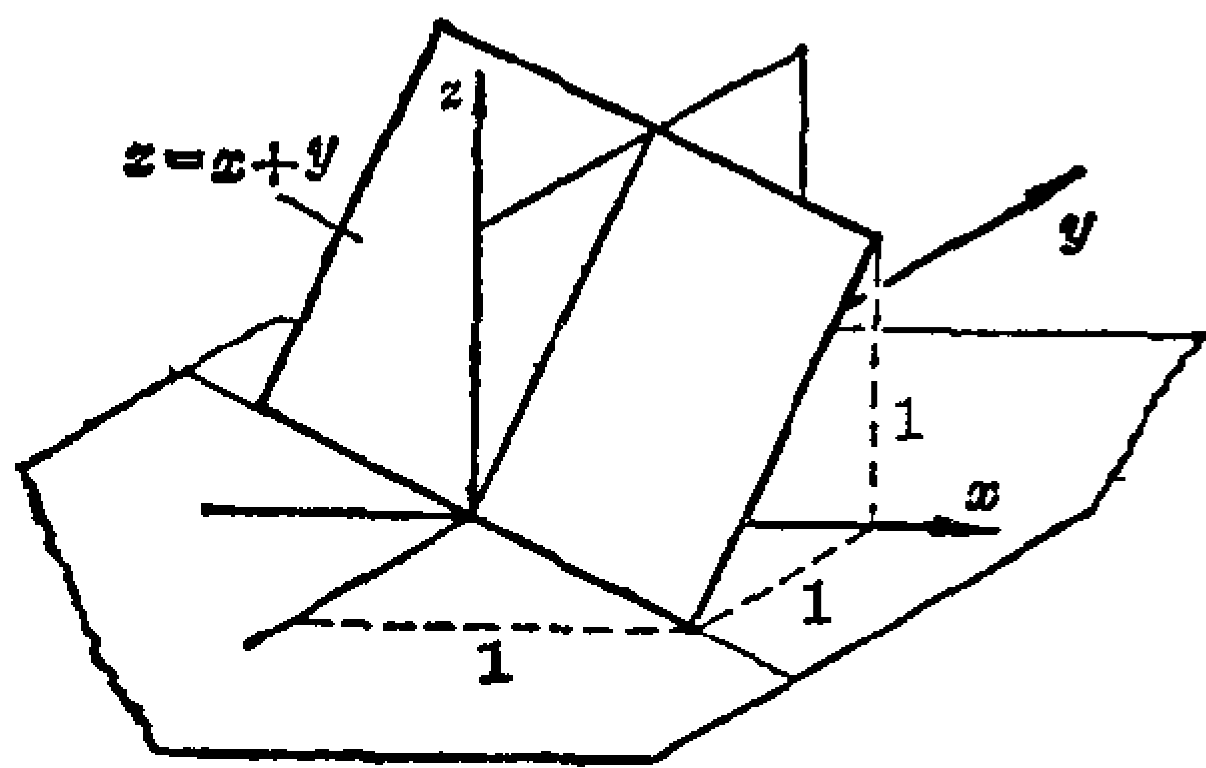


图 5.4-2 函数 $z=x+y$ 的几何表示

【例 2】 函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 只在区域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 中才有定义，因而它的**定义域**是一个以原点为中心、以 2 为半径的圆。它的值域是有界

的：$0\leqslant z\leqslant 2$。将x固定，得方程$z=\sqrt{4-c^2-y^2}$，它在几何上表示一个半圆。如果将y固定，结果相同。等高线由$c=\sqrt{4-x^2-y^2}$给出，经整理后可得$x^2+y^2=4-c^2$，这表示一个半径为$\sqrt{4-c^2}$的圆。而此$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$在几何上表示一个半球(见图5.4-3)。

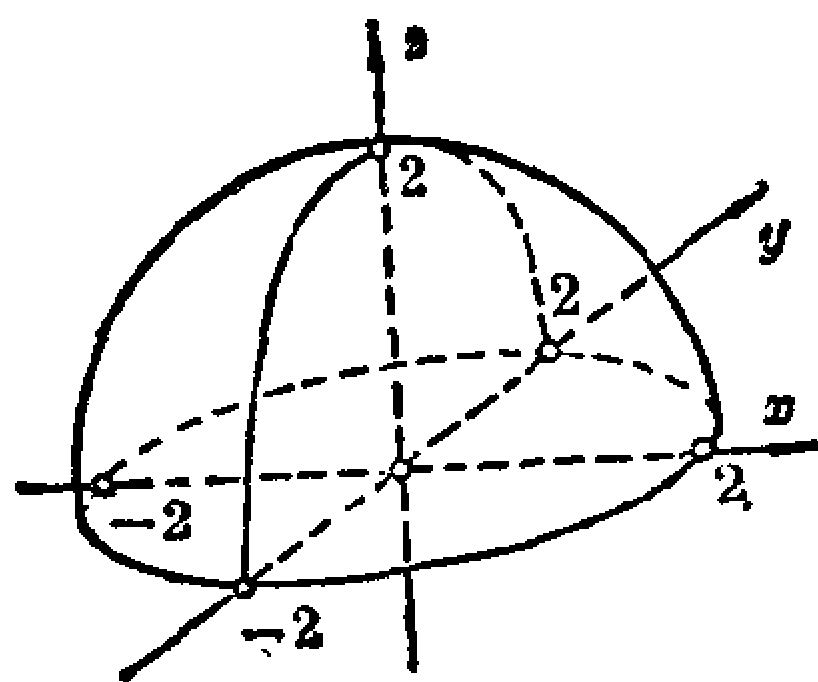


图5.4-3　函数$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的几何表示

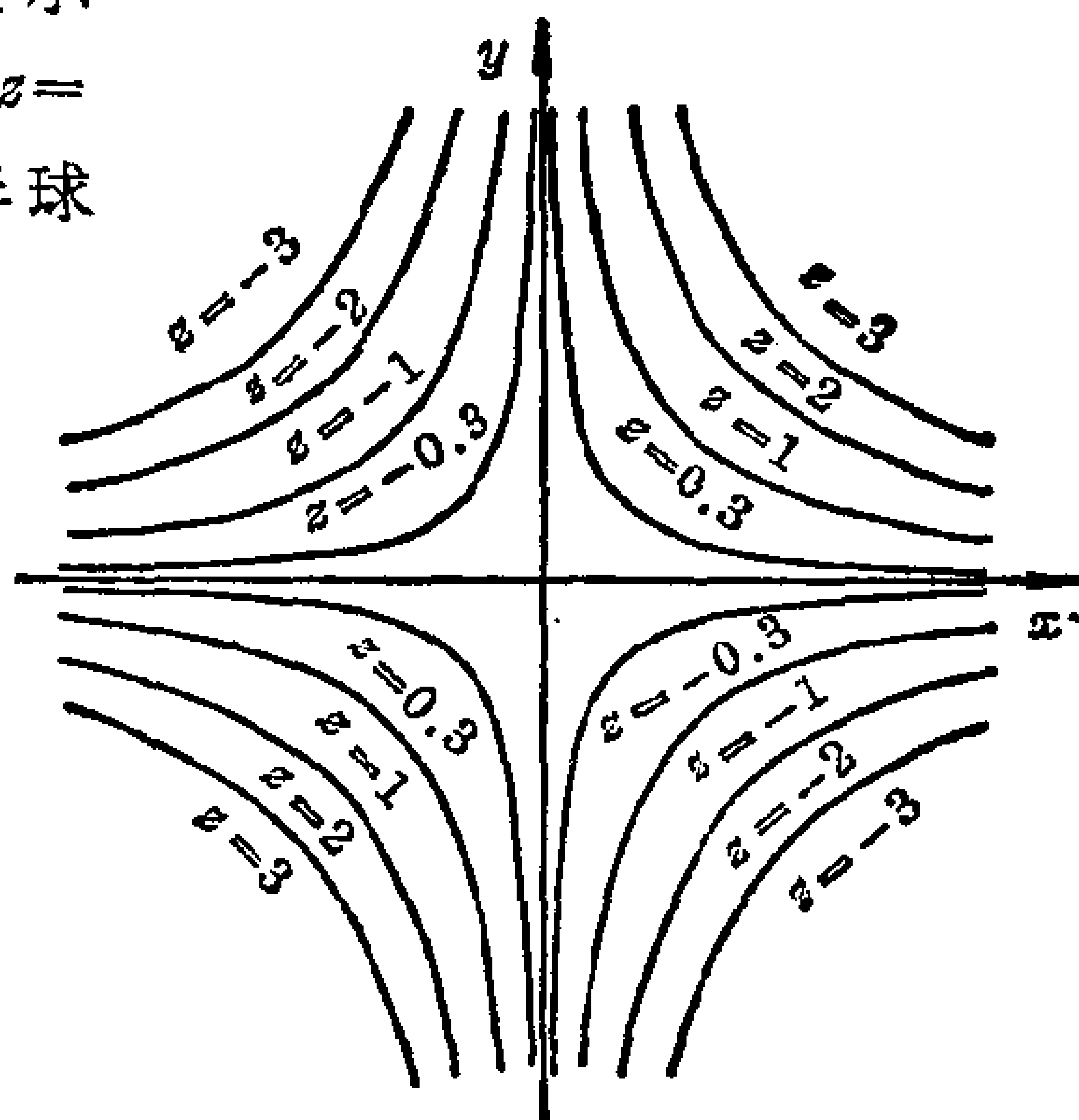


图5.4-4　函数$z=xy$的等高线

【例3】　函数$z=xy$在整个x-y平面内都有定义。它的值域为$-\infty<z<+\infty$。将x固定，得函数$z=cy$，它的图形是直线。当然，这些直线并不象例1那样，它们相互之间都不平行。将y固定可得到同样的结论。在这一例子中，等高线是一些双曲线，其方程为$xy=c(c\neq 0)$。当$c=0$时，等高线就是x轴和y轴(见图5.4-4)。

如果曲面用一与x-y平面垂直的平面切割，只要这个平面和x-z平面或y-z平面不平行，那么相交的曲线是一些抛物线。否则的话，其交线就是上面已讨论过的那些直线。

这可从下面的讨论中看出。用来切割的平面方程都具有$Ax+By+C=0$这种形式。经过变形，可得$y=ax+b$。将表达式$ax+b$取代$z=xy$中的y，可得$z=ax^2+bx$，这是抛物线的方程式，顶点在$x=y$或$x=-y$的平面上。

函数$z=xy$在几何上表示一种称为**双曲抛物面**的曲面。

出现在其他学科领域内的一些函数　具有两个自变量的实函数不仅被用来表达数学上的关系，而且也表示物理和工程技术以及其他领域中的一些关系。例如，$A=ab$和$A=gh/2$这类面积公式；$V=\pi r^2h$和$V=$

$a^2h/3$ 这类体积公式；方程的求解公式 $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(p^2/4-q)}$；表达欧姆定律的公式 $I=E/R$，或者距离、速度和时间之间的关系公式 $s=Vt$，以及车床切削速度公式 $V=\pi dn/1000$ 等等都是。函数公式也可能用隐式来表示，这里预先没有指定那一个变量作为因变量。理想气体的状态方程 $PV_m=RT$ 就是这样一个例子。这方程给出了压力 P、体积 V_m（一摩尔气体的体积）以及绝对温度 T 之间的互相依赖关系，R 是绝对气体常数，这三个变量中的每一个都可看成是因变量。必须考虑这些变量从物理学角度来看只能取正值。将 T 保持常数所得到的曲线称为*等温线*，它们大体上就象函数 $z=xy$ 在 x, y 为正值时所取的等高线。

一个更加复杂的例子是范得瓦（van der Waals）实际气体的*状态方程* $(P+a/V^2)(V-b)=RT$，这里 a 和 b 是取决于特定气体的两个常数。

具有 n 个自变量的实函数

下面考虑这类函数的一般特性以及同时考虑某些特殊的情形，但不进行系统的详尽的讨论。

定义域和函数表示法 如果定义域由一些有序的三个实数组组成，那末在几何上仍能够将它表示。一般可以看成是空间 x, y, z 坐标系中的一个区域，那末整个函数在几何上可以表示一种单值对应，它对于定义域中空间每一个点指派一特定的数。例如，这种函数在物理学中描述电场、磁场和重力场时会遇到。对于对应于空间点的那些数，要用到*位势*这个概念。具有相同位势的点构成了所谓的*等位面*，实质上它表示了和具有两个自变量函数的等高线相同的东西。

如果处理自变量多于三个的函数，那末在迄今为止所讨论的意义上对它进行几何表示——即能对函数有一直观的表示——就不再可能了。

对称函数 一具有 n 个自变量的实函数，如果自变量相互之间任意交换而不会改变函数，则称这种函数是对称的。最重要的是多项式和有理对称函数。一多项式函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，如果对变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的每一种排列 $\begin{pmatrix}x_1, & x_2, & \cdots, & x_n\\ x_{i1}, & x_{i2}, & \cdots, & x_{in}\end{pmatrix}$ 都有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=f(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}),$$

则称它是对称的。

多项式对称函数的例子：

1. $y=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 作为一个特例 $z=x+y$ 已讨论过了。

2. $y=x_1x_2\cdots x_n$, 例如已考虑过的函数 $z=xy$。

3. $y=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$。

4. $y=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$。

初等对称函数起着特殊的作用。这里列出了 $n=4$ 的全部函数:

初等对称函数	$\sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1+x_2+x_3+x_4$
	$\sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$
	$\sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$
	$\sigma_4(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1x_2x_3x_4$

根据韦达定理,这些初等函数加上一些符号可给出以 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 作为根的多项式的系数。例如,对于四个根为x_1, x_2, x_3 和 x_4 的多项式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有:

$$a=-\sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4);\quad b=+\sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4);$$

$$c=-\sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4);\quad d=+\sigma_4(x_1, x_2, x_3, x_4)。$$

对于初等对称函数,下列定理成立

每一个具有 n 个自变量的多项式对称函数都能表示为用初等对称函数 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 表示的多项式。

由于对它的证明需要相当复杂的解释,这里只给出一个简单的例子来代替证明。对称函数 $f(x_1, x_2)=x_1^2-x_1x_2+x_2^2$ 能表示为 $g(\sigma_1, \sigma_2)=\sigma_1^2-3\sigma_2$。用代入法就可证明: $\sigma_1^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$, $3\sigma_2=3x_1x_2$, 故 $\sigma_1^2-3\sigma_2=x_1^2-x_1x_2+x_2^2$。

对于有理函数也有相应的定理。

每一个有理对称函数能表示为两个多项式对称函数的商。

最后应注意,如对称函数能在几何上加以表示时,它们在几何上也呈现对称的特性。例如,已讨论过的 $z=x+y$ 和 $z=x+y$ 都以平面 $x=y$ 作为对称平面。

齐次函数 一具有 n 个变量的函数,当每个变量乘以 t 后,函数的值则乘以 t^m, 那末称这函数为 *m 次齐次函数*。也就是

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)=t^m f(x_1, x_2, \cdots, x_n)。$$

齐次*多项式*函数具有特殊的重要性,常称m次齐次多项式函数为m次形式。当 $m=2$ 时称为*二次形式*, $m=3$ 时称为*三次形式*。当 $m=1$ 时,这

种多项式称为线性形式。

齐次多项式函数的例子：

1. $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$。

2. $f(x, x_2)=x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2$。

3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1+x_2-x_3-x_4$。

对于齐次多项式有如下的定理：

非零齐次多项式的乘积还是齐次多项式，它的次数等于每个多项式次数之和。

从多项式的乘法规则可以马上证明这一定理。

齐次函数，特别是齐次多项式函数，在各数学分支中起着一定的作用。例如一 n 行 n 列的行列式是 $-n$ 次的齐次函数，具有 n^2 个自变量。象 $F(x, y)=Ax^2+Bxy+Cy^2$ 这类二次形式，即有两个自变量的二次齐次函数，在二次数域理论中用到。某些二次形式将在解析几何中以另一种观点来加以讨论。

第6章　百分数、利息和年金

6.1　百分数…………………… 232　　6.3　复利…………………… 235
6.2　单利…………………… 233　　6.4　年金…………………… 238

6.1　百分数

百分数和实际值　在日常生活的许多领域中都会碰到**百分数**这一概念。例如人们常说在某段时间内生产增长了百分之几，或者成本增加了百分之几，或者说男性和女性各占人口的百分之几。在所有这些例子中都进行了某种比较。例如取某一特定时间的产量或成本，或者人口的总数作为**参考值**，使它相当于100；被比较的数称为**实际值**，例如在另一时间的产量或成本，或者女性的人数，将它和100进行比较。这些分母为100的分数，其分子就称为百分数，记作%。如果 p 是百分数，a 是参考值，b 是实际值，那末 $b/a=p/100$ 或者 $p=100\cdot b/a$。

$\frac{\text{百分数}}{100}=\frac{\text{实际值}}{\text{参考值}}$	$\frac{p}{100}=\frac{b}{a}$

如果有两个容器，容积各为5加仑和10加仑，它们各装有3加仑和4加仑的液体，那末10加仑的容器所装的液体比5加仑容器所装的多。但按照它的容积，它没有得到充分的利用，即它的利用率为4:10，而5加仑的是3:5。如果相对于参考值100进行计算，则有

$$4/10=x_1/100$$

或 $x_1=4\cdot 100/10=40$，

而 $3/5=x_2/100$

或 $x_2=3\cdot 100/5=60$。

这样，10加仑容器的40%容积得到了利用，而5加

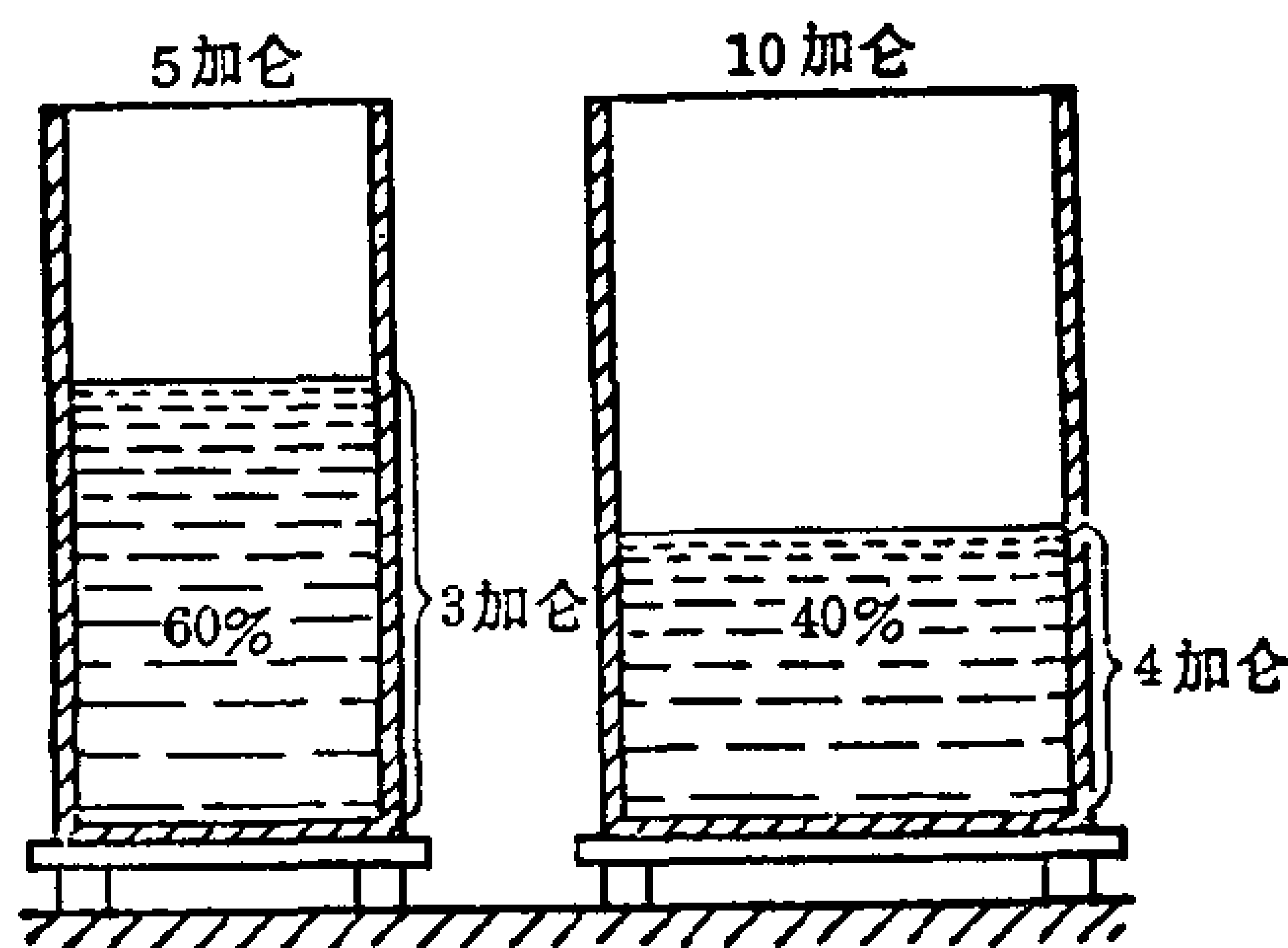


图6.1-1　容积的利用率

仑的容器利用了 60%（见图 6.1-1）。

【例 1】 一工厂 1500 人中有 300 个是女的，这样，平均 100 个中有 300/15=20 个女的。虽然这已很明显，这工厂的工人中有 20% 是女的，但这也可代入上面导出的公式来得到。参考值 $a=1500$，实际值 $b=300$，故百分数

$$p=300\cdot100/1500=20,$$

即工人中 20% 是女的(见图 6.1-2)。

【例 2】 含钛量为 4% 的合金钢现有 275 磅，问共含有多少磅钛？这里要求的是实际值 b。参考值 $a=275$，百分数 $p=4$，这样解上面的公式可求出实际值是 $b=p\cdot a/100$。对本例中的数字有 $b=4\cdot275/100=11$。这合金钢含有 11 磅的钛。

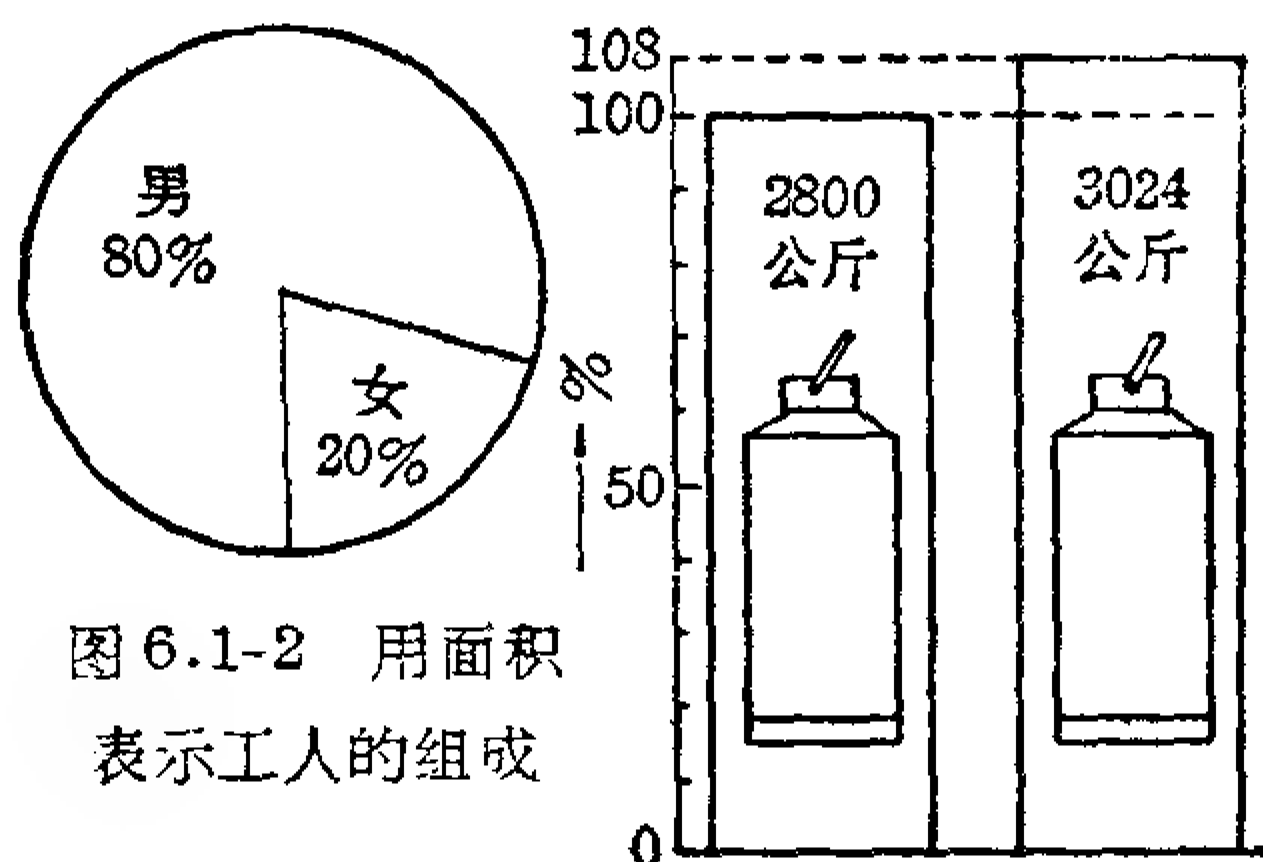


图 6.1-2 用面积表示工人的组成

图 6.1-3 牛奶产量的增长情况

【例 3】 每头奶牛原平均年产量为 2800 公斤，在一年中增加了 8%。从 $b=p\cdot a/100$ 可得 $b=8\cdot2800/100=224$。每头奶牛的牛奶产量增加了 224 公斤，可达 3024 公斤(见图 6.1-3)。

【例 4】 计划改善后，一季度运输砖块的费用减少了 4800 镑或者12%。这里参考值是未知的，但能从 $a=b\cdot100/p$ 计算出来：$a=4800\cdot100/12=40000$。以前的运输费为 40000 镑，现在是 35200 镑。

【例 5】 一年中制造了 3600 件产品，与上一年相比生产增加到了 120%，问上一年共生产了多少件？从实际值 $b=3600$ 和百分数 $p=120$，参考值 a 就能被计算出来。$a=3600\cdot100/120=3000$，上一年生产了 3000 件。

6.2 单利

在金融业中，通常对一笔贷款要给予一定的补偿，它取决于贷款总数的多少和时间的长短。这种补偿称为利息。例如，国家储蓄银行 1970 年付给公众的利息为全年存放金额总数的 3.5%（见图 6.2-1）。然而这些存款不是被搁置起来放在那儿的，相反银行用这些存款提供短期和长期的

信贷，例如去用于买进一批货物。对于这些贷款，银行本身获得了利息。

图 6.2-1　储蓄银行帐簿中的摘录

利率　一年中对于每一百镑的金额可获得 r 镑的利息，则称作**利息的百分率为** r。总数为 P 镑的一笔金额，或称作**本金**有 $P/100$ 个 100 镑。因此，一年的利息为 $(P/100)\cdot r$ 镑，n 年的利息为 I 镑，这里

$$I=P\cdot r\cdot n/100。$$

利息公式（年）	$I=\dfrac{P\cdot r\cdot n}{100}$	利息$=\dfrac{本金\cdot利率\cdot年数}{100}$

【例 1】　一笔抵押金额为 2000 镑，利率为 7%，5 年要付多少利息？已知本金为 2000 镑，利率 $r=7\%$，年数 $n=5$，根据利息公式有 $I=2000\cdot7\cdot5/100=700$ 镑。这笔抵押 5 年要付 700 镑的利息。

【例 2】　如果本金为 1200 镑，6 年内得利息为 576 镑，问利率是多少？在这个例子中，本金 $P=1200$ 镑，利息 $I=576$ 镑，年数 $n=6$ 是已知的。从利息公式可得到利率 $r=(100\cdot I)/(P\cdot n)$。用本例中的数字代入 $r=(100\cdot576)/(1200\cdot6)=8$，因此，利率为 8%。

利息公式	n 年	m 月	d 天
利　息	$I=\dfrac{P\cdot r\cdot n}{100}$	$I=\dfrac{P\cdot r\cdot m}{12\cdot100}$	$I=\dfrac{P\cdot r\cdot d}{365\cdot100}$
本　金	$p=\dfrac{100\cdot I}{r\cdot n}$	$p=\dfrac{1200\cdot I}{r\cdot m}$	$P=\dfrac{36500\cdot I}{r\cdot d}$
利　率	$r=\dfrac{100\cdot I}{P\cdot n}$	$r=\dfrac{1200\cdot I}{P\cdot m}$	$r=\dfrac{36500\cdot I}{P\cdot d}$
时　间	$n=\dfrac{100\cdot I}{P\cdot r}$	$m=\dfrac{1200\cdot I}{P\cdot r}$	$d=\dfrac{36500\cdot I}{P\cdot r}$

【例3】 本金为400镑，利率为9%和11%，问5个月付利息多少？对于9%的利率，$I=\frac{400\cdot9\cdot5}{12\cdot100}=15.0$。对于11%的利率，$I=\frac{400\cdot11\cdot5}{12\cdot100}=18.33$。因此，5个月内400镑本金对于9%的利率获得15.0镑的利息。对于11%，则为18.33镑。

6.3 复利

储蓄银行在年终时将增长的利息加到本金里去，因此在下一年对这利息也要计算利息。这种计算方法称为*复利*。对于年金和贷款的偿还也要计算复利。年金是按固定的时间间隔(例如一年)所付款子的总和。保险金额的偿付既按是否到了一规定的时间(例如养老金)，又按是否发生了某些特殊的情况（例如生病和事故赔偿)。本金 P_0 在一年内产生的利息为 $P_0\cdot r/100$(r 为利率)。

从第二年开始，获利息的本金将是

$$P_1=P_0+P_0\cdot(r/100)=P_0(1+r/100)=P_0R,$$

这里 $R=(1+r/100)$。

一年后增加了 $P_1\cdot r/100$，共有 $P_2=P_1+P_1(r/100)=P_1R=P_0R^2$。同理对于第三年，……，第 n 年也可进行类似的计算。在第 n 年的年终，本金 P_0 因复利增长到一笔总数，称它为**总额**。$P_n=P_0R^n$，这里 $R=(1+r/100)$ 称为**增长因子**。

复　利	$P_n=P_0R^n$

【例】 利率为6%，5年后本金从1500镑增长到2007.33镑。每一年的利息列于下表：

年　数	每年年初时的本金(镑)	年终时的利息(镑)	年终时的总额
1	1500.00	90.00	1590.00
2	1590.00	95.40	1685.40
3	1685.40	101.12	1786.52
4	1786.52	107.19	1893.71
5	1893.71	113.62	2007.33

利息因子

年　数 n	增长因子 R^n			贴现因子 V^n			年　数 n
	利率			利率			
	7%	9%	11%	7%	9%	11%	
1	1.07	1.09	1.11	0.9346	0.9174	0.9009	1
2	1.449	1.1881	1.2321	0.8734	0.8417	0.8116	2
3	1.2250	1.2950	1.3676	0.8163	0.7722	0.7312	3
4	1.3180	1.4116	1.5181	0.7629	0.7084	0.6587	4
5	1.4025	1.5386	1.6851	0.7130	0.6499	0.5935	5
6	1.5007	1.6771	1.8704	0.6663	0.5963	0.5346	6
7	1.6068	1.8280	2.0762	0.6227	0.5470	0.4817	7
8	1.7182	1.9926	2.3045	0.5820	0.5019	0.4339	8
9	1.8385	2.1719	2.5580	0.5439	0.4604	0.3909	9
10	1.9672	2.3674	2.8394	0.5083	0.4224	0.3522	10
11	2.1049	2.5804	3.1518	0.4751	0.3875	0.3173	11
12	2.2522	2.8127	3.4985	0.4440	0.3555	0.2858	12
13	2.4098	3.0658	3.8833	0.4150	0.3262	0.2575	13
14	2.5785	3.3417	4.3104	0.3878	0.2992	0.2320	14
15	2.7590	3.6425	4.7846	0.3624	0.2745	0.2090	15

复利表　为了计算总额 P_n 或现值 P_0，银行采用所谓复利表。表内对于各种利率 r 和不同的年份数 n 列出增长因子 R 的幂 R^n 及贴现因子 V 的幂 V^n。增长因子为 R 以及贴现因子为 V 的一笔款子 P_0，其增长和贴现可用一条时间直线来图示(见图 6.3-2)。

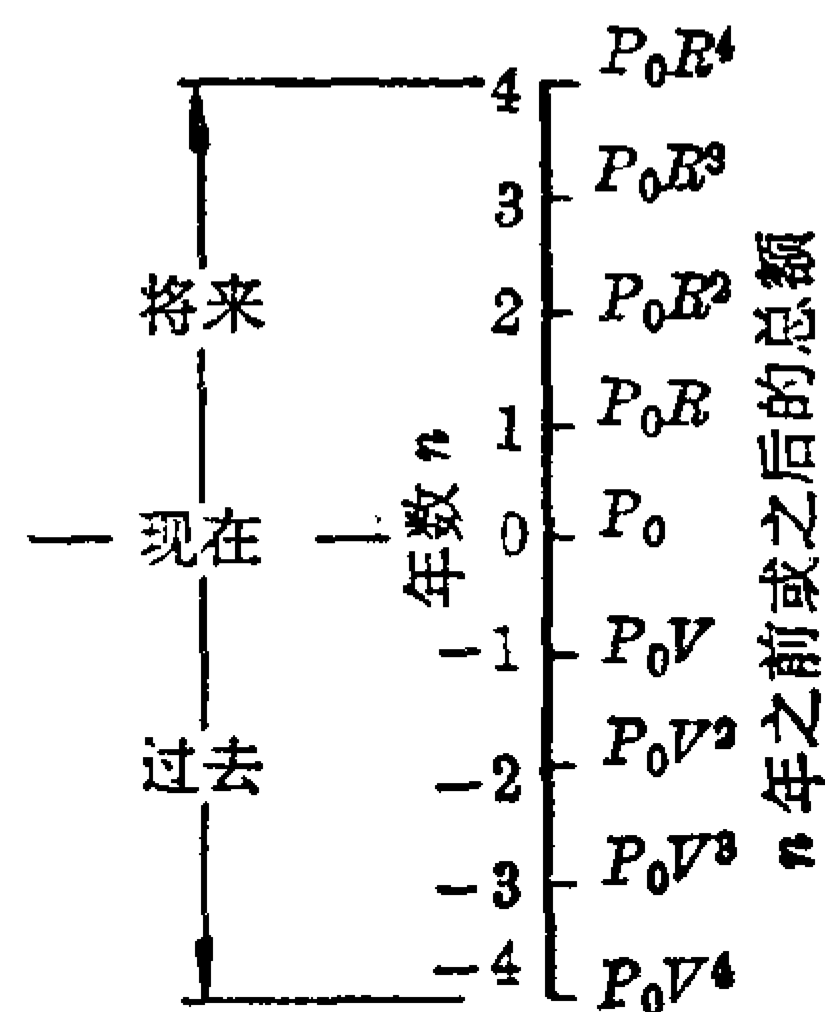


图 6.3-2　用一条时间直线来表示本金 P_0 的增长和贴现

【例】　如果在 10 年内，从 400 镑增长到 787 镑，问利率是多少?

本金 $P_0=400$，总额 $P_n=787$ 及年数 $n=10$ 是已知的。计算利率既可查复利表，也可用公式。如果用表，先计算出

$$R^{10}=787/400=1.9675。$$

从表内可查得 $r=7$。或用公式

$$r=100\cdot(\sqrt[10]{787/400}-1)=7。$$

6.4 年金

投资最重要的形式是年金，即在若干年内按预先规定的时间依次付款。其中按约分别应付的各笔款子(称为分期付款数)通常要到规定的每一段时间的末了才交付(称为滞后交付)，很少在一段时间的开始时交付(称为提前交付)。假定各期的付款一经交付就以 $r\%$ 的复利生利，那末年金的**总额**就是指各期付款(都在各段时间终了时交付)及利息的累计数。想最后一次获得这笔年金的总额，那末按在这段时期一开始就应付清的那笔款子，称为**现值**。

滞后交付的年金　每年年终付出分期款 b 并按复利计算。n 年以后，第一期付的款将有值 bR^{n-1}，第二期为 bR^{n-2}，等等，最后一期 b 刚刚交付。因此总额 s_n 是一几何级数的和：

$$s_n=b+bR+bR^2+\cdots+bR^{n-1}=b\sum_{i=0}^{R-1}R^i=b\,\frac{R^n-1}{R-1}。$$

滞后交付的年金总额	$s_n=b\cdot\dfrac{R^n-1}{R-1}$
滞后交付的年金现值	$a=\dfrac{b}{R^n}\cdot\dfrac{R^n-1}{R-1}$

滞后交付的年金 1500 镑，利率为 11%，5 年后的总额为：

$$s_5=1500\cdot(1.11^4+1.11^3+1.11^2+1.11^1+1)\text{镑}=9341.7\text{镑}。$$

为了计算现值 a，总额 s_5 必须被贴现到最初的时间。贴现因子 $V=1/1.11=0.9009$，可有 $a=s_5V^5=s_5\cdot0.5935=5544$。一般有

$$a=s_nV^n=[b(R^n-1)]/[R^n(R-1)]。$$

【例1】　每期 2000 镑的年金，滞后交付了共 11 年，问以 11% 的复利计算年金的总额为多少？增长因子 $R=1.11$，从利息因子表内可查得 $R^{11}=3.1518$。因此，$s_{11}=2000(3.1518-1)/(1.11-1)=39123.6$。在第 11 年的年终总额为 39123.6 镑。

【例2】　现值为多少才能保证例1中的年金？借助于利息因子表可有 $a=s_{11}\cdot V^{11}=39123.6\cdot0.3173=12414$。年金的现值为 12414 镑。

【例 3】 年金为 1000 镑，滞后交付。问以 10% 的复利计算经多少年后使总额达 18000 镑?

从公式 $s_n=b\cdot(R^n-1)/(R-1)$ 可得 $s_n(R-1)/b=R^n-1$，$R^n=s_n(R-1)/b+1$。因此 $n=\frac{\lg[s_n(R-1)/b+1]}{\lg R}$。由数值 $s_n=18000$，$b=1000$ 和 $R=1.11$，可有 $n=\lg 2.98/\lg 1.11\approx 10.463$。约经 11 年后可达这一总额。

提前交付的年金　对于提前交付的年金，每一笔分期付款将多获利一年。因此根据复利公式，年金的总额是滞后交付年金的 R 倍:

$$Rb\cdot\frac{R^n-1}{R-1}=\bar{s}_n。$$

提前交付的年金总　额	$\bar{s}_n=Rb\cdot\frac{R^n-1}{R-1}$

它的现值金额又可用将总额 $\bar{s}_n$ 贴现的方法得出:

$$\bar{a}=\bar{s}_nV^n=Rb\frac{R^n-1}{R-1}\cdot\frac{1}{R^n}=b\cdot\frac{1-V^n}{1-V}。$$

提前交付的年金现　值	$\bar{a}=\frac{b}{R^{n-1}}\cdot\frac{R^n-1}{R-1}$

【例 1】 数据同前一节中的例 1，但年金是提前交付的。总额

$$\bar{s}_{11}=2000\cdot 1.11\cdot(3.1518-1)/(1.11-1)=43427.2。$$

11 年后总额为 43427.2 镑。

【例 2】 例 1 中提前交付年金的现值金额为

$$\bar{a}=2000\cdot 0.3522\cdot(3.1518-1)/(1.11-1)=13779。$$

这样 13779 镑本利总和就是这笔年金。

【例 3】 数据同上面的例 3，但年金是提前交付的。

$$n=\frac{\lg[(18000\cdot 0.11)/(1000\cdot 1.11)+1]}{\lg 1.11}=9.81。$$

大约过了 10 年后，年金的总额可达到 18000 镑。

贷款的偿还　为了投资或建造新的建筑等的信用贷款或抵押的偿付，通常是这样的：每年付一笔固定的款子，称为**年度分期付款数**，一直到贷款付清为止。这包括两个部分：利息以及本金的偿还。从下面的偿

还表中可以看到一信贷为 10000 镑的偿还过程，信贷以 7% 的复利计算，年度付款额固定为 1000 镑。

年　份	年初的借款	每年偿还金额	付利息数	偿还本金数	年终的借款
1	10000.00	1000.00	700.00	300.00	9700.00
2	9700.00	1000.00	679.00	321.00	9379.00
3	9379.00	1000.00	656.53	343.47	9035.53
4	9035.53	1000.00	632.49	367.51	8668.02
5	8668.02	1000.00	606.76	393.24	8274.78
…	…	…	…	…	…

可以看出，随着贷款的不断偿还，所付的利息数逐渐减少，而本金的偿还数逐渐增加。

很明显，偿还表是根据下面的规则列出的：每年年终对借款 s 必须偿付的利息为 $s\cdot(r/100)$。因而付去利息后，每年的付款数 A 中剩下的就用来偿付本金：$T_1=A-s(r/100)$。在第二年的年终，对这笔减少了的借款所付的利息为 $s_1\cdot(r/100)$，其中 $s_1=s-T_1$。每年的付款数 A 中剩下 $T_2=A-s_1\cdot(r/100)=A-s\cdot(r/100)+T_1\cdot(r/100)=T_1+T_1\cdot(r/100)=T_1R$ 来付本金。还要偿还的总金额为 $s_2=s_1-T_2$。在第三年的年终，利息为 $s_2\cdot(r/100)$，偿还的本金为 $T_3=A-s_2(r/100)=A-s_1\cdot(r/100)+T_2\cdot(r/100)=T_2R$。在第 n 年的年终，偿还的本金为 $T_n=T_{n-1}R=T_{n-2}R^2=\cdots=T_1R^{n-1}$。在所举的例子中，第 11 年所付的本金为 $T_{11}=300\cdot1.07^{10}=590.16$ 镑。

前 n 年所付的本金的总数 s_n 相当于滞后交付年金 n 年后的总额，$s_n=T_1\cdot(R^n-1)/(R-1)$。在所举的例中，11 年后 $s_{11}=300\cdot(1.07^{11}-1)/(1.07-1)=4734.90$ 镑。当本金偿还的总数等于贷款时，就付清了贷款：$s_n=s$ 或 $T_1\cdot(R^n-1)/(R-1)=s$。

偿还公式	$s=T_1\cdot\dfrac{R^n-1}{R-1}$

从这公式可以计算出经多少年后可偿还清所贷的款子：

$$n=\frac{\lg[(s/T_1)(R-1)+1]}{\lg R}。$$

表 6.4-1 总死亡率表

整数年龄	男性					女性				
	100000个同时出生的人中		死亡几率	估计寿命(以年为单位)		100000个同时出生的人中		死亡几率	估计寿命(以年为单位)	
x	活着 l_x	死亡 d_x	q_x	对所有活着的人 $e_x l_x$	对每一个人 e_x	活着 l_x	死亡 d_x	q_x	对所有活着的人 $e_x l_x$	对每一个人 e_x
46	90859	332	0.003653149	2499889	27.51	93612	241	0.002579387	2926801	31.27
47	90527	345	0.003812489	2409196	26.61	93370	248	0.002660978	2883310	30.35
48	90182	447	0.004954396	2318841	25.71	93122	342	0.003672863	2740064	29.42
49	89736	632	0.007041835	2228882	24.84	92780	468	0.005044604	2647114	28.53
50	89104	801	0.008988733	2139462	24.01	92312	543	0.005883410	2554568	27.67
51	88303	849	0.009609744	2050759	23.22	91768	547	0.005959474	2462528	26.83
52	87454	807	0.009226817	1962881	22.45	91222	525	0.005753766	2371033	25.99
53	86647	795	0.009180458	1875830	21.65	90697	522	0.005758713	2280074	25.14
54	85852	870	0.010138656	1789581	20.85	90174	546	0.006059439	2189638	24.28
55	84981	990	0.011647731	1704164	20.05	89628	586	0.006536162	2099737	23.43

在所举的例子中，$n=17.79$，或四舍五入后为18。18年后可以偿清借款。

人寿保险　各种形式的人寿保险是应用复利和年金计算的另一个领域。其中要区分是*死亡保险*还是*意外伤害保险*；是*病弱年老保险*还是*捐助养老金*。在所有这些保险中，保险公司要与被保险的人签订合同，称为*保险合同*。由于被保险人的支付，可从中取出保险额和保险公司许诺的费用，这主要取决于保险的类型。必定存在一种均衡，使得保险合同不会使任何一方遭受损失。自然，这等价值不是对被保险的每一个人说的（否则的话，保险费似乎太多了），而是对被保险人的全体来说的。因此在有关均衡原则的数学公式中，除了复利和年金的计算外，某些*人口统计的假定*也起一定的作用。

死亡率表　在对上面起作用的人口统计中最重要的是死亡率表。这些表的制作部分是根据人口普查，部分是根据保险公司多年来的经验。它们从一确定的（但是任意选择的）人数l_n开始，这些人具有同样的年龄，即都是n岁。表中表明有多少人活到x岁，这个数用l_x表示，称为到x岁时*活着的人数*。另外，表中含有下列关系式：$l_x-l_{x+1}=d_x$，这是到x岁时死亡的人数，$p_x=l_{x+1}/l_x$是在x岁时存活的几率，$q_x=d_x/l_x$是在x岁时死亡的几率，而$e_x=(1/l_x)\sum_{k=0}^{\infty}l_{x+k}-1/2$是平均估计寿命。

表6.4-1是一典型的总死亡率表的一部分。从这个表中可以看到有100000个年龄相同的男性（比如都是50年以前生的），其中89104个还活着，他们中每一个人的平均估计寿命为24.01年。

第7章 平面几何

7.1 点、线、射线和线段········244
点和线························244
射线和线段··················245
平行线和正交线············246
7.2 角······························247
角的分类·····················248
角的测量单位··············248
相交直线之间的夹角······251
两条平行线和一条直线之间的夹角··············251
角的作法·····················253
7.3 对称···························254
轴对称························254
中心对称·····················255
基本作图法··················256
7.4 三角形························258
三角形的组成部分，三角形的分类··············258
三角形的一些基本性质···259
三角形的全等··············261
三角形的横截线和特异点························263
7.5 四边形························266
一般性质·····················266
平行四边形··················268
梯形···························269
风筝形和燕尾形···········270
7.6 多边形························271
一般多边形··················271
正凸n边形··················271
7.7 直线图形的测量···········275
面积测量·····················275
简单图形的测量···········275
直角三角形的面积定理···279
面积的变换··················281
7.8 相似···························282
相似的概念··················282
截距定理·····················283
相似定理·····················285
线段的分割··················286
7.9 圆······························287
一些名称·····················287
关于圆内的角的定理······288
关于圆的切线的定理······289
圆的一些计算··············291
关于弦、割线和切线的定理·························294
弦四边形和切线四边形···295
7.10 几何轨迹····················296
7.11 二次曲线的平面几何处理·····························299
椭圆···························299
双曲线························304
抛物线························306

平面几何是几何(希腊语,测地之意)中处理二维图形的那一部分。虽然我们是处在一个三维世界，但对于平面几何的研究可以加深我们对于周围事物某些特性的了解。

就象数这一概念是从客观世界中抽象出来一样，几何学中一些基本概念是经过许多世纪的抽象过程而获得的。忽视一些非本质的差别，例如质量、颜色、形态或表面纹理,又不考虑物体表面的不平整性,可得到具有三个维数(长、宽、高)的空间图形。从而我们说一立体具有三个维数，一平面具有两个维数,一条直线(例如两个平面相交的棱)只有一个维数。最后对于一个点,可看成是两条直线的交点,它具有的维数为零。

在平面几何中,总认为给定了一个平面。一般说来,几何问题的探讨都在这个平面内进行。但在个别情况下，为了有利于探讨也考虑将欧几里得(希腊数学家,约公元前 300 年)空间作为一个基本的几何体,它包含所给定的平面。

7.1　点、线、射线和线段

点和线

点和线（更精确些,应说成直线）是初等平面几何的基本概念。直观地说，一**直线**常定义为一点在平面上移动的路径,这点移动时，总是取它任意两点之间的**最短路径**,并且不改变方向。更严格一点的话，甚至不能给出线和点的定义。但在现代数学中，这两种几何体之间的关系是用公理给固定下来的(参见 **II**. 第 27 章)。

几条直线相交的交点数　平面中的两条直线最多只有一个公共点，除非它们互相重合（即，所有的点都是公共的)。平面中没有公共点的两条直线称为是**平行的**。

如果平面中三条直线没有一公共点，并且它们中没有两条直线是平行的或重合的,那末在这些线与线之间就只有三个交点。

四条直线中没有两条直线是重合的或平行的，以及没有三条直线有一个公共点,那末刚好有六个交点(参见完全四边形)。

如果平面中有 n 条直线,其中没有两条直线是重合或平行的,以及没有三条直线有一个公共点，那么每条直线和其它的直线有 $n-1$ 个交点。由于每个交点计算了两次,因此总的交点数为 $n(n-1)/2$。

通过几个点的直线数 通过任意两个点的直线只有一条。如果三个点不是共线的(即不在同一条直线上),那末有三条直线,每条线通过其中两点。这三个点或三条线中任意两条或者一条线和不在它上面的另一点完全决定了它们所在的这个**平面**。

如果平面中有 n 个点,其中没有三个点是共线的,那末每一点在通过其他$(n-1)$个点的每一条直线上。由于每条线计算了两次,因而可能有 $n(n-1)/2$ 条直线。这样,如果 $n=4$,可有六条直线(参见完全四边形)。

线束 通过平面中任意一点有无数条直线。平面中通过一点的所有直线的集合称为一**线束**。称所有直线的公共点为线束的**承载点**。用放在括号内的大写字母,例如(P)来表示承载点为 P 的线束。类似地,称平面中平行于一条给定直线的所有直线的集合为**平行线线束**。

如果一线束 (P) 或一平行线线束的直线和两条不属于该线束的直线 l_1 和 l_2 相交,那末线束的直线给出了 l_1 上所有的点到 l_2 上所有点的一种**透视映射**。

射线和线段

射线 一条射线(或半直线)只包含直线上在点 O 一侧的那些点,点 O 包括在这射线内。换句话说,射线所包含的直线上的那些点是从 O 点开始,沿着该直线向一特定的方向(不能反向!)移动所能达到的点。象所有数学概念一样,射线的概念也是通过抽象而得到的。如你想到太阳发出的光线,或一条视线(这是一条直的,并以观察者的眼睛为界的直线),那末就能比较直观地、比较容易地掌握这一概念(可以将太阳或眼睛看作一点)。

线段 一**线段**(或区间) AB 只包含了通过 A 和 B 的直线上的那些在 A、B 之间的点,A 和 B 本身包括在这线段内。线段是平面内连接两端点**最短的路径**。如果要强调方向,用符号 $\overrightarrow{AB}$ 来表示线段从 A 指向 B。为了避免使用那较麻烦的箭头符号,约定线段的方向是从用第一个字母命名的点指向第二个,即第一个命名的点是有向线段的始点,而第二个点是终点。又约定负号表示线段的相反方向,这样可以用 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ 代替 $\overrightarrow{AB}=\overleftarrow{BA}$。线段 AB 的长度 $|AB|$ 是 A 和 B 之间的**距离**,它是用与另一线段(称为**单位线段**)相比较的方法来测量。单位线段的长度用作测量长度的单位。

长度单位。长度的基本单位是米。现在定义它为氪同位素86光谱中橙线波长的1650763.73倍，测量在真空中进行。

有两个为米的倍数的单位：**十米**(1 dm=10米)和**百米**(1 hm=100米)，它们一般没有多大用处。

从米导出的长度单位

单位	符　号	关　系
兆兆米	Tm	1 Tm $=10^{12}$ 米
千兆米	Gm	1 Gm $=10^{9}$ 米
兆米	Mm	1 Mm $=10^{6}$ 米
千米	km	1 km $=10^{3}$ 米
分米	dm	1 dm $=10^{-1}$ 米
厘米	cm	1 cm $=10^{-2}$ 米
毫米	mm	1 mm $=10^{-3}$ 米
微米	μm	1 μm $=10^{-6}$ 米
毫微米	nm	1 nm $=10^{-9}$ 米
微微米	pm	1 pm $=10^{-12}$ 米
毫微微米	fm	1 fm $=10^{-15}$ 米
微微微米	am	1 am $=10^{-18}$ 米

英美制

英寸　1英寸$=1''=0.0254$米；

英尺　1英尺$=1'=12''=0.3048$米；

码　　1码$=3'=0.9144$米；

英里　1法定英里$=1\text{mi}=5280'=1609.344$米；

　　　1英制海里$=6080'=1853.181$米$=1$子午线分；

　　　1美制海里$=1852$米；

1米$\approx 6.215\cdot 10^{-4}$法定英里$=1.094$码$=3.281'=39.37''$；

1千米≈ 0.6215法定英里。

平行线和正交线

平行线　两条平行的直线没有公共点。如果一直线 l 和另一条直线

l' 平行(记作：$l \parallel l'$)，那末 l 和 l' 的方向相同。将 l 上所有的点移过一等于 $\overrightarrow{PP'}$ 的线段(称这样一种变换为**平移**)，就可从 l 得到 l'。这就是用直尺和三角板作平行线的基本原理(见图 7.1-1)。如果将直线 l 上的一点和平行线 l' 上所有的点用直线段连接起来，那末在这些直线段中有一条最短的线段，这线段的长度就定义了两条平行线之间的距离。**不管在 l 上选择哪一点，结果都是一样的。**换句话说，平行线之间不会比这线段靠得更近，也不会离得更远。

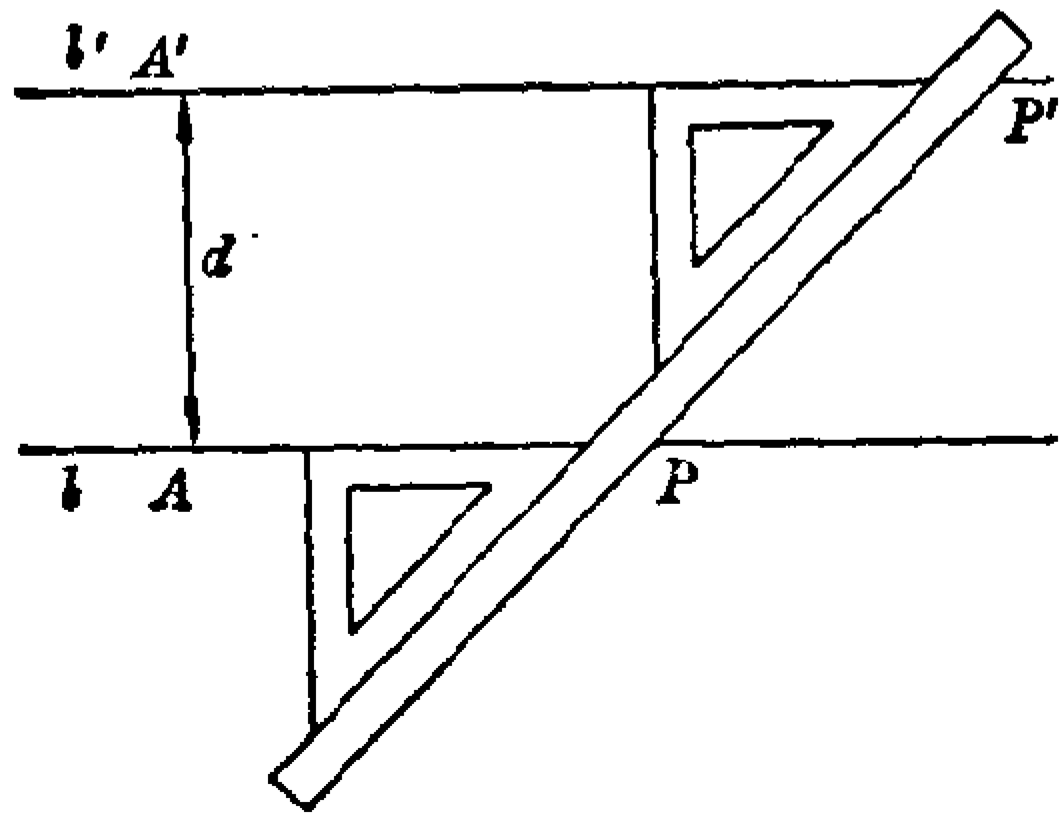


图 7.1-1 用平移的方法作出与 l 的距离为 d 的平行线 l'

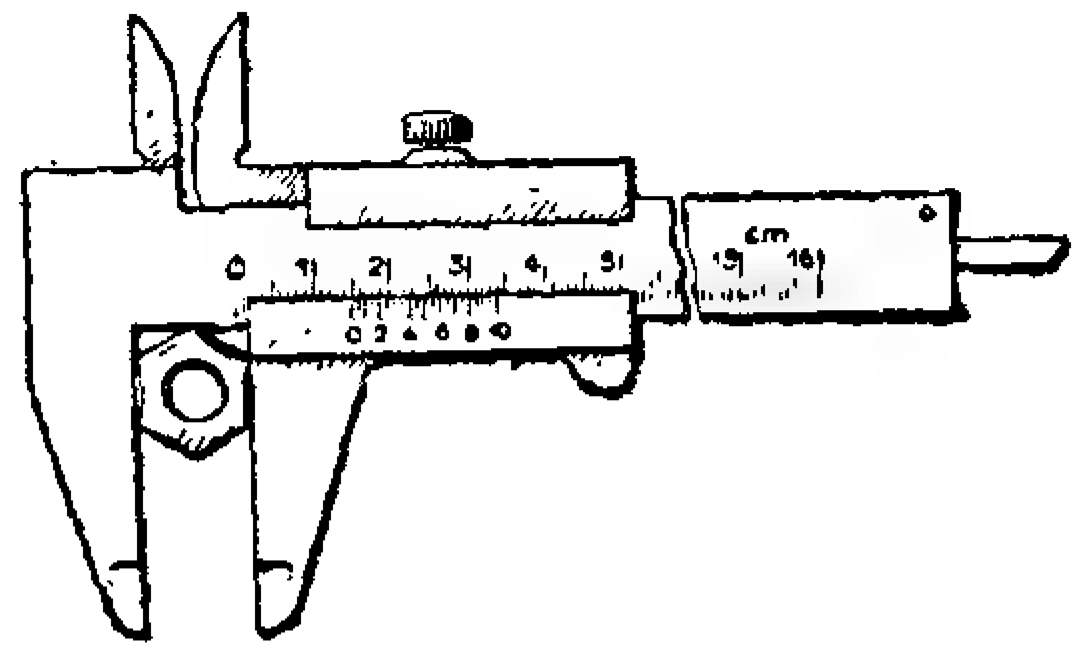


图 7.1-2 测量工件两平行面之间的距离(宽度)

铁路线上两条平行铁轨的标准距离(轨距)是 1.435 米($56^1/_2$ 英寸)；在苏联是 1.524 米，在西班牙和葡萄牙是 1.670 米。卡尺的两个平行刀口可以移动，来测量具有平行边物体的宽度(见图 7.1-2)。

对于一给定的距离 d，在每条直线的每一边只能有一条**平行线**。用直尺和三角板作平行线的方法如图所示(见图 7.1-1)。如果 l 是一条直线，P' 是不在 l 上的一点，那末过 P' 点只有一条平行于 l 的线 l'，它在通过 P' 和 l 的平面内。这种关于过 P' 点有一条而且只有一条平行线的说法称为欧几里得几何的**平行公理**(或**公设**)。

正交线 平行线 l 和 l' 的距离用线段 AA' 来测量。这线段和 l 相交于 A，和 l' 相交于 A'，并和它们成一对相等的角，这两只角称为**直角**。**正交线**就是指相交成直角的线，也称它们互相**垂直**。正交性和平行性是两条直线之间相互关系的性质，而这些线不一定是垂直或水平的。

7.2 角

具有同一始点 S 的两条射线 a, b，绕 S 点旋转后能重合起来，这种

旋转就决定了 a 和 b 之间的角[记作 $\measuredangle(a, b)$ 或 (a, b)]。

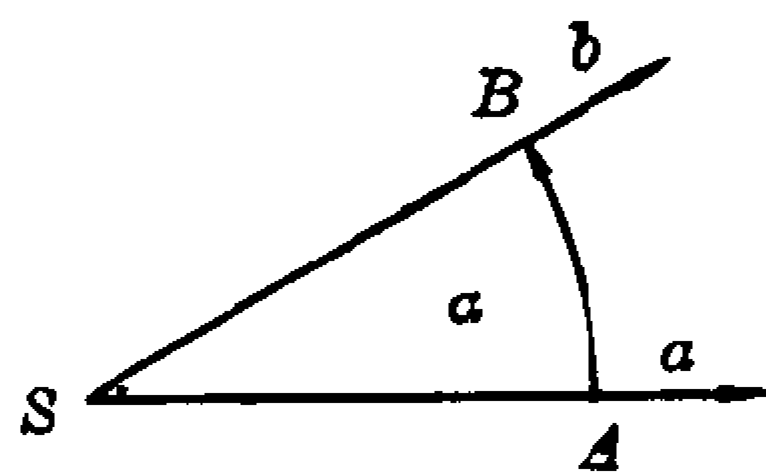


图 7.2-1　角的定义

用固定旋转的方向来给出平面的方向。在数学中，对应于反时针的旋转作为正的方向。在测量学中，顺时针旋转的方向作为正的方向。如果旋转的方向被认为是重要的，则必须对 $\measuredangle(a, b)$ 和 $\measuredangle(b, a)$ 加以区分：$\measuredangle(a, b) = -\measuredangle(b, a)$。如果 A 是 a 上的一点，B 是 b 上的一点，$\measuredangle(a, b)$ 通常写成 $\measuredangle ASB$，S 称为角的**顶点**，射线称为它的**边**。每条边指明了一特定的方向，角就是在有向平面内测得它们这两方向的差（见图 7.2-1)。

角的分类

角是根据它两条边方向差的多少来分类的。如果角所对应的旋转是一个圆的四分之一，则称这角是**直角**。一**平角**所对应的旋转是半个圆。如果两条边的倾角小于一个直角，则这角称为**锐角**。如果这倾角大于直角而小于平角，则这角称为**钝角**。如果倾角大于一平角，这角称为**优角**。两条边重合的优角称为周角。

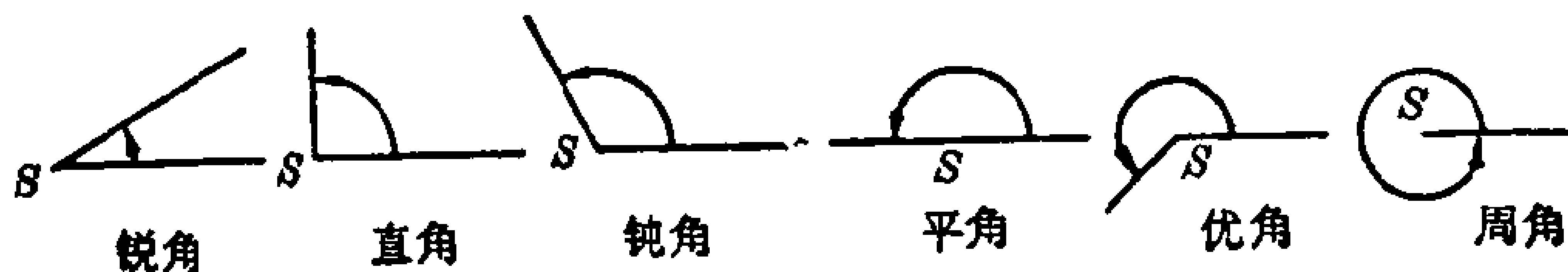


图 7.2-2　各种角的名称

角的测量单位

所有测量角的方法都是以圆的等分为基础的(见图 7.2-3)。有两种测量单位，它们分别基于度数的测量和弧长的测量。

度数　如果用一些半径将一个圆分成 360 等分，那末相邻两条半径之间的夹角称为一度(记作 $1°$)。这样，一度是周角的三百六十分之一，或是直角的九十分之一。一度又可分成 60 分（记作 $1'$），一分又可分成 60 秒(记作 $1''$)，虽然度以下单位的名称和小时下面单位的名称相同，但应采用不同的记号来区分角度的单位和时间的单位。

$1° = 60' = 3600''$; 1 小时(h) = 60 分(min) = 3600 秒(s)

也有一种新的角度制，它把圆分成 400 等分，把直角分成 100 等分，每一等分称为一新度或一级(记作 1^g)。它分成 100 新分(记作 1^c)，每一新分又分成 100 新秒(记作 1^{cc})。

$$1^g = 100^c = 10000^{cc}$$

对于一直角有：1 直角 $= 90° = 5400' = 324000''$；1 直角 $= 100^g = 10000^c = 1000000^{cc}$。在测量学中习惯上使用度数，但将它按十进制等分。

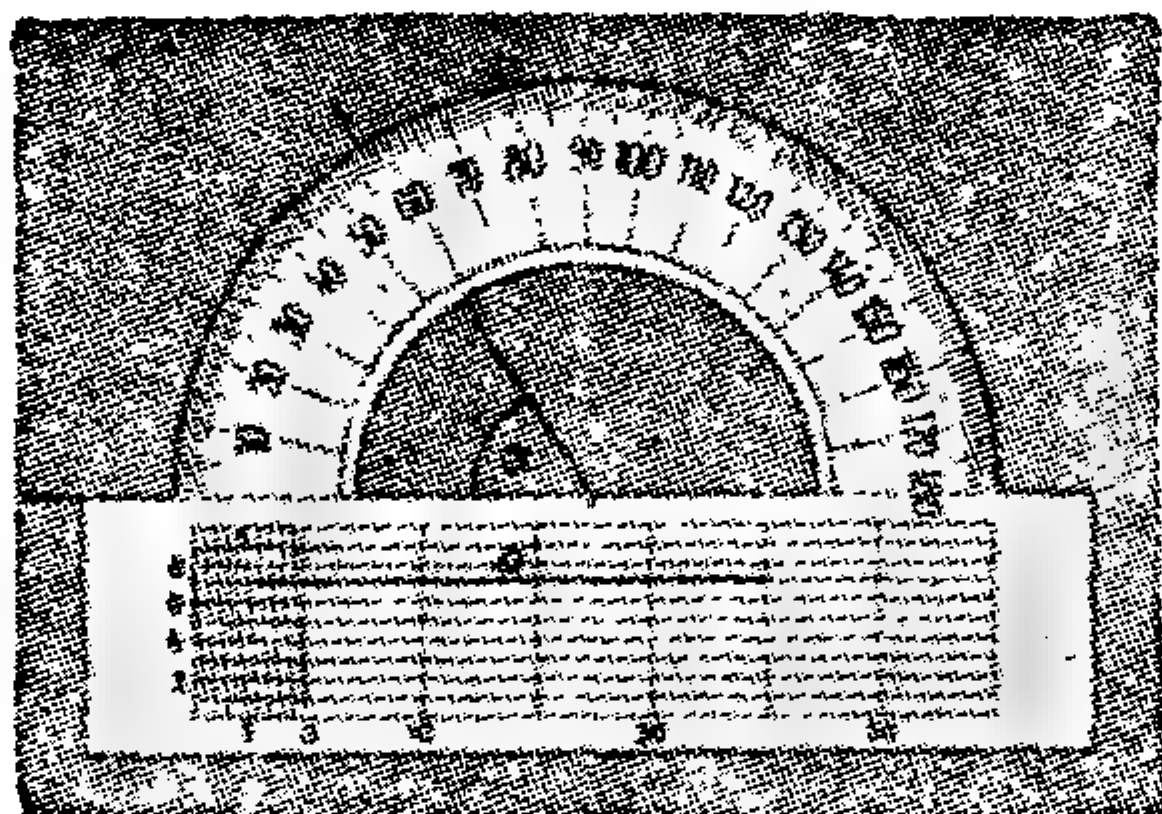


图 7.2-3 具有线性刻度的量角器
$\alpha = 57°$，$a = 43.7$ mm

【例 1】 将 $62°48'15''$ 化为新度。

$$48' = 48°/60 = 0.8°$$

$$15'' = 15°/3600 = 0.004167°$$

$$\begin{aligned} 62°48'15'' &= 62.804167° \\ &\triangleq 62.804167 \cdot 100^g/90 \\ &= 69.7824^g \\ &\approx 69^g78^c24^{cc}。\end{aligned}$$

【例 2】 将 $135^g46^c82^{cc}$ 化为度、分、秒。

$$\begin{aligned} 135^g46^c82^{cc} &= 100^g + 35.4682^g \triangleq 90° + 35.4682 \cdot 90°/100 \\ &= 121.92138° \end{aligned}$$

$$0.92138° = 0.92138 \cdot 60' = 55.2828'$$

$$0.2828' = 0.2828 \cdot 60'' = 16.968''$$

$$135^g46^c82^{cc} \approx 121°55'17''。$$

一些等式

$90° \triangleq 100^g$	$100^g = 90°$
$1° \triangleq 10^g/9 \approx 1.111111\cdots^g$	$1^g \triangleq 9°/10 = 54'$
$1' \triangleq 1/60 \cdot 10^g/9 \approx 0.018519^g$	$1^c \triangleq 54'/100 = 32.4''$
$1'' \triangleq 1/3600 \cdot 10^g/9 \approx 0.000309^g$	$1^{cc} = 324''/1000 = 0.324''$

弧长 在一个圆内，两条半径之间的弧长 a 正比于它们之间的角度和它们的长度，下面的比例式成立：

圆周长:弧长=周角:圆心角	$2\pi r : a = 360° : \alpha°$

由此可得出弧长和半径之比取决于该弧所对的圆心角。

$$a : r = [\alpha \cdot 1°/(360 \cdot 1°)] \cdot 2\pi$$
$$= (\alpha/360) \cdot 2\pi$$
$$= 2\pi\alpha/360$$
$$= (\pi/180) \cdot \alpha。$$

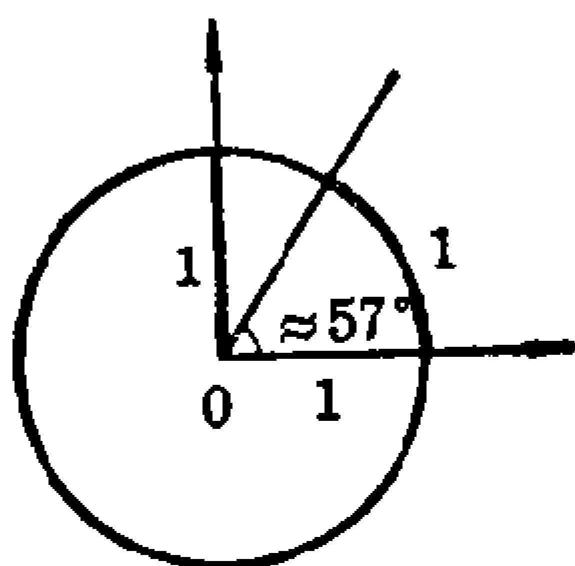


图 7.2-4 1 弧度是弧度测量的单位

于是，如果圆的半径是已知的话，可以用圆周上的弧长来测量所对的圆心角。因此一角的弧度定义为商：

$$a/r = [\alpha \cdot 1°/(180 \cdot 1°)] \cdot \pi$$
$$= (\pi/180)\alpha - \widehat{\alpha} = \text{arc}\,\alpha。$$

这种测量的单位称为一个**弧度**(1 rad)。一个弧度就是长为圆的半径的弧所对的圆心角。

$1 \text{ rad} = 57.29578° = 57°17'44.8'' \approx 57°17'45''$(见图 7.2-4)。

$a : r = [\alpha \cdot 1°/(180 \cdot 1°)]\pi = \widehat{\alpha} = \text{arc}\,\alpha$	$\alpha° = \widehat{\alpha} \cdot 180°/\pi$

$1 \text{ rad} \triangleq 57°17'45'' \triangleq 63.6620^g$
$1^c \triangleq (\pi/180) \text{rad} \approx 0.017453 \text{ rad}$
$1^g \triangleq (\pi/200) \text{rad} \approx 0.0157076 \text{ rad}$

单位圆是指半径为 1 个长度单位的圆。这样，对于单位圆，一个角的弧度就等于圆周上所对应的弧的长度。

角及其度量的概况

	锐		角	直角	钝角	平角	优角	周角
度	30°	45°	57°17′45″	90°		180°	270°	360°
新度	$33^1/_3{}^g$	50^g	63.6620^g	100^g		200^g	300^g	400^g
弧度	$\pi/6$	$\pi/4$	1	$\pi/2$		π	$3\pi/2$	2π

相交直线之间的夹角

平面上的两条相交直线组成四个角，分为邻角和对顶角两种。

邻角 两相交直线之间的夹角中，有一公共顶点 S 和一条公共边的两角称为邻角。另外两条边是沿着其中一条直线、从 S 出发方向相反的两条射线，因此这两个角组成一个平角。例如，在图中我们有

$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\delta=\delta+\alpha=180^\circ。$$

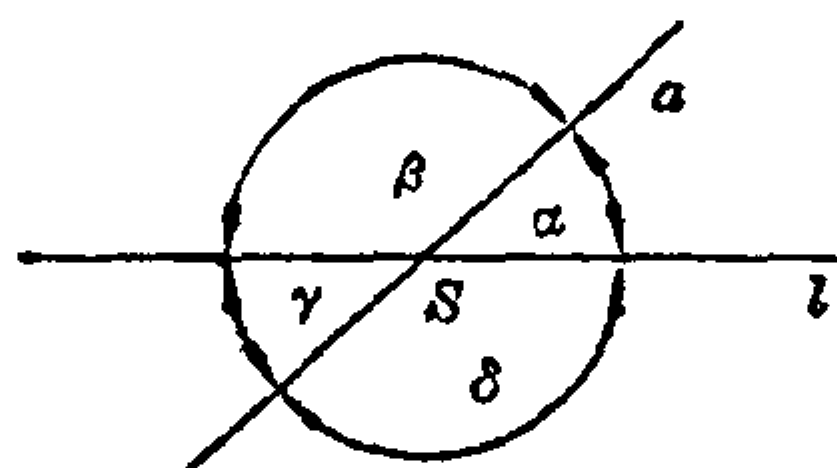


图 7.2-5 邻角，例如 α 和 β；对顶角，例如 α 和 γ

两个邻角(例如 α 和 β)不一定要相等。如果它们相等，那末每一只角一定是 180° 的一半，即是一个直角。在定义正交线时已提到过，它是下面这个定义的基础。

两条直线相交后，若它们之间的邻角相等，那末四个角中任意一个角是直角。

若任意两个角之和为 180°，不管它们相邻与否，则称它们是互补的。称和为 90° 的两个角是互余的。邻角一定是互补的，但互补的角只是在它们有一公共的边时才是邻角。

对顶角 相交直线之间有一公共顶点而无公共边的两个角称为对顶角，不怕引起混淆的话或者就简单地称为对角。由于两个对顶角没有公共边，一个角的两条边的方向一定和另一角的相反。图 7.2-5 中 α 和 γ，β 和 δ 都是对顶角。

对顶角相等，这是因为每一个角与一个公共的邻角之和都等于180°。

两条平行线和一条直线之间的夹角

如果一对平行线和第三条直线相交（见图 7.2-6），它们共组成八个

角，可分成两组，每组有四个相等的角。例如，

$$\alpha=\gamma=\alpha'=\gamma', \quad \beta=\delta=\beta'=\delta'。$$

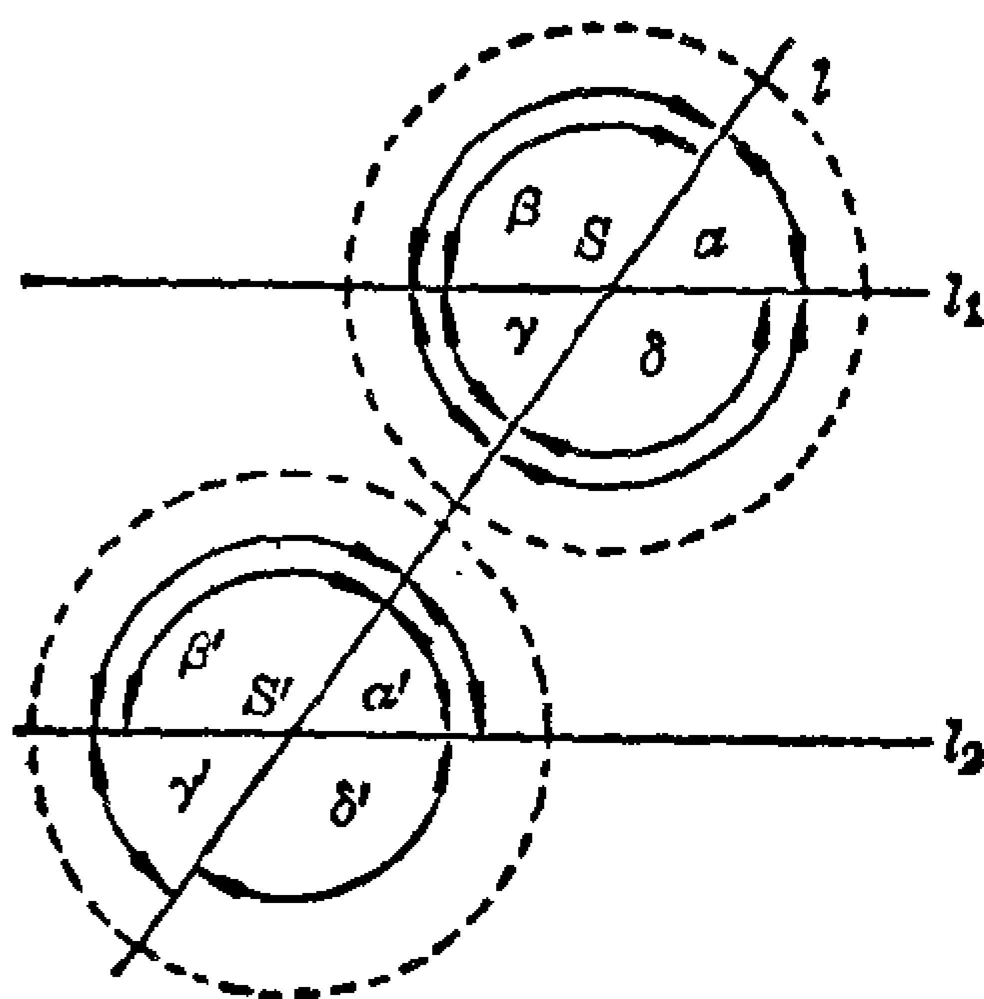


图 7.2-6　平行线和截线之间的夹角

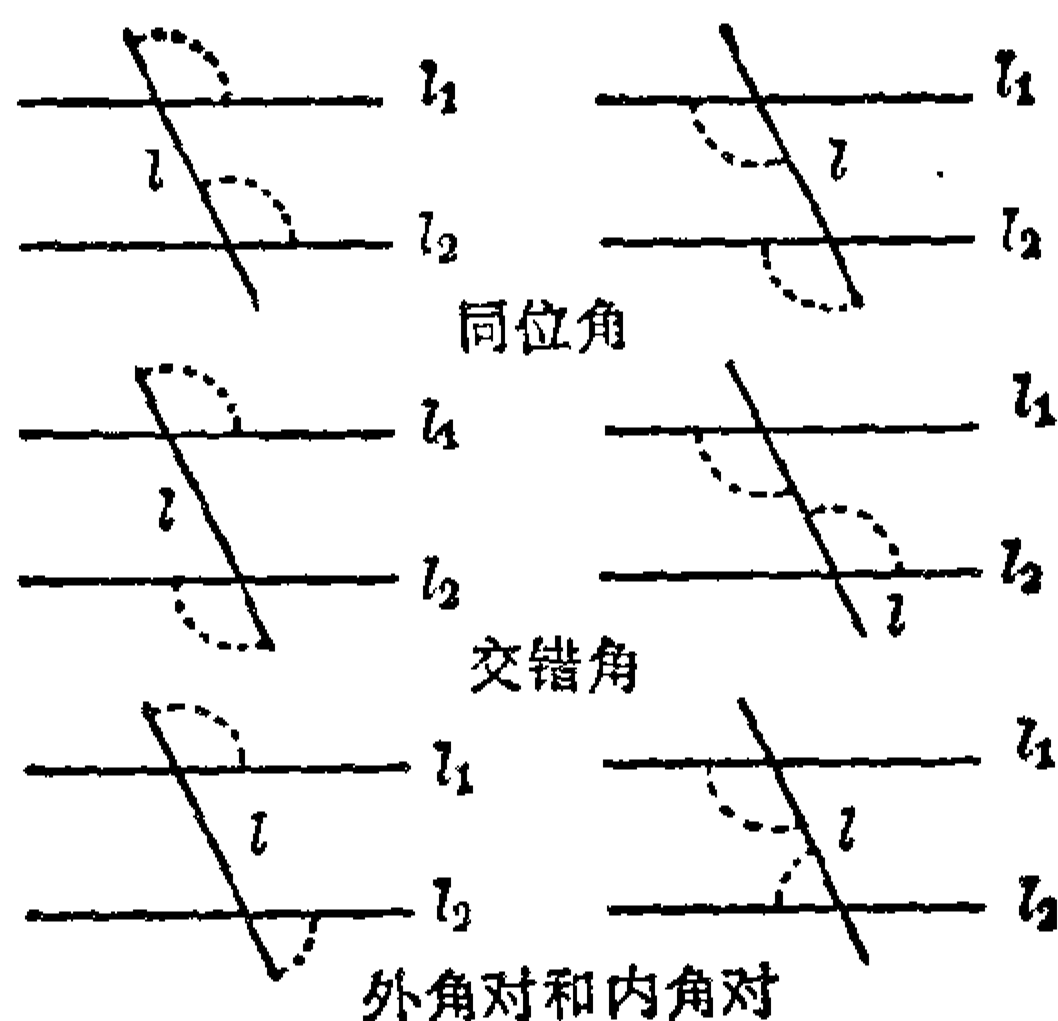


图 7.2-7　平行线和交线之间夹角的举例

有一公共顶点的那几对角要末是对顶角要末是邻角。如果它们的边方向相反，则是**对顶角**。例如 $\alpha=\gamma$，或 $\beta'=\delta'$。如果它们有一公共边，而它们的另一边方向相反，则是**邻角**。例如 $\alpha+\beta=180°$ 或 $\gamma+\delta=180°$。

顶点不同的那几对角可分成以下几类(见图 7.2-7)。

1. **同位角**：一个角的两条边的方向和另一个角的相同，如 $\alpha=\alpha'$，或 $\gamma=\gamma'$。

2. **交错角**：一只角两条边的方向和另一只角的相反，如 $\alpha=\gamma'$，或 $\gamma=\alpha'$。

3. **内角和外角**：它们的边在平行线上方向相同，而在相交直线上方向相反。如果这些边包含了平行线之间的线段，那末这两角是内角，否则称为外角。例如 $\alpha+\delta'=180°$，是外角；$\gamma+\beta'=180°$，是内角。

如果两条平行线和第三条直线相交，那末同位角相等，交错角相等，内角或外角互补。

这些定理有逆定理：若两条直线和第三条相交，如果同位角或交错角相等，或者内角或外角互补，则这两条直线平行。

即使对于不平行的两条直线，其角的相对位置也可有三种类型。于是定义交错角是在相交直线的两侧，并且两角或者都在这两直线之间，或

者都在两直线之外。其他类型的角都在相交直线的同一侧。外角都在这两直线之外，内角则在它们之间。同位角中的一个角在两条直线之内，另一个在两直线之外。

角的作法

三角板 通常三角板有一只直角和两只 45° 的角，或者一只是 60° 角、另一只是 30° 角。将这些角相加或相减，可作出其他一些角（见图 7.2-8)。用直尺(或三角板)和圆规作角平分线，可以得到另外一些角如 22.5°, 15°, 7.5° 等等。将这些角相加或相减又可得到别的一些角。在进行角的相加或相减时，有时要将已作好的角移动位置。下一段讨论实现这种移动的一种方法。

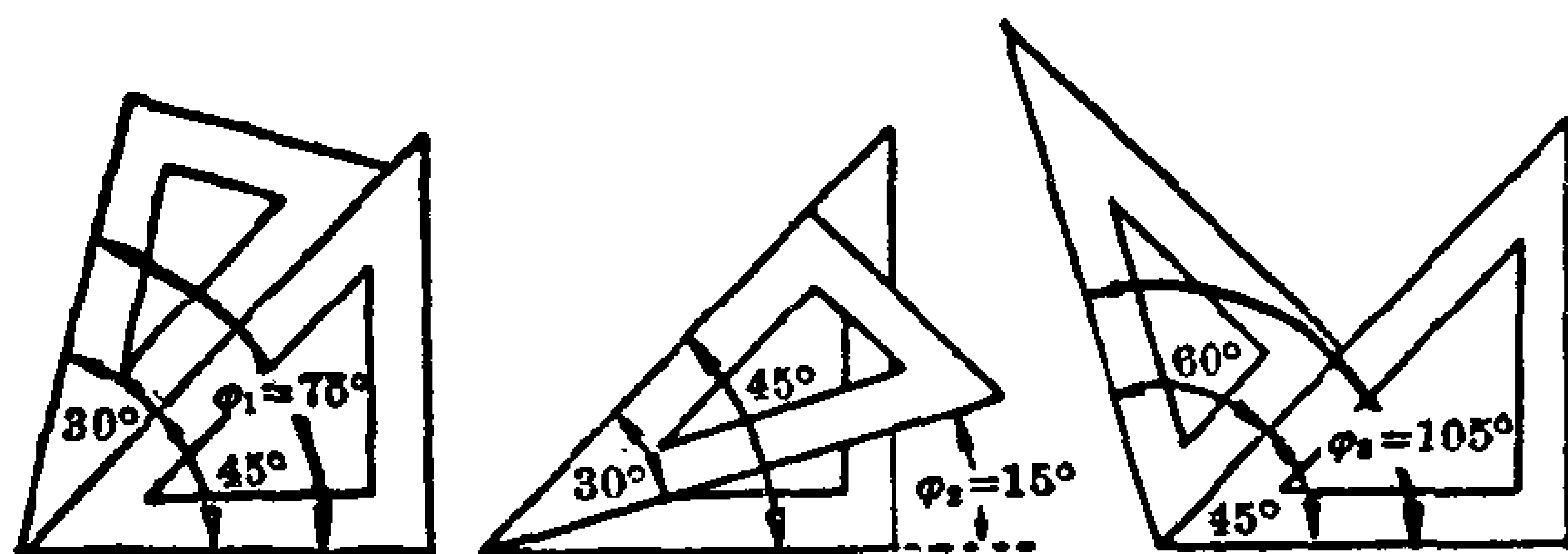


图 7.2-8 用三角板作出一些特殊的角:
$\varphi_1=75°$, $\varphi_2=15°$, $\varphi_3=105°$

角的贴合 单单用直尺和圆规，总是能够在另一不同的位置作出一角，使它等于给定的一只角。例如，假定要将一角 α 贴合到有向直线 g 上顶点 P 处(见图 7.2-9)。作图时，先以(g 上的) P 点和 α 的顶点 S 为圆心作两半径相同的圆。圆和 α 的两边相交于 A 和 B 以及和直线 g 相交于 A'。以 A' 为圆心，以 $|AB|$ 为半径的圆弧和圆相交于 B' 点。从 P 点到 B' 的射线就是被贴合到直线 g 上 P 处的 α 角的另一边。如果 α 不是用图形给出，而是测量出来的，例如 $\alpha=52°$，这时就要用量角器来作图了。

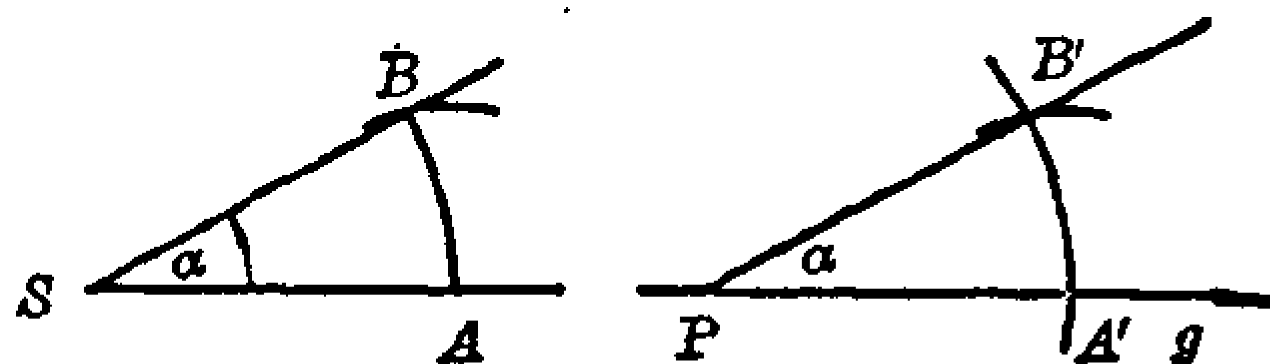


图 7.2-9 角的贴合

用直尺和圆规作角 用直尺和圆规只能作一些特殊的角。其中

120°, 90°, 72° 这几个角是通过用直尺和圆规作出等边三角形，正方形和正五边形后得到的(参见正凸n边形)。继续将这些角平分可得60°, 30°, 15°, 45°, 36°, 18°和9°(只举了些度数为整数的角)。将15°和9°相加可得24°，然后有12°, 6°和3°。这样用直尺和圆规可以作出所有3°的倍角。事实上，能够作出的度数为整数的角就是这些。

7.3 对称

轴对称

每一个平面E都可以被E中的任何一条直线s分成两半(见图7.3-1)。如果绕s在空中旋转180°，每半个平面映射到另外半个平面上。轴s的每一个点S是它自身的象，$S=S'$，这轴是一条固定的直线。此外，任意一条直线AS和s的夹角等于它的象$A'S$和s的夹角，AS和$A'S$的长度相等。连接一点和它的象的直线AA'垂直于s，并且被s平分。每一个图形F和它的象F'是全等的。

这个半平面在一垂直于E并与它在s处相交的镜子中**反射**，其效果与刚才讨论的相同。因此称F和它的象F'互为**镜象或反射**，而称这种映射为对一直线的反射。然而专门术语叫**轴对称**，它是一种几何映射或变换，由任意一点P和它的象P'(如果和P点不同)或者由对称轴s唯一决定了的。

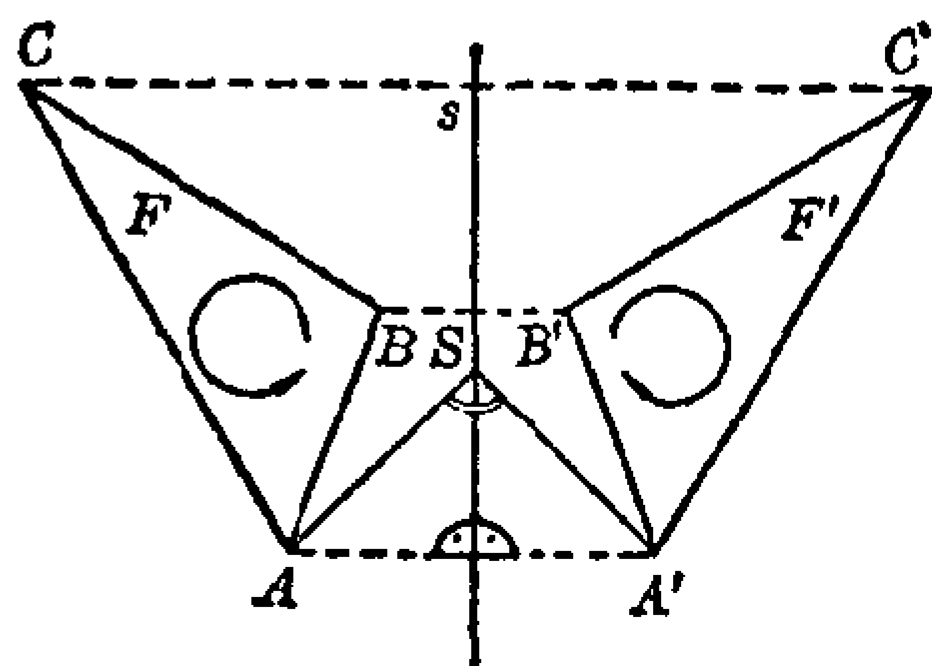


图7.3-1　轴对称

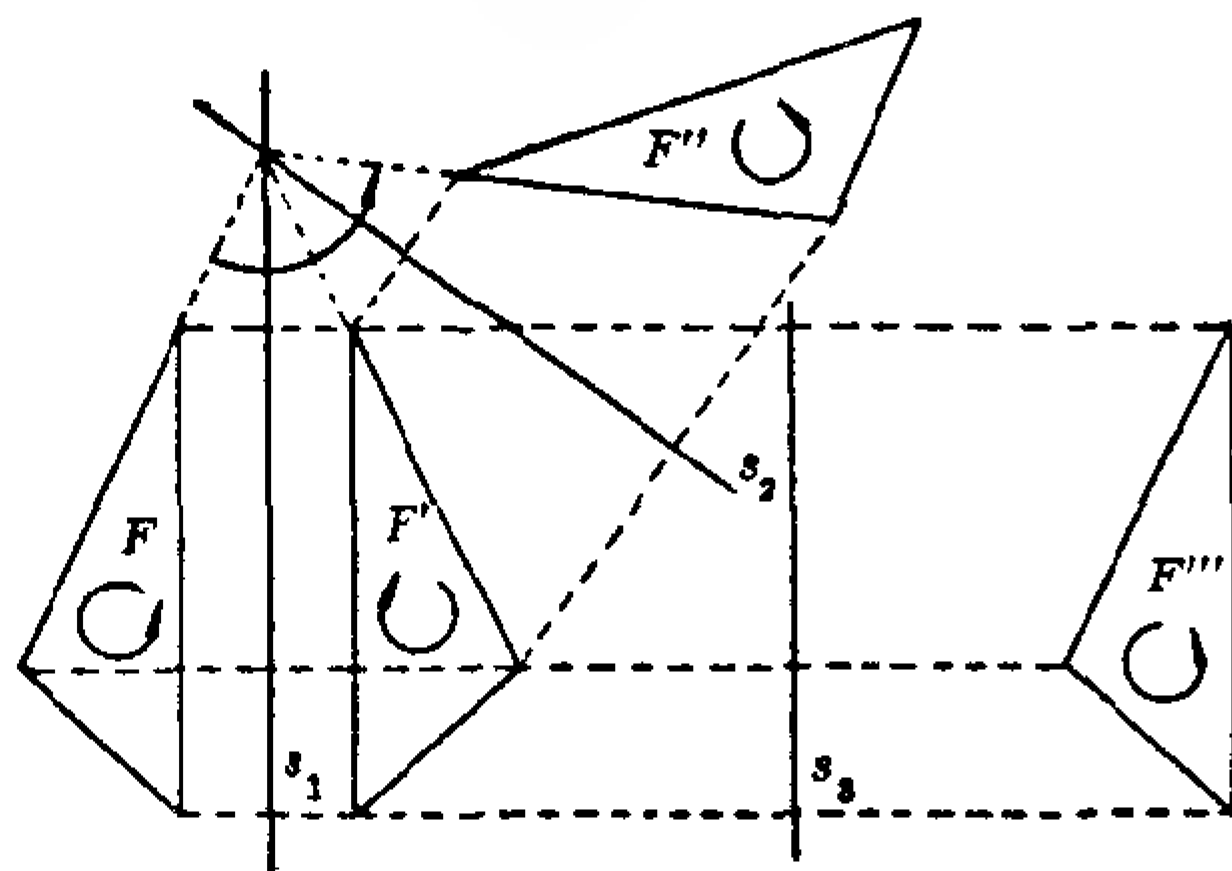


图7.3-2　二次反射可用一平移或旋转来代替

如果给定了P和P'，利用$|PS_i|=|P'S_i|$可找到对称轴上的点S_i。以P和P'为圆心画半径相等的两个圆，使它们相交，交点就是S_i。另

一方面，如果给定了 s，那末任意一点 P 的象 P' 到 s 的距离和 P 到 s 的距离相等，并且 PP' 垂直于 s。

在图中，虽然 F 的镜象 F' 关于 s_1 轴与 F 是全等的，但如果 E 是定向的，那末 F' 和 F 的方向相反。F' 关于另外两轴 s_2 和 s_3 的镜象 F'' 及 F''' 和 F 的方向相同。平面作任意的变换，F 和 F' 的方向总是相反，而 F 和 F''、F 和 F''' 总是全等，并且方向相同。特别是，如果 $s_1 \parallel s_3$，那末 F''' 可以通过 F 的平移来得到。如果 s_1 和 s_2 相交，那末 F'' 可通过平面的旋转从 F 得到。

轴对称图形　如果一图形的某些线段或点在被选作对称轴的直线 s 上，那末图形和它的镜象一起组成一个轴对称图形，即是一由互相对称的两部分组成的图形(见图 7.3-3)。

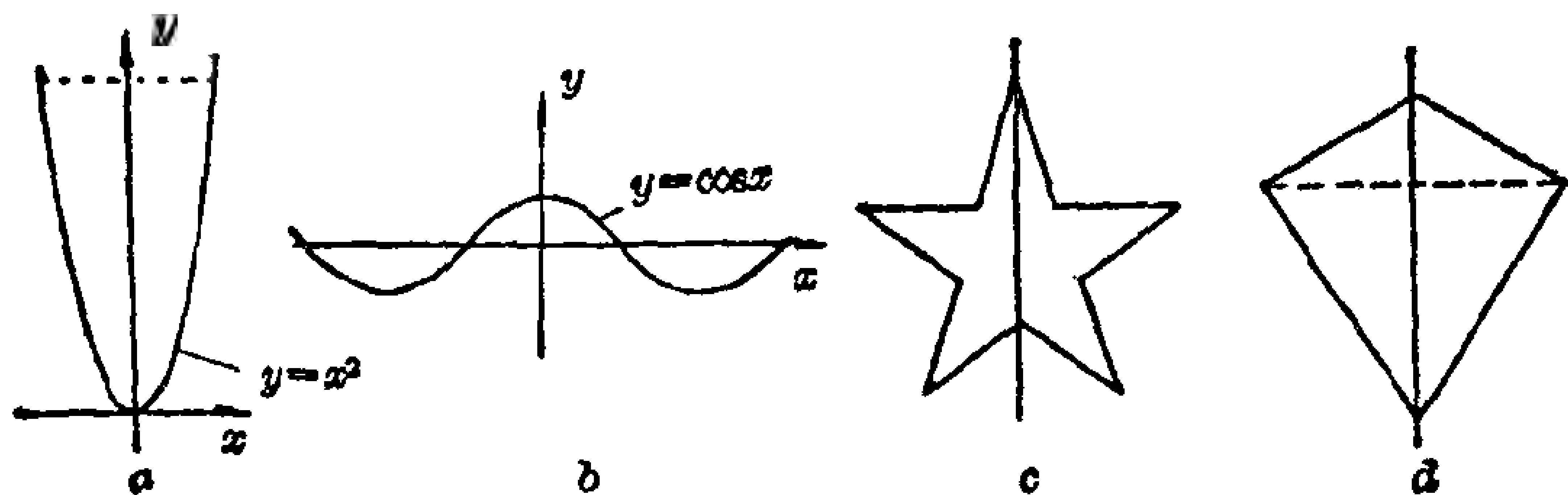


图 7.3-3　一些轴对称图形

中心对称

除了可将平面在空间中旋转 180° 外，也可以一点为中心在平面内旋转 180°。如用这种方法可使两个图形重合的话，则称这两个图形互为**中心对称**，称这点为**对称中心**(见图 7.3-4)。

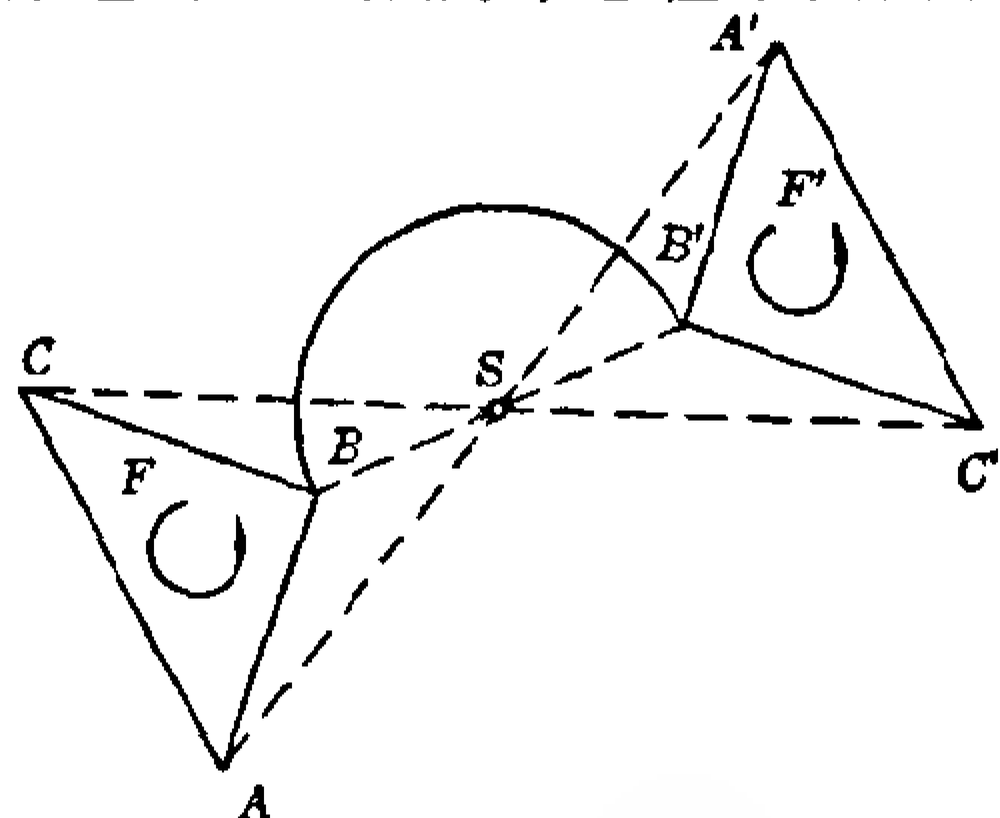


图 7.3-4　中心对称

在中心对称的情况下，平面上每一点 B 映射到点 B'，它们之间的线段以对称中心 S 点作为它的中点，这种变换也称为**对于点的反射**。象其他各种旋转一样，它也是一种**全等变换**，即图形的大小和形状不因变换而发生改变。与轴对称相对照，中心对称使图形的方向保持不变。因此在中心对称的情况下，一图形和它的象是

全等的，并且方向相同。对于同一点，进行连续两次反射，象和原始的图形重合。在中心对称的情况下，唯一固定的点就是对称中心。

以一点 P 为中心旋转一角度 φ 后，图形能与它本身重合，则称这种图形是径向对称的。中心对称是径向对称的特例，所对应的 $\varphi=180°$。所有的正多边形都是径向对称的(见图 7.3-5)。

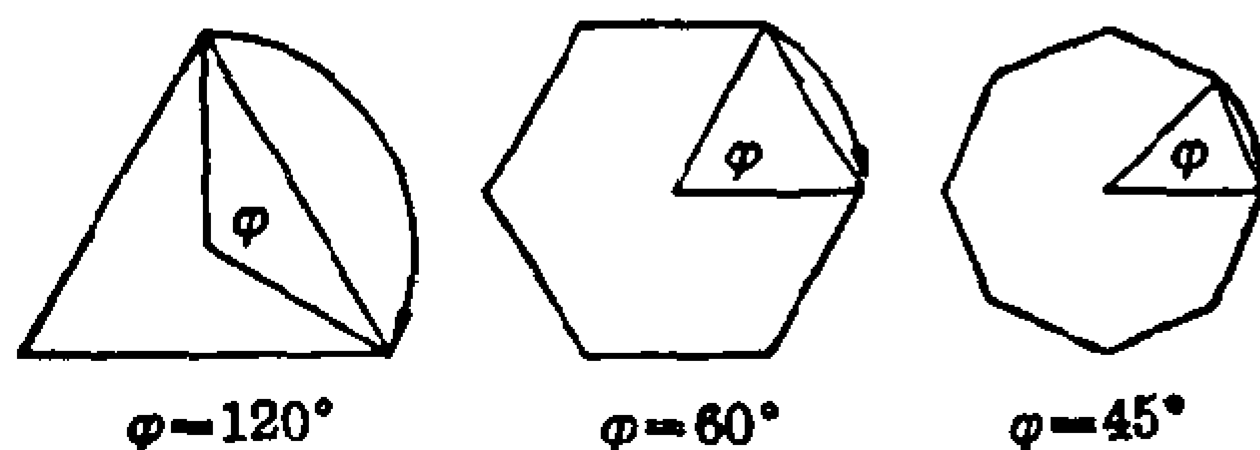


图 7.3-5　正多边形的径向对称

基本作图法

线段中点的作法　这可作出使线段 AB 的端点 A 和 B 互相对称的对称轴来实现。

以 A 和 B 为圆心，作两个半径相等的圆，这半径应大于 AB 长度的一半。这两圆相交于对称轴上 s_1 和 s_2 两点，因此过 s_1 和 s_2 的直线 s 和 AB 相交于中点，并和 AB 垂直。这条线称为 AB 的垂直平分线（见图 7.3-6）。

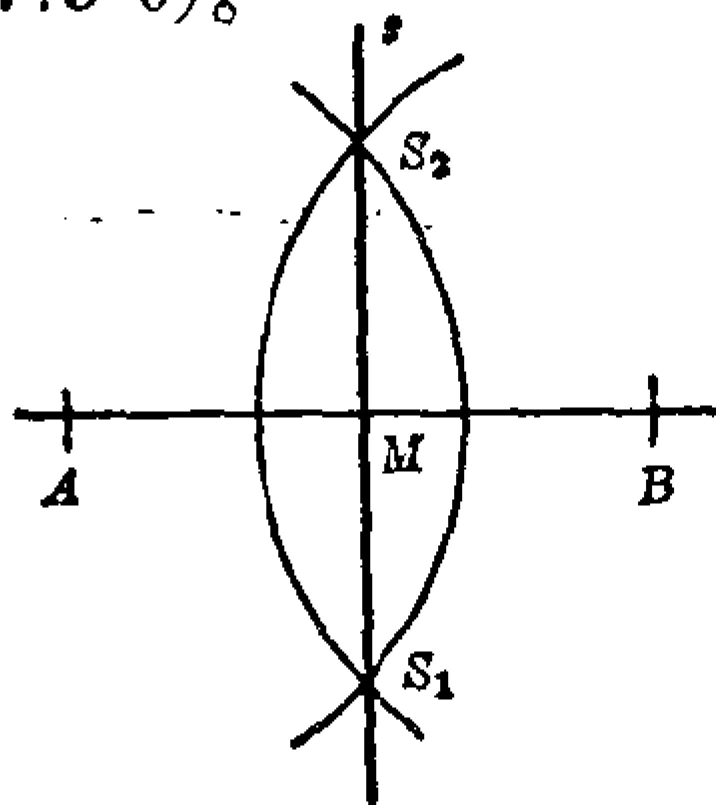


图 7.3-6　平分一线段

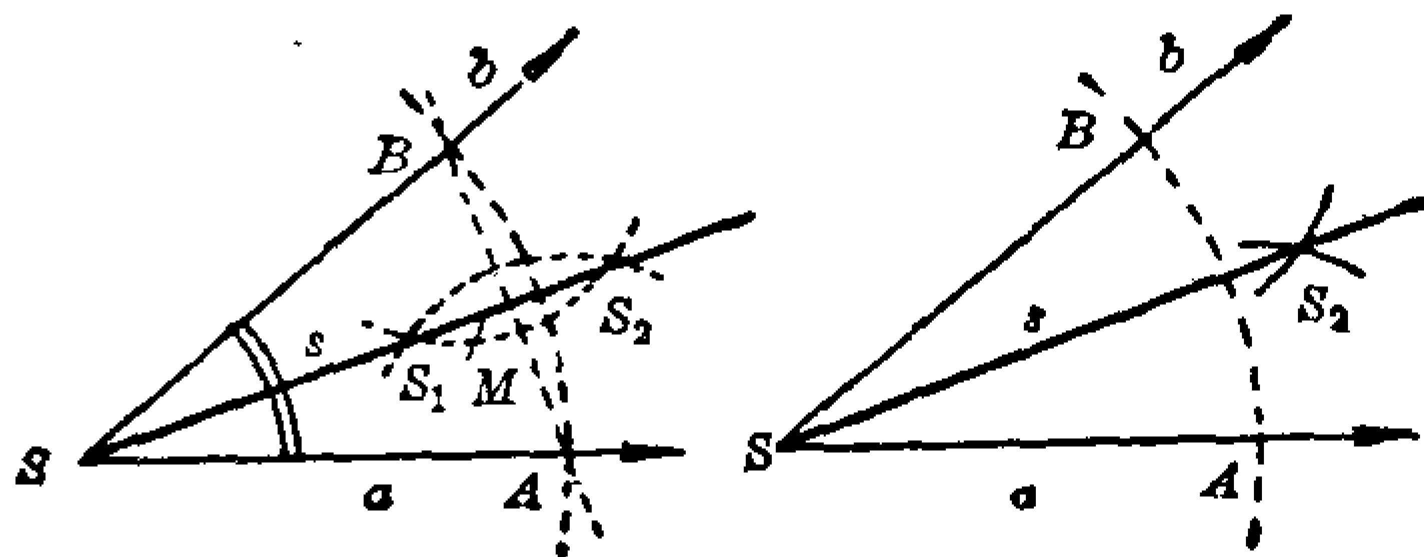


图 7.3-7　平分一个角

角平分线的作法　也可利用轴对称的性质来将角平分。以角$\measuredangle(a,b)$ 的顶点 S 为圆心作一半径为任意长的弧。它和角的两边相交于 A 和 B，AB 的垂直平分线就是图形的对称轴，它将角平分成两半。由于 S 也在这根轴上，因此只要再作出轴上另外一点。这样一个点，例如 S_2 可用下

面的方法作出：以 A、B 为圆心作两半径相等的弧，使它们相交，交点就是 S_2（见图 7.3-7）。

与角的平分不一样，单用直尺和圆规将角三等分只是在特殊的情况下才有可能。

垂线的作法 过直线 l 上的一点 P 作直线的垂线，可先以 P 为中心，画一半径 r 为任意的圆（见图 7.3-8），它交于 l 上的 A 和 B。以 A 和 B 为圆心，以大于 r 为半径作两个圆。将它们的一个交点例如 S_1 和 P 点连结，直线 S_1P 就是所要作的垂线。

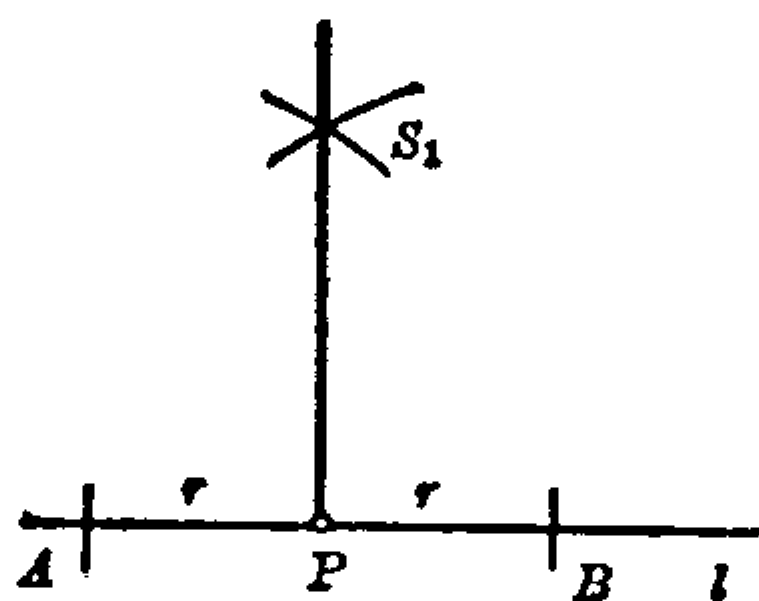


图 7.3-8 过直线上一点作直线的垂线

如果 P 是线段 AB 的中点，那末可用平分一线段的方法来作出过 P 点垂直于 AB 的垂线。

过线外一点作垂线 若要过直线外的一点 P 作直线的垂线，可以 P 点为圆心作一圆（半径要足够大），交于 l 上的 A 和 B。AB 的垂直平分线就是所要作的直线（见图 7.3-9）。

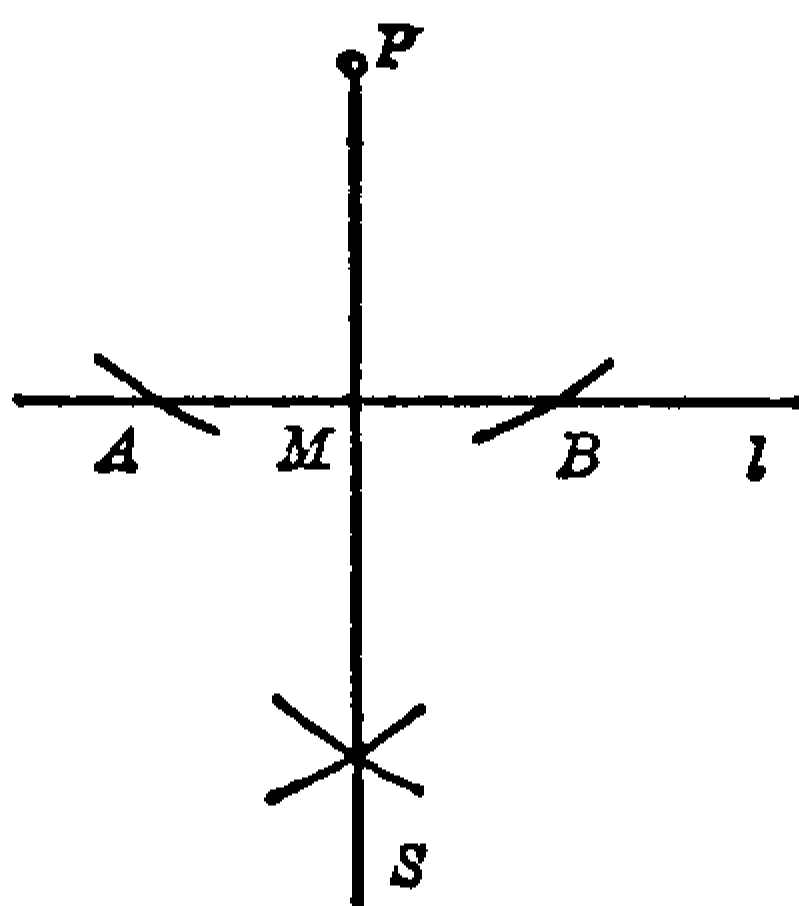


图 7.3-9 过线外一点作垂线

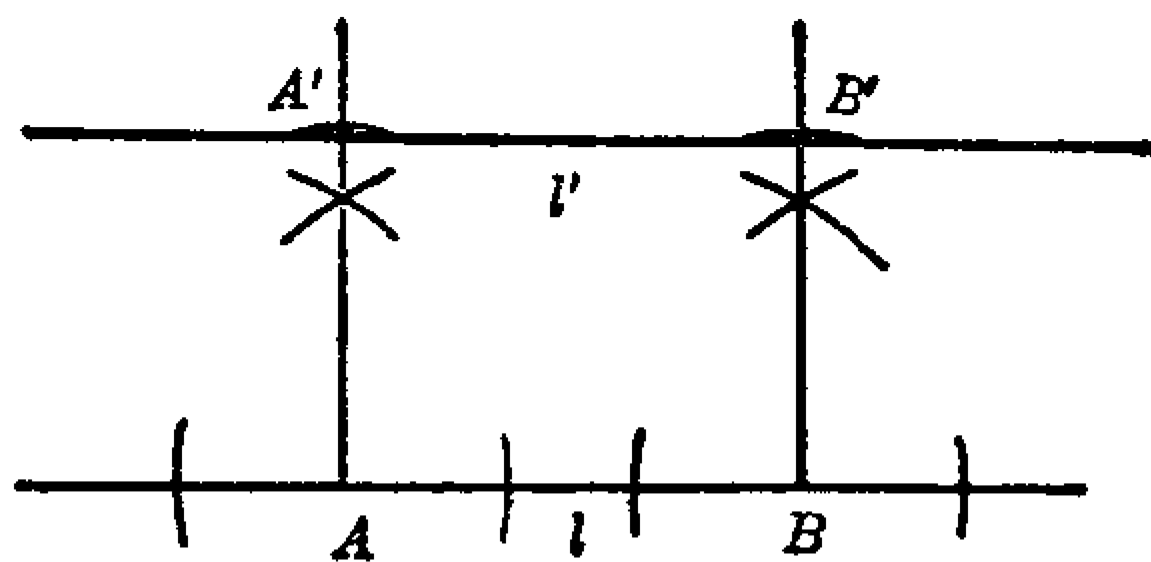


图 7.3-10 作一直线的平行线

平行线的作法 用直尺和圆规作一直线 l 的平行线，可先过 l 上的两点 A 和 B 作 l 的垂线。在这两条垂线上标出和 l 等距的两点 A' 和 B'，并且要在 l 的同一侧。过 A' 和 B' 的直线就是 l 的平行线（见图 7.3-10）。

尺规作图概述 欧几里得创立他的平面几何是基于一种公理体系。这个体系保证(1)过任何给定的两点总能够作一条直线，(2)总能作一个

圆，使它的半径等于两给定点之间的距离，而它的圆心是一给定的点。

因而，他的一些定理的证明总是用这样一种方法：也就是使它们的一些论述归纳为关于线和线或圆相交，或圆和圆相交的公理或基本定理。故在欧几里得几何中，所允许的作图工具只能是作直线用的(直尺)和作圆用的(圆规)。因此，单用直尺和圆规作图这一种要求是与平面几何公理的选择有关，而与作图的精度无关。事实上，采用其他一些工具来作图，其精度往往会更高些。

此外，由于古希腊只有初步不完全的、而且是不严格的计算和代数方法，故他们试图用直尺和圆规的作图来解决所有重要的数学问题。例如，他们用作出两个线段的等比中项来求出平方根。

特别是三个著名问题，用这种方法是难以解决的：

任意角的三等分，

化圆为方：求作一正方形，使它的面积等于一给定圆的面积。

立方体的倍积[提洛(Delic)问题]：求作一立方体，使它的体积等于一给定立方体的二倍。

现代方法已经证明，所有这三个问题单用直尺和圆规是不能解决的[参见**II**. 第3章3.2节——伽罗华(Galois)理论]。

7.4 三角形

三角形的组成部分，三角形的分类

如果平面内给出不在一直线上的三点，那末刚好由三条直线将它们连起来。由这些直线(不如说是由点之间的线段)形成的闭合图形称为**三角形**。这些点是三角形的三个**顶点**，它们之间的线段称为三角形的**边**。三角形都是凸的：这就是说，对于任意包含于三角形内的两点，它们之间的线段也包含在三角形内。通常将顶点标为A, B和C，对着顶点的边用相应的小写字母表示，即$|AB|$用c, $|BC|$用a及$|CA|$用b来表示。三角形的任意两条边构成了三角形一个内角的两条边。内角用顶点的序列来标明，或用对应于顶点的小写希腊字母来表示(见图7.4-1)。这样，$\sphericalangle CAB=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle BCA=\gamma$。

如果将一条边延长，它的**延长线**和另一边构成的角称为三角形的一个外角。这样，α'是CA在A点的延长线和AB之间的夹角；β'是AB

在 B 点的延长线和 BC 之间的夹角；γ' 是 BC 在 C 点的延长线和 CA 之间的夹角。整个三角形记为 $\triangle ABC$。如果旋转方向是 $\overrightarrow{AB}\to\overrightarrow{BC}\to\overrightarrow{CA}$，则称这个三角形是**正向定向的**。

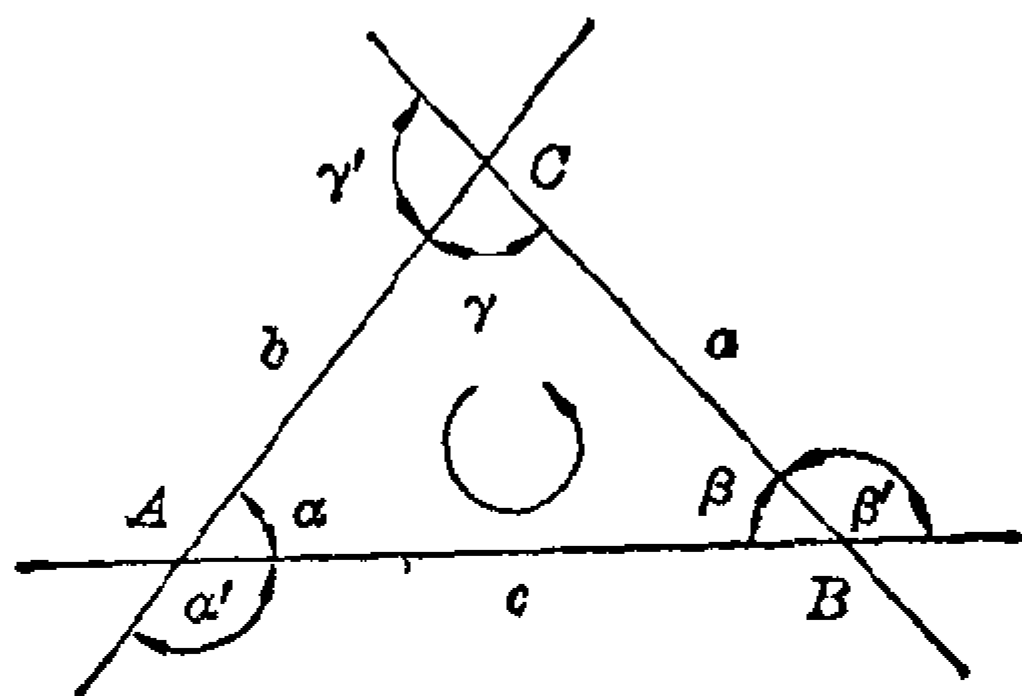


图 7.4-1 三角形 ABC

如果两条边(a)相等，则称三角形为**等腰的**，称第三边为底边(c)，它所对的角的顶点称为三角形的**顶点**。在**一等边三角形**中，所有的三条边都相等。

如果所有的内角都是锐角，则称这三角形为**锐角三角形**。有一个内角是直角，则称为**直角三角形**。有一个角是钝角，则称为**钝角三角形**。在一直角三角形中，直角所对的边称为斜边(见图 7.4-2)。

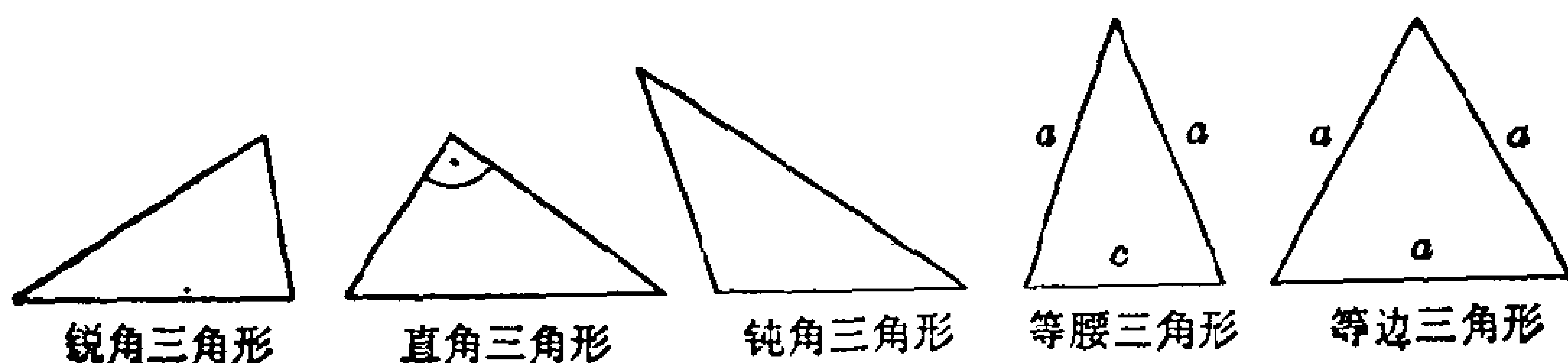


图 7.4-2 三角形的种类

三角形的一些基本性质

边之间的关系 从任意一个顶点沿着边可到达其他任一个顶点，有两种不同的方法：或者沿着连接这两点的边，或者沿着另外两条边，而经过第三个顶点(例如：沿着 c 从 A 到 B，或者沿着 b 和 a 而经过 C)。由于直线是两点之间的最短距离，这就是说 $c<a+b$，$b<a+c$ 及 $a<b+c$。用减法又可导出六个不等式：$c-a<b$ 或 $a-c<b$，$c-b<a$ 或 $b-c<a$，以及 $b-a<c$ 或 $a-b<c$。但是在几何上，其中只有三个不等式是有意义的，因为二个线段之差必须是非负数。

在一三角形中，任意两条边的和大于第三边。在一三角形中，任意一边大于其他两边之差。

例如：长为 3，4 和 5 个单位长度的三条边可以组成一个三角形。而

长为3, 4和8个单位长度的三条边不能构成一个三角形。因为$3+4<8$，两条边的和比第三边小了。

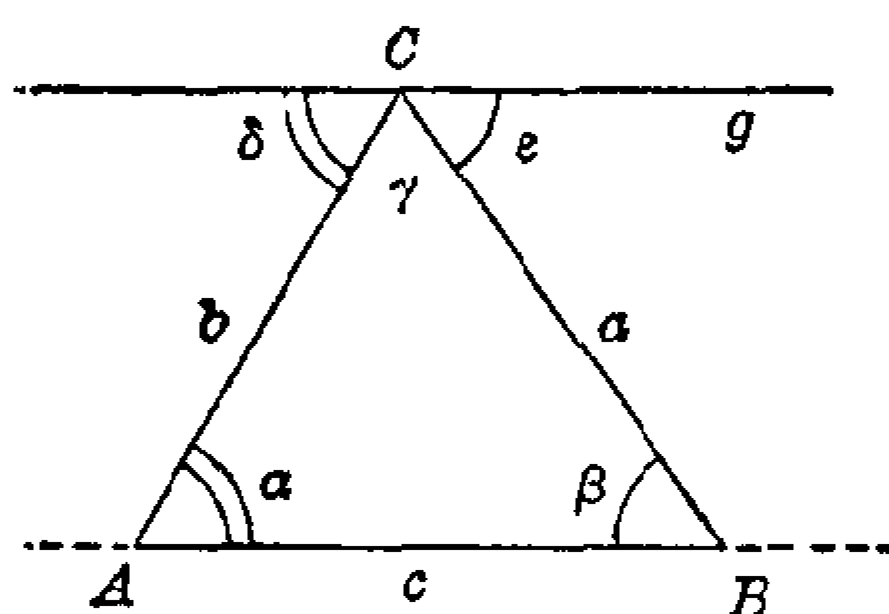


图7.4-3 $\alpha+\beta+\gamma=180°$

角之间的关系 过三角形一顶点作所对边的平行线g(例如，通过C作一条平行于$c=|AB|$的平行线)。这样在C点有一平角，它被三角形的两条边又分成三个角。两条平行线g和c与a和b相交。这样，交错角相等：$\delta=\alpha$以及$\varepsilon=\beta$。现在$\delta+\gamma+\varepsilon=180°$，因此，$\alpha+\beta+\gamma=180°$ (见图7.4-3)。

三角形的内角之和等于**180°**。

由于每一外角和一内角是邻角，下列方程成立：

$$\alpha+\alpha'=180°,\quad \beta+\beta'=180°,\quad \gamma+\gamma'=180°。$$

方程的两边相加得：

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha'+\beta'+\gamma')=540°。$$

由于$\alpha+\beta+\gamma=180°$，因而有$\alpha'+\beta'+\gamma'=360°$。

三角形的外角之和等于360°。

现在，每一个外角和相邻的内角互补，而且已证明内角之和也是180°，因而：

每一个外角等于另外两个内角之和：$\alpha'=\beta+\gamma$, $\beta'=\gamma+\alpha$, $\gamma'=\alpha+\beta$。

从这些定理容易导出下面的推论，它在物理学中经常用到(见图7.4-4)。

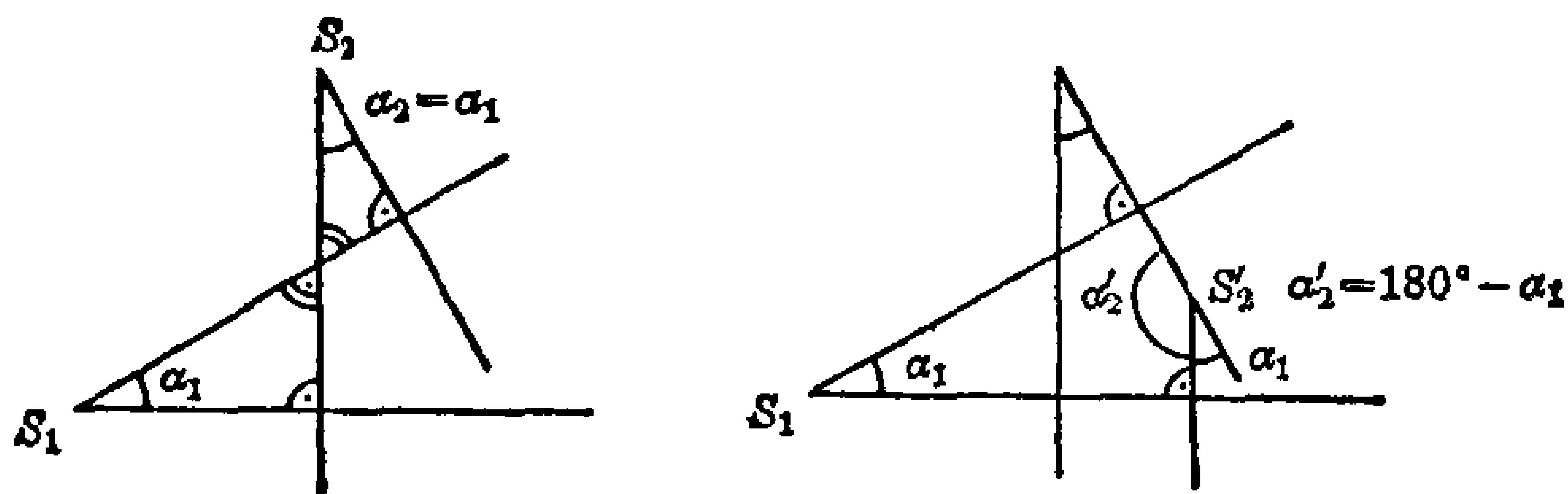


图7.4-4 边成两两正交的角

边成两两正交的两个角，如果一个角的顶点不在另一个角的两边之内，也不在其中任一条边上，则这两角相等；如果这顶点在两边之内，或在任一条边上，则这两角互补。

角与边之间的关系　设 ABC 为一个三角形，其中 $a>b$，设角 γ 的平分线 w_γ 交于 $|AB|=c$ 的 D 点。如果三角形 ADC 对 w_γ 反射，那末 b 的象是 a 的一部分，因此 A 的象 A' 在 B 和 C 之间(见图 7.4-5)。A' 是角 $CA'D=\alpha'$ 的顶点，它等于 $\alpha=\sphericalangle CAD$(根据对 w_γ 的反射得出)。

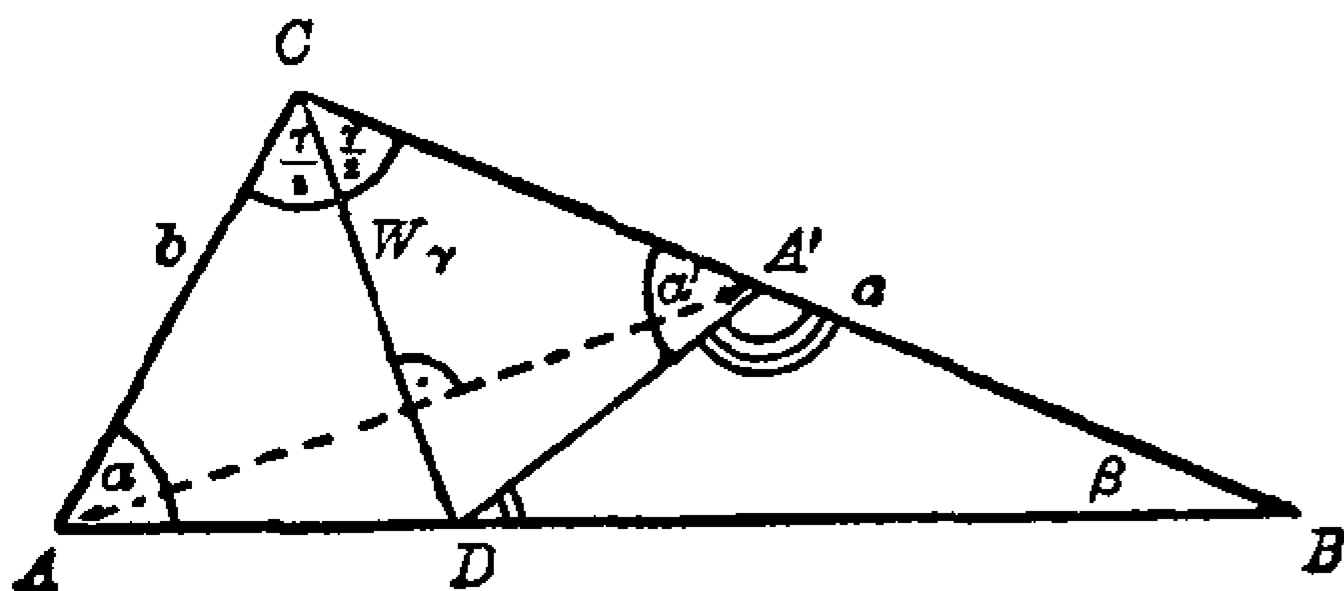


图 7.4-5　在三角形 ABC 中，$a>b$ 则有 $\alpha>\beta$

因为 α' 是 DBA' 的外角，因此它等于 β 与 $\sphericalangle BDA'$ 的和。更具体一点，α' 比 β 大。由于 $\alpha=\alpha'$，故 $\alpha>\beta$，这就证明了若 $a>b$ 则有 $\alpha>\beta$。反过来也能证明，如果 $\alpha>\beta$，则 $a>b$。

三角形中，长边所对的角大于短边所对的角，大角所对的边比小角所对的边长。若所对的边相等，则角也相等，反之亦然。每个等腰三角形都是对称的，顶点到底边的垂线平分底边和顶角，两底角相等。

在直角三角形中，两锐角是互余的。等腰直角三角形的底角是 45°。

等边三角形的内角都是相等的，每个角等于 60°。

等边三角形有三根对称轴。

如果直角三角形中有一个角是 30°，那末它所对的边是斜边的一半。

最后一个定理是由等边三角形的对称性得出的，我们经常用到它。例如，三角板通常就是这种形状的三角形，或者是等腰直角三角形。

三角形的全等

概述　如果平面图形具有同样的形状和同样的大小，则称它们是全等的。通过变换，全等的图形能重合在一起。这种变换将点加以移动，但不改变(点和线之间的)联接关系、直线之间的夹角以及线段的长度。这种变换使面积也保持不变，使平行线还是平行线。如果全等的图形有相同的方向(相对于平面某固定的方向)，那末平面经过一系列的平移和旋转后，图形之间能互相变换。这种图形称为**直接全等**。如果它们的方向

不同，除了进行连续的平移和旋转外，还要对一直线进行一次反射才能使图形重合，这种图形称为**反向全等**。称平移、旋转和反射为**全等变换**，它们能被用来作为讨论平面图形全等的准则。但作为一种能发现新的几何性质的工具，它们的用途远非仅限于此。

关于三角形全等的四条定理　在全等的定义中，要求图形在各个方面都要相等，特别是对应边的长度和它们之间的夹角要相等。这一节的定理指出，在某些情况下，检验三角形是否全等只要验证三个部分就已足够了——如果对于两三角形这三部分相等，则三角形全等。这四条定理是：

1．如果一个三角形一边和另一三角形对应的边相等，以及一个三角形的两角和另一个三角形所对应的两角相等，则这两个三角形全等(α, s, α)。

2．如果一个三角形的两条边和另一个三角形对应的两条边相等，以及这两条边的夹角相等，则这两个三角形全等(s, α, s)。

3．如果一个三角形的两条边和另一个三角形对应的两条边相等，以及较大一边所对应的角相等，则这两个三角形全等(s, s, α)。

4．如果一个三角形的三条边和另一个三角形对应的三条边相等，则这两个三角形全等(s, s, s)。

如果用给定的边和角作三角形，可以看出，只要这些边和角的条件对应于上述四个定理中的一个，也只有这样，才唯一确定了一个三角形。如果给定两条边和较小一边所对的角，例如$a=3$个单位，$c=5$个单位以及$\alpha=20°$，那末由图可以看出，可能有两个三角形满足这种条件。

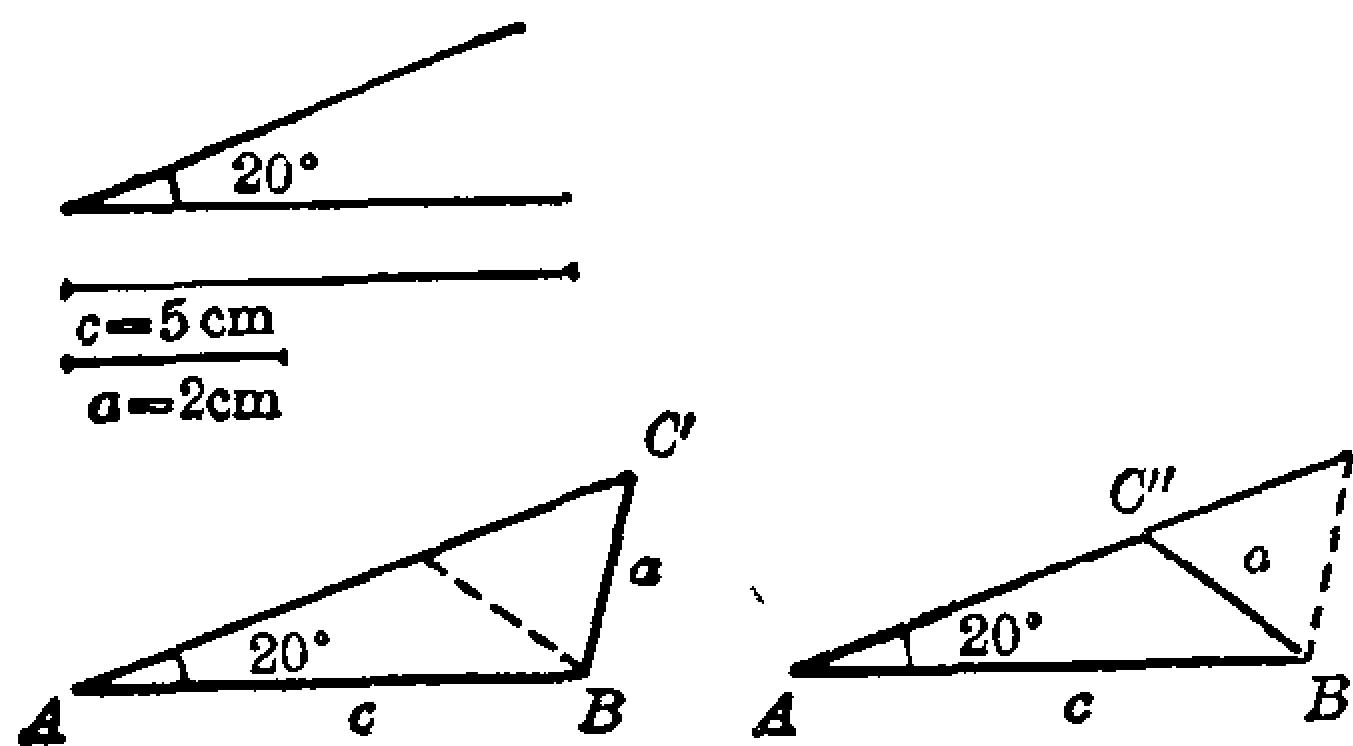


图 7.4-6　这两个三角形的三个数据相同，但不全等

因为如果在20°角一边作一线段$|AB|$等于c，以B点为圆心，以a为半径作弧，这弧交于直线上两点C'和C''，三角形ABC'和ABC''都满足作图要求。又如$\alpha=80°$，于是半径为a的弧与α的边根本不能相交，因此也根本没有一个三角形能满足这一要求(见图7.4-6, 7.4-7)。

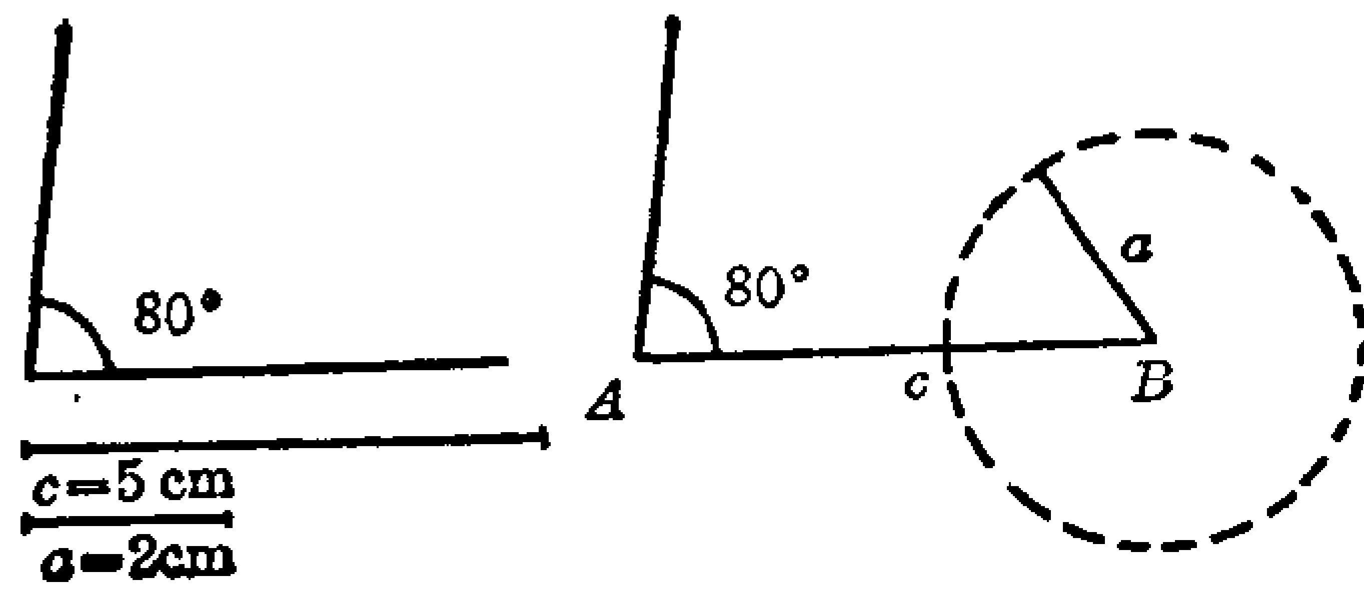


图 7.4-7 用这些数据根本不能作出一个三角形

采用第一条全等定理作图时，先找出和给定一边相接的两只角，则作图较为方便。如果其中一只角在数据中没有给出，则可用三角形的内角之和的定理来求得。例如给定了 c, α 和 γ, 则可计算出 $\beta=180°-\alpha-\gamma$, 然后在给定线段的两个端点作出两个符合要求的角就能画出这个三角形。或者采用另外一种方法，可以避免计算。通过 α 角未定边上任意一点 C' 作一直线，使它和 α 角的未定边成 γ 角度，那末过 B 点且与这条直线平行的直线就是三角形 ABC 的第三边。

三角形的横截线和特异点

任何与三角形相交的线称为**横截线**。

垂直平分线 一条边的垂直平分线是指通过这边的中点并和这边成直角的直线。

三角形各边的垂直平分线相交于一点 M，称为三角形外接圆的圆心。

在一线段的垂直平分线上的点是一些和线段的端点**等距离**的点。因此两条垂直平分线，例如 m_a 和 m_b 的交点和 BC 及 CA 两条边的端点等**距离**，即和三角形的三个顶点等距离，因而它一定在第三条垂直平分线上。事实上，M 是通过三角形三个顶点的一个圆的圆心，这个圆称为**外接圆**，M 称为**外心**（见图 7.4-8）。外接圆的半径是 M 到三角形顶点的

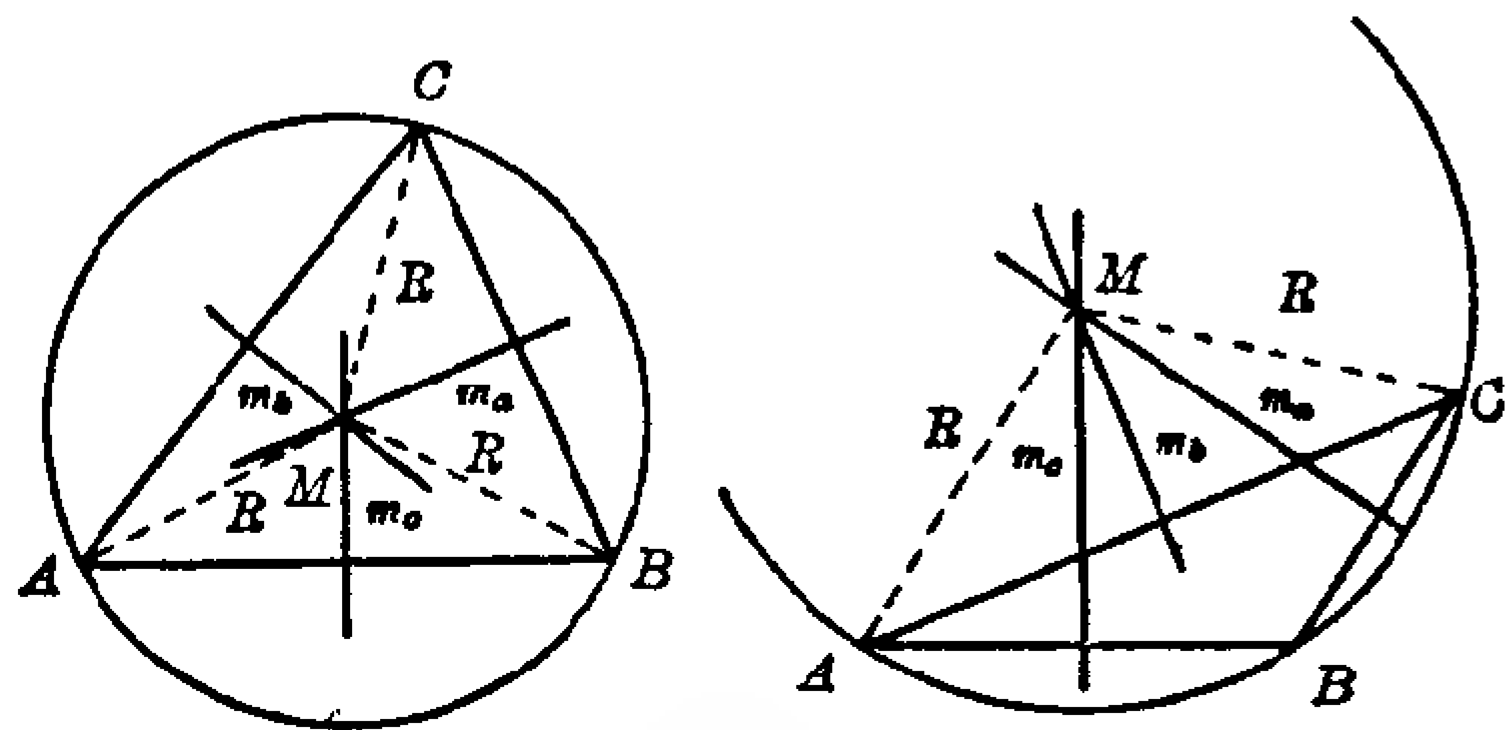


图 7.4-8 垂直平分线和外接圆

距离。锐角三角形的外心在三角形内，钝角三角形的外心在三角形之外，

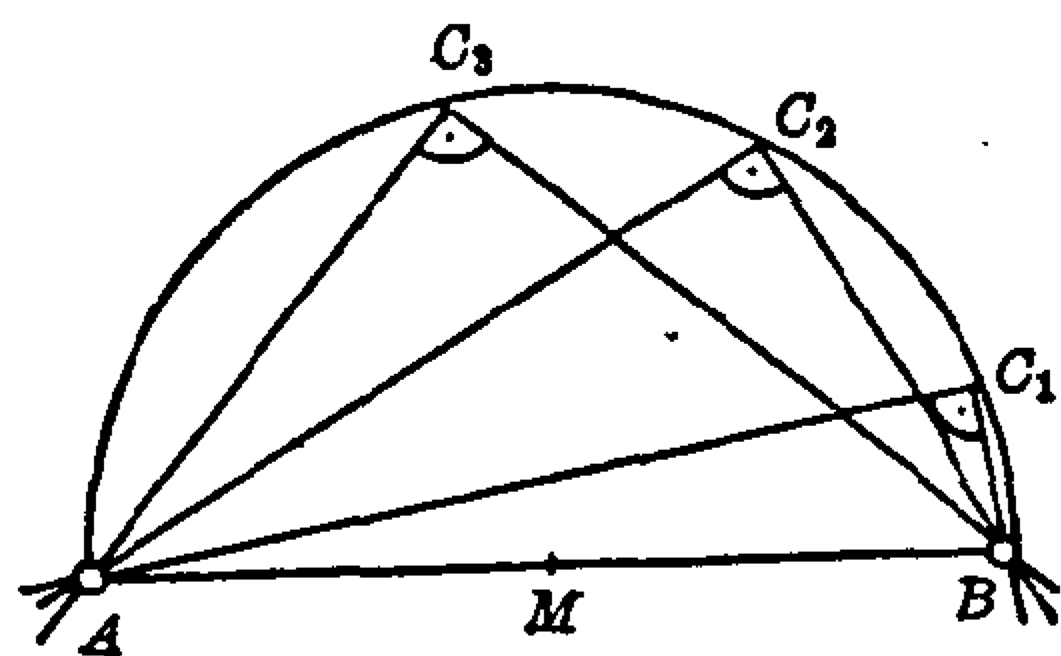


图 7.4-9　泰勒斯定理

而直角三角形的外心在斜边上，故斜边就是外接圆的直径。斜边为 AB 的所有直角三角形的顶点C都在直径为 AB 的圆上。这一发现应归功于梅里图斯的泰勒斯(Thales，约公元前624～547年)。为了纪念他，有时称这圆为泰勒斯圆(见图 7.4-9)。

泰勒斯定理。两直角边分别通过固定点 A 和 B 的所有直角顶点 C_i 的轨迹是一个以 AB 为直径的圆。

等腰三角形的外心在对称轴上，它是底边的垂直平分线。

三角形三条边的中点 A'，B' 和 C' 是内部一个小三角形的顶点(见图 7.4-10)，这小三角形的边平行于原来三角形的边，因而三角形 ABC 的边的垂直平分线也和三角形 $A'B'C'$ 的边垂直，并通过三角形 $A'B'C'$ 的顶点，它们是三角形 $A'B'C'$ 的高。

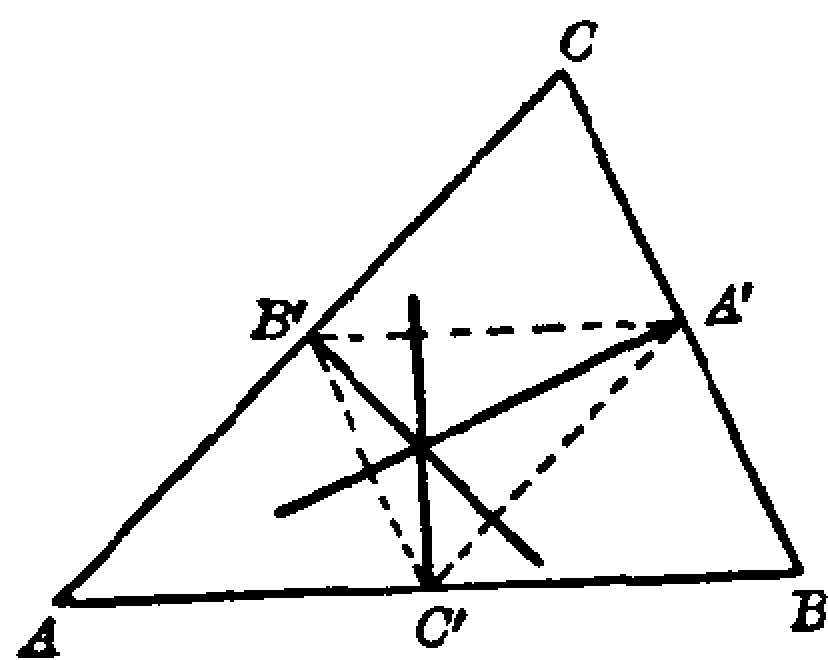
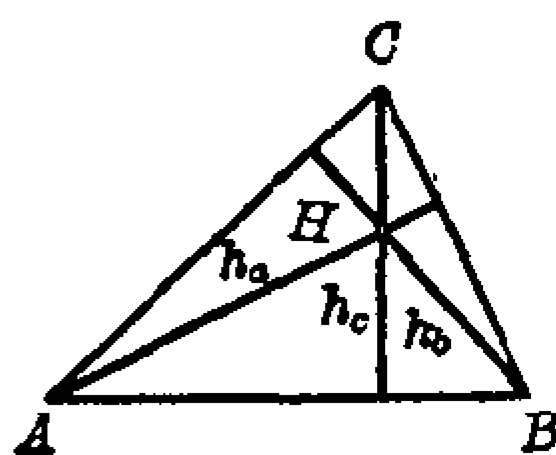


图 7.4-10　垂直平分线和高



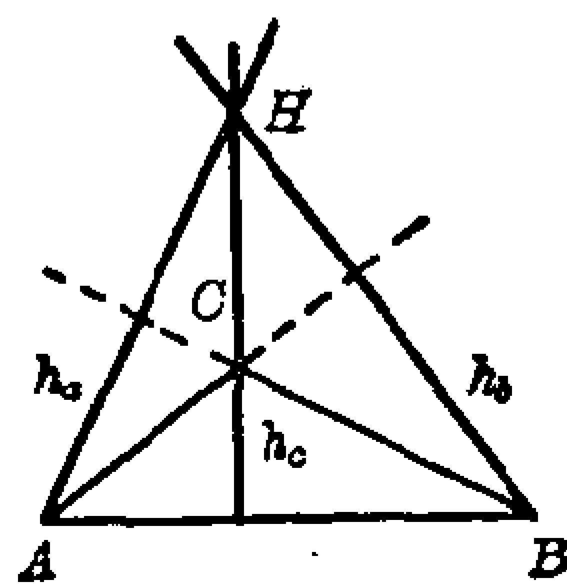


图 7.4-11　三角形的高

高　过顶点并和对边(或它们的延长线)垂直的线为三角形的高(或垂线)，在图中，它们的长度用 h_a、h_b 和 h_c 表示(见图 7.4-11)。

三角形的三条高交于一点，称为三角形的垂心。

锐角三角形的垂心在三角形内，钝角三角形的垂心在三角形外，而直角三角形的垂心就是直角的顶点。在等腰三角形中，通过三角形顶点的高同时也是底边的垂直平分线，这两根线都和对称轴重合。

利用垂心可解决下面的问题：在一有限的平面区域内，比如在一张

纸上，作一根直线，使它通过给定点 H 以及两不平行的直线 l_1 和 l_2 的交点 C，但这交点不在这个区域内。作图的方法是：过 H 点作 l_1 和 l_2 的垂线，每一根垂线与另一根直线相交，例如交点为 A 和 B，这两根垂线就是三角形 ABC 的高。因此第三条高一定通过 C 点和三角形 ABC 的垂心 H，这第三条高就是要求作的直线，这可通过 H 作 AB 的垂线 c 来完成(见图 7.4-12)。

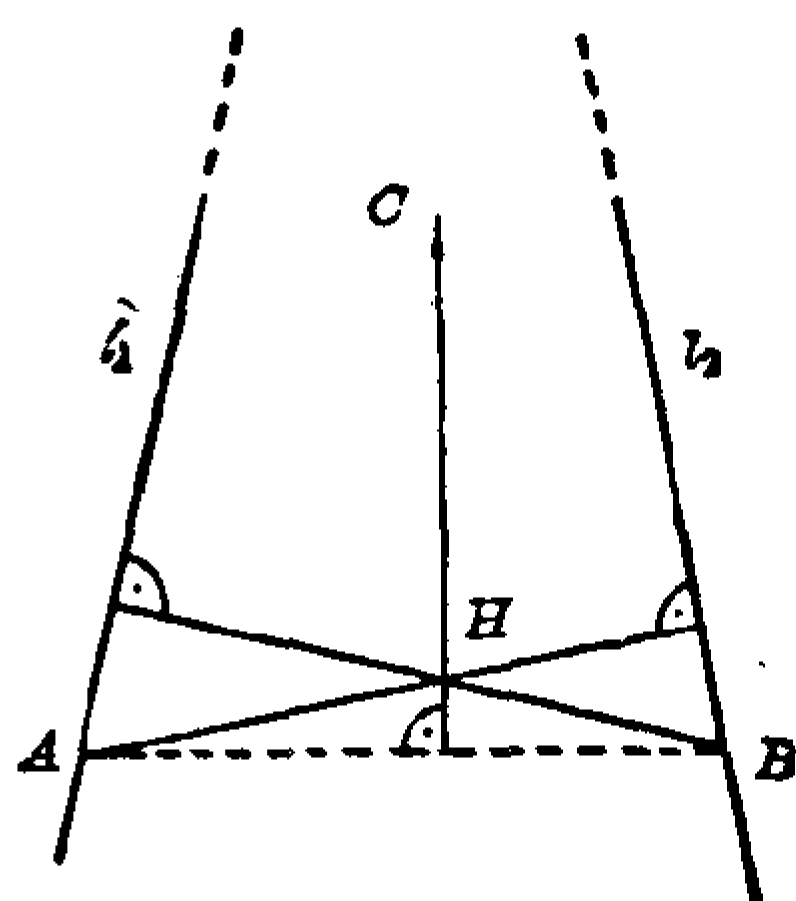


图 7.4-12 过点 H 和两条非平行线 l_1 和 l_2 的不可及的交点作一条直线

中线 三角形的中线连接每条边的中点和所对的顶点。在图中它们的长度用 s_a, s_b 和 s_c 来表示(见图 7.4-13)。

三角形三条中线相交于一点，称为三角形的重心。每条中线被重心分成两段，其比例为 2:1，较长的一段和顶点相连。

为了证明这条定理，图中两条中线 AD 和 BE 已作好，直线 ED, AB 与 CA, CB, AD 及 EB 相交。由于可以证明

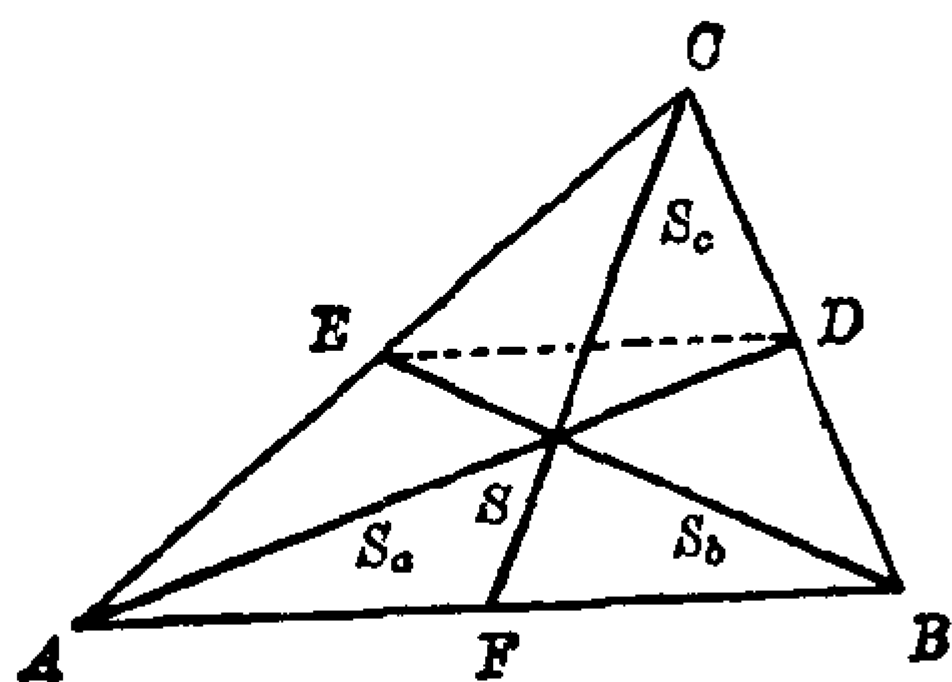


图 7.4-13 三角形的三条中线相交于一公共点 S

$$|CB|:|CD|=|CA|:|CE|=2:1$$

(利用截距定理，或更确切些用它们的逆定理)，AB 和 ED 是平行的，它们的长度之比为 2:1。因此

$$|SA|:|SD|=|SB|:|SE|=|AB|:|ED|=2:1。$$

对于另外一对中线也是如此，例如 CF 和 BE，它们的交点又一定是 S，因为将 $|BE|$ 分成 2:1 的只有一个点。

角平分线 在图中，三角形的角平分线用 W_α, W_β 和 W_γ 表示。

三角形三条角平分线相交于一点 M，称为三角形的内心。

w_α 和 w_β 的交点 M 到 b 和 c 的距离相等(因为 w_α 平分角 α)以及到 c 和 a 的距离相等(因为 w_β 平分角 β)，因此 M 到 a 和 b 的距离也相等，故它一定是在 w_γ 上。这点到三角形各边的距离是三角形内切圆的半径，内切圆和三角形的每一边相切于一点。M 是三角形的内心，切点 D, E

和 F 是过 M 的垂线和边的交点(见图 7.4-14)。外角(或它们的对顶角)的角平分线相交于三点 M_a, M_b 和 M_c, 它们是三角形三个**旁切圆**的圆心。一旁切圆和三角形的一边及其他两边的延长线各相切一点。等腰三角形顶角的角平分线和底边的中线、垂直平分线以及高重合在一起。

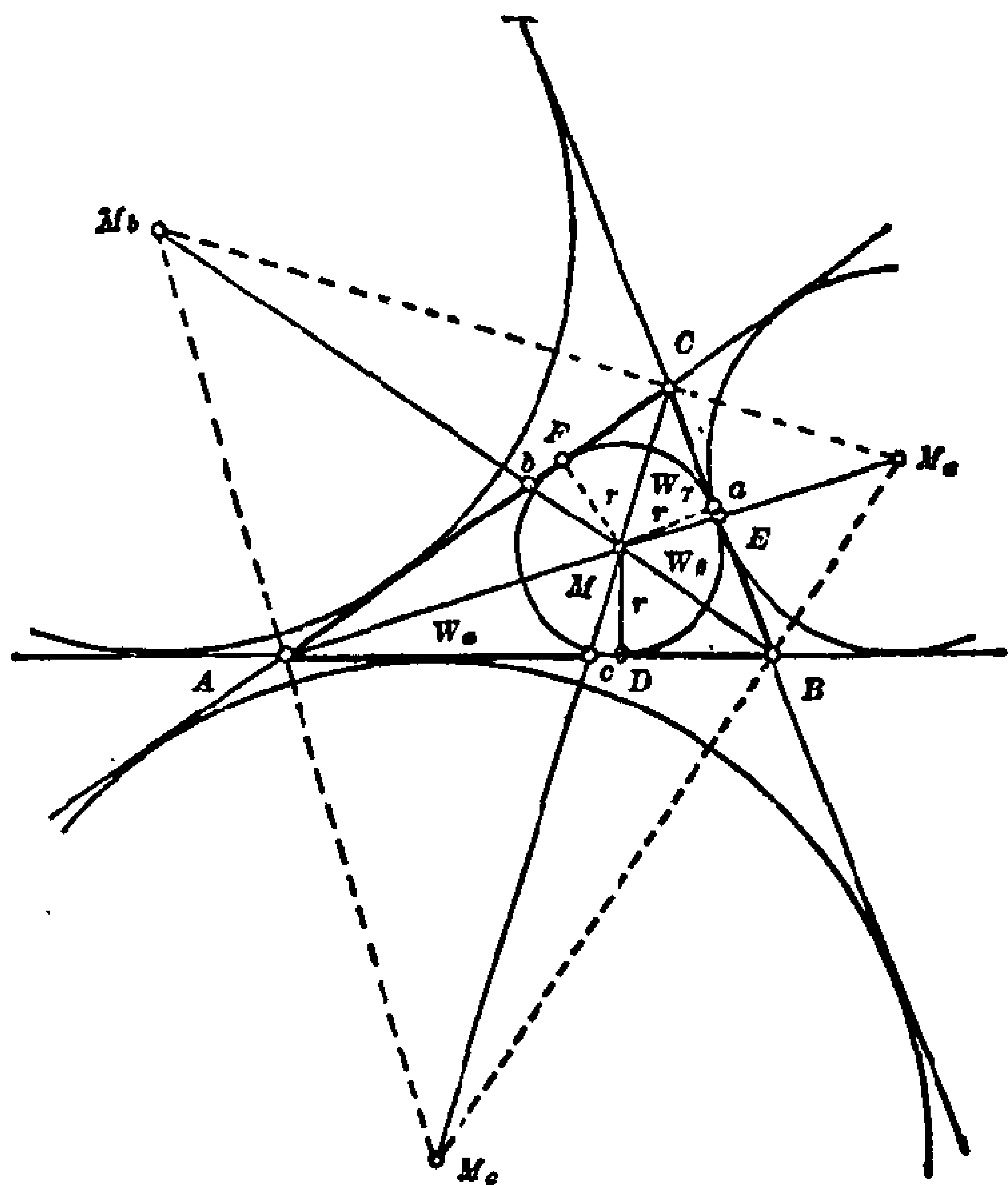


图 7.4-14　三角形的三个旁切圆

7.5　四边形

一般性质

四边形内角之和　在射影几何学中，平面中四点(其中没有三点在一条直线上)定义了一个**完全四边形**，它有六条边。但在普通平面几何中，一四边形只有四条边，这些边取决于点的给出次序。如果点是 A, B, C 和 D, 那末线段 $|AB|=a$, $|BC|=b$, $|CD|=c$ 和 $|DA|=d$ 是四角形或四边形的边，另外两条连线 $|AC|=e$ 和 $|BD|=f$ 是它的对角线，不算作

边。通常选择的(点的)次序给出一个凸四边形，但它也可以是凹的，或者甚至在极端的情况下是一反折四边形。

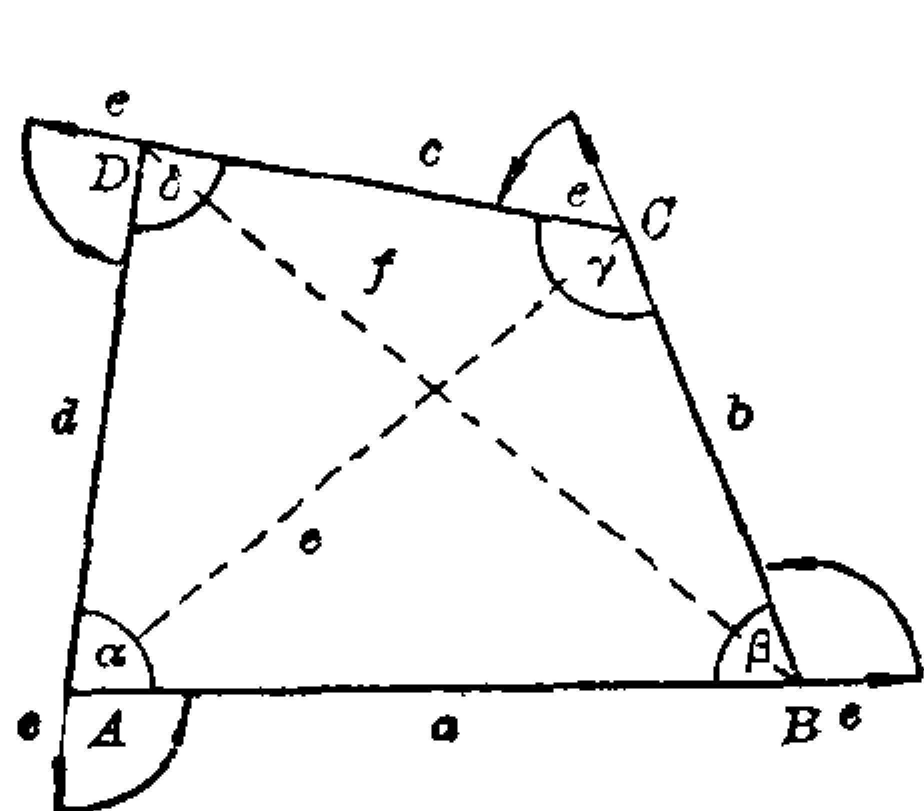


图 7.5-1 凸四边形

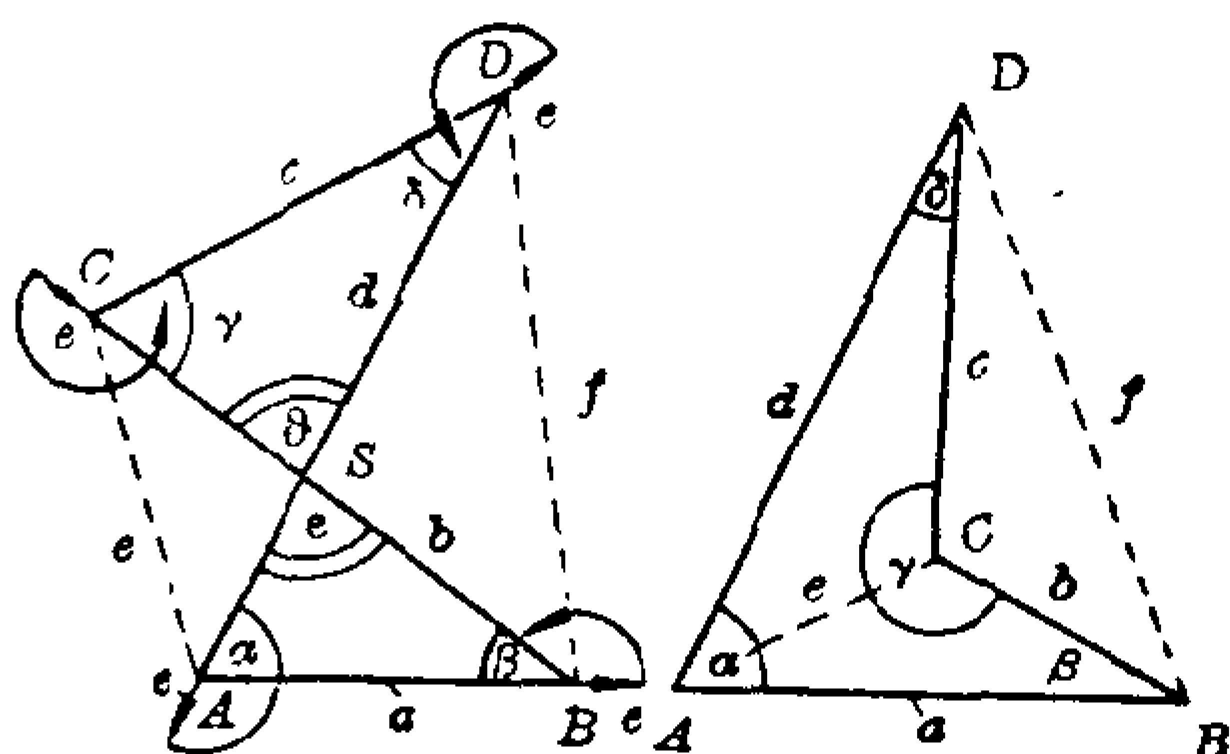


图 7.5-2 反折四边形(左)和凹四边形(右)

如果一四边形不是反折的(见图 7.5-1, 7.5-2)，有一条对角线将它分成两个三角形，使这两个三角形的内角和等于四边形的内角和，以下可以说明将角 ϑ 和 ε 算作反折四边形的内角是合理的。如果对于非反折的四边形，有一矢量沿着四边形的一边向这边的端点移动，到达端点后按正方向旋转，直到它的指向沿着下一条的边。这样重复下去，使矢量回到原来的起始点，它一共旋转了 360°。计算如下:

$$(180°-\alpha)+(180°-\beta)+(180°-\gamma)+(180°-\delta)=360°$$

或者

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°。$$

但对于反折四边形，相应的方程有:

$$(180°-\alpha)+(180°-\beta)+(180°+\gamma)+(180°+\delta)=720°。$$

从图中可以看出，由于 $\vartheta=\varepsilon$ 以及在 $\triangle ABS$ 中有 $180°-\alpha=\beta+\varepsilon$ 和 $180°-\beta=\alpha+\varepsilon$，故单从上面的方程就可得出这一关系式

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\vartheta=360°。$$

四边形的内角之和等于 360°。

四边形的分类 某些凸四边形有其特殊的名称(见图 7.5-3)。

按边的长度分类:

一般四边形	四条边的长度各不相等;
风筝形	两对邻边相等;
平行四边形	两对对边相等;
菱形	四条边相等。

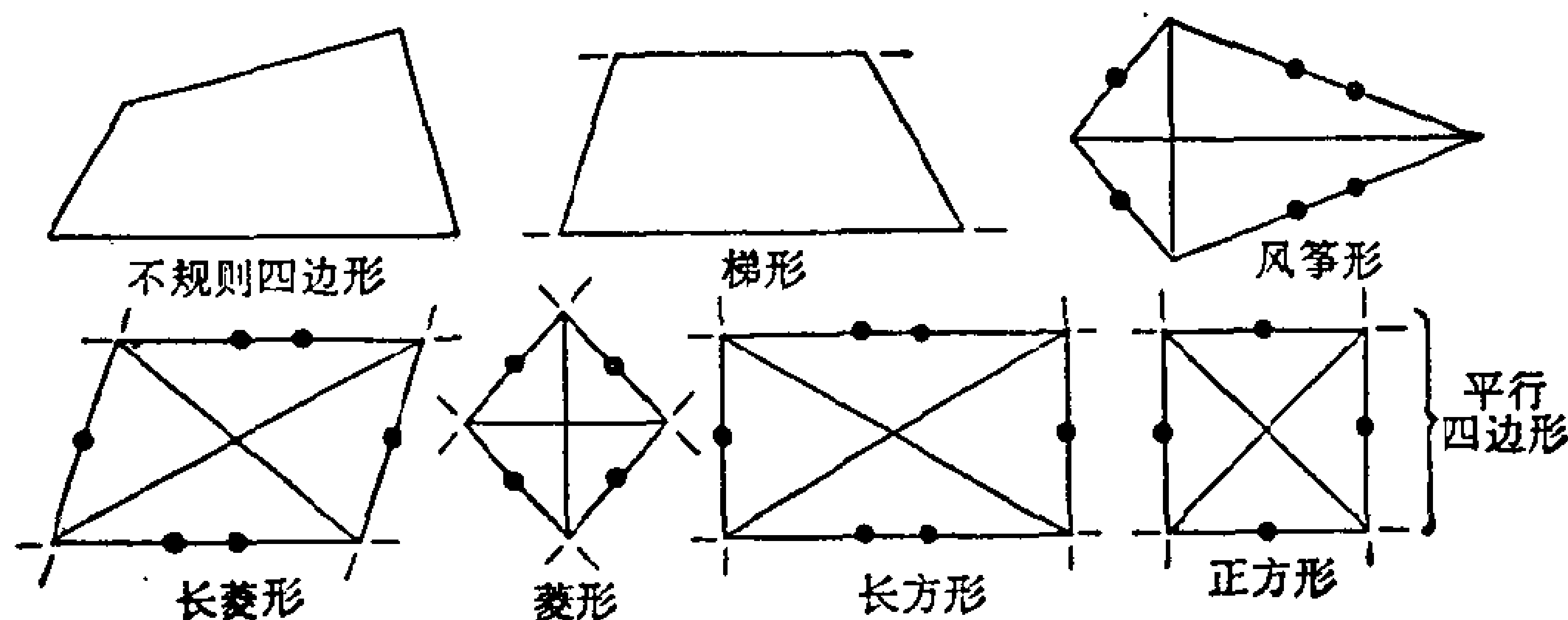


图 7.5-3 一些特殊四边形

按边的相对位置分类:

一般四边形	没有一对边是平行的;
梯形	有一对边互相平行;
平行四边形	有两对边互相平行。

平行四边形

概述 每一个平行四边形有两对相等的对边和两对相等的内对角。如果四条边都相等,则称为菱形。四只角相等的平行四边形称为**长方形**,因而每个角是 360° 的四分之一,或者是一只直角。如果所有的四边以及所有的四角相等,这平行四边形是一个**正方形**。正方形是四只角相等的菱形,也是四条边相等的长方形。有时称既不是菱形又不是长方形的平行四边形为**长菱形**。下面的定理是由三角形的全等定理得出的(见图 7.5-4)。

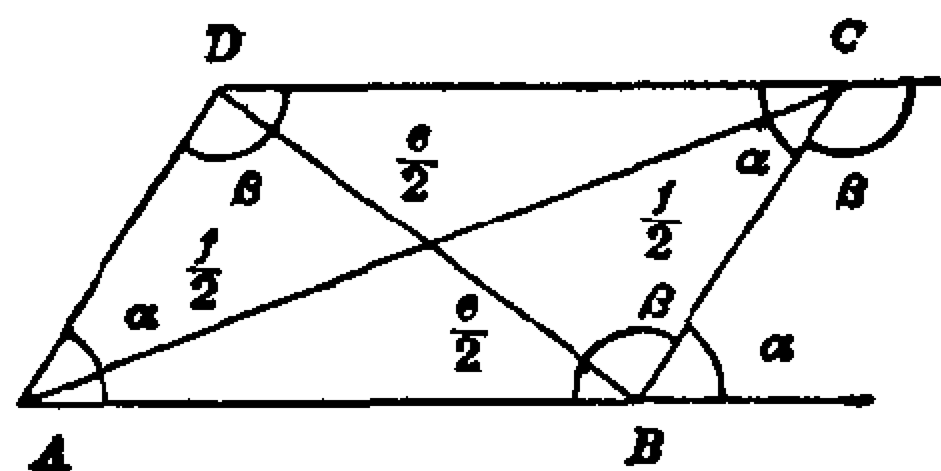


图7.5-4 平行四边形(长菱形)

平行四边形的对角线互相平分,相邻内角互补,内对角相等。

对称性质 长方形有两根对称轴,它们通过每对边的中点。而**菱形**的对称轴通过顶点,因而**正方形**(即直角菱形)有四根对称轴。每个**平行四边形**对角线的交点是一个对称中心。

对角线将平行四边形分成两对全等三角形。

长方形(以及正方形)的两根对角线相等。菱形(以及正方形)的两根

对角线相交成直角，并平分它的内角。它们将菱形分成四个全等的三角形。

平行四边形的作法 由于每根对角线将*平行四边形*分成两个全等的三角形，因此就象对于三角形一样，决定一平行四边形需要三个独立的数据。对于一般的四边形，还要增加两个数据，共需五个数据，因为这两个三角形不再全等，但有一条公共边(对角线)。对于*长方形*或*菱形*只要两个数据，而对于*正方形*只要一个数据就行了。通常，对于正方形可给出边长或对角线；对于长方形给出两条不同的边长，或者一条边和一条对角线。另一方面，对于菱形一个数据是角度，另一个数据是边或一条对角线。所有的作图都要作出图形中的三角形，因而它原则上和三角形的作图没有什么差别。

梯形

梯形是一种凸四边形，它(至少)有一对平行的边。如果梯形中不平行的一对边相等，则称它是等腰的。有两对平行边的梯形是一平行四边形。称梯形两条平行的边为它的*底线*，而称较长的一条为它的*底*，连接非平行边两个中点 E 和 F 的线段称为梯形的*中线*(见图 7.5-5, 7.5-6)。中线和底线 $|AB|=a$ 以及 $|CD|=c$ 平行，否则的话，过 E 点和 AB 平行的线会交于 BC 上的一点 F'。根据截距定理(S 点作为线束的承载点)，方程 $|DE|:|EA|=|CF'|:|F'B|$成立。但是假定 $|DE|:|EA|=|CF|:|FB|=1$，因此 $F=F'$ 故 $EF\parallel AB$。如果 G 是通过 D 和 F 的直线与 AB 延长线的交点，则三角形 BGF 和 CDF 全等。因此 $|AG|=a+c$，考虑三角形 AGD，可得 $m=(a+c)/2$。

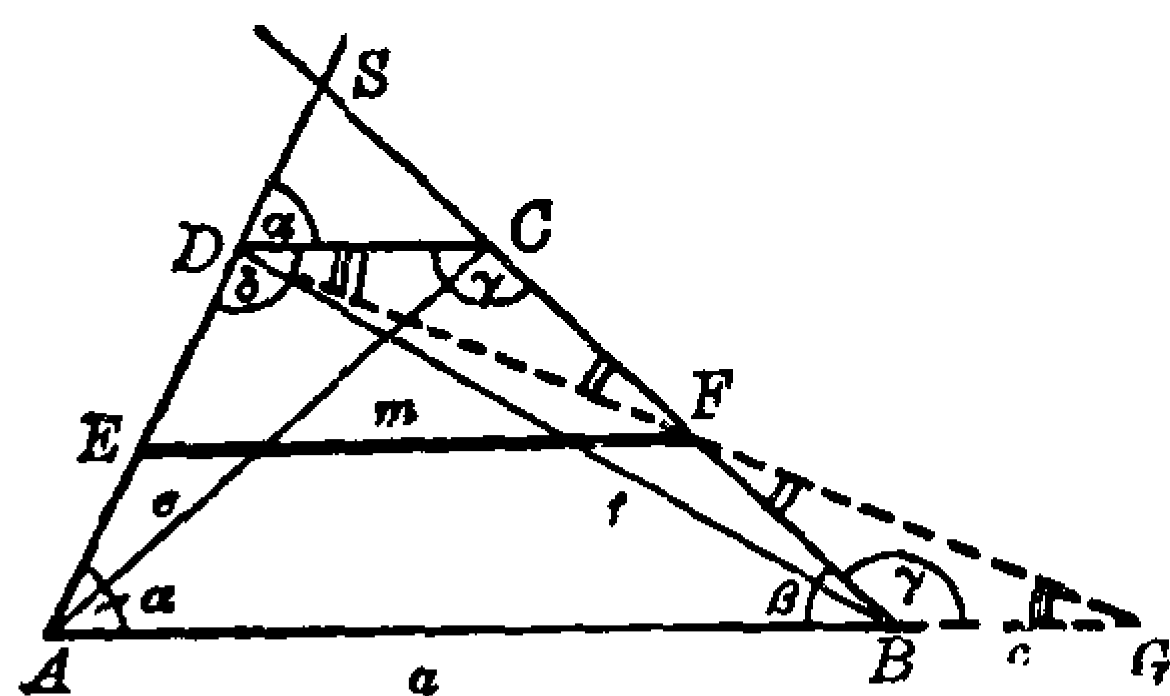


图 7.5-5 梯形对角线中点的距离

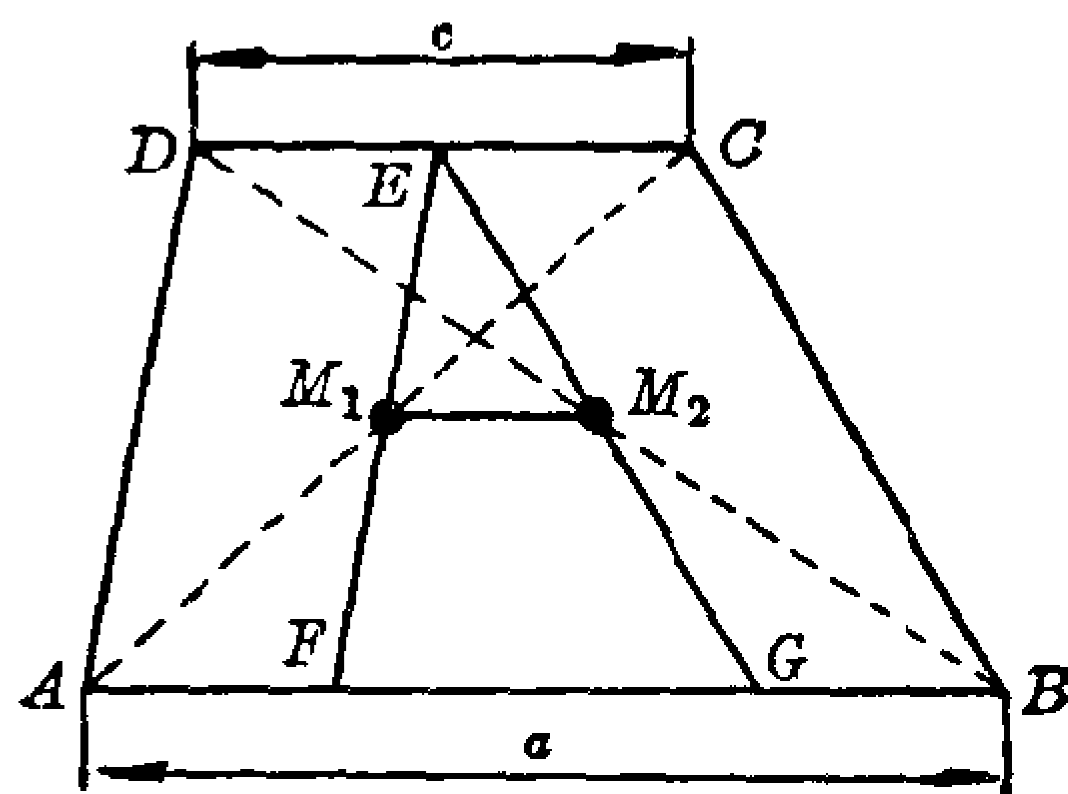


图 7.5-6 梯形

梯形的中线和两底线平行，并是它们和的一半，即 $m=(a+c)/2$（等差中项）。

中线经过梯形对角线的中点。

梯形对角线中点的距离是两条底线差的一半；$m'=(a-c)/2$。

设梯形的底线为 $|AB|=a$ 和 $|CD|=c$，设 M_1 和 M_2 是对角线 AC 和 BD 的中点。经过每个中点、和梯形较近的一边平行的线与 AB 相交于 F 和 G，和 CD 相交于一点 E。因为

$$|DE|=c/2=|CE|$$

（见图 7.5-6）。由于

$$|DE|=|AF|=c/2=|CE|=|BG|,$$

因此 $|FG|=a-c$。现在 M_1M_2 平分三角形 EFG 的边，因此是底边的 1/2，故有 $M_1M_2=m'=(a-c)/2$。

从关于平行线的定理可以得出梯形每一边的内角是互补的。

在梯形非平行边上的内角之和等于 180°。

作一个梯形，需要四个独立的数据，而对于等腰梯形只要三个数据就够了。

等腰梯形的两条对角线相等，底角也相等。

风筝形和燕尾形

两对邻边相等的凸四边形称为**风筝形**。

风筝形的对角线互相垂直，其中一根是对称轴，将四边形分成两个全等的三角形，另一根将它分成两个等腰的三角形（见图）。四边相等的风筝形是一菱形。

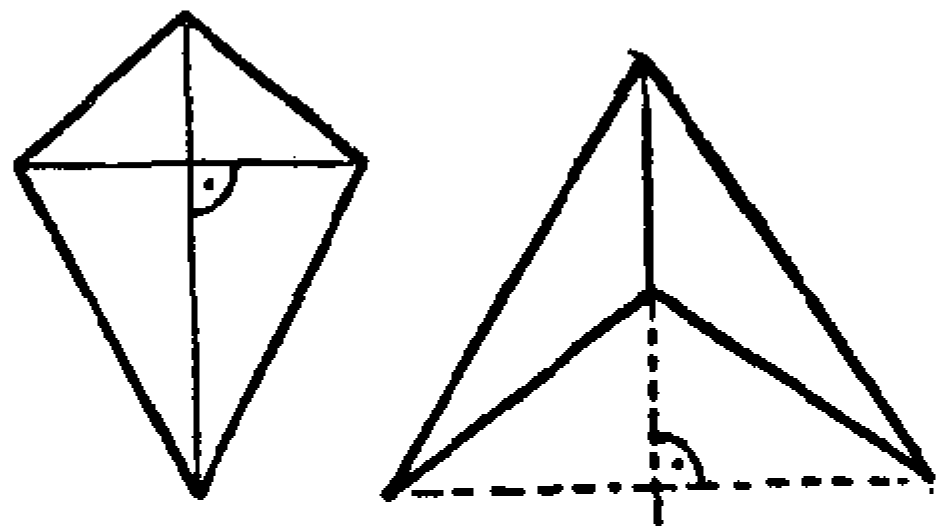


图 7.5-7 风筝形（左）和燕尾形（右）

两对邻边相等的凹四边形是一**燕尾形**（见图 7.5-7）。和风筝形一样，它的两条对角线相互垂直，其中一根是对称轴，将它分成两个全等的三角形。另一根对角线在四边形的外面，它是两个等腰三角形的底，而三角形的腰是那两对相等的四边形的边。可以用燕尾形来作出一线段的中点，而这线段处于有限平面区域的边缘。用这方法作图可不必超越这个区域的范围。决定一风筝形或燕尾形需要三个独立的数据。

7.6 多边形

一般多边形

由直线组成的封闭平面图形称为多边形，它们可以根据顶点的数目来进行分类。三角形和四边形是特殊的多边形。如果两条非相邻的边相交，则称它是**反折的**。如果连接多边形任意两点的线段总是在多边形的内部，则它是**凸的**。在这种情况下，任意一个顶角都小于180°。否则的话，则称多边形是**凹的**，它有一个或一个以上的凹角，该处的内角大于180°（见图7.6-1）。

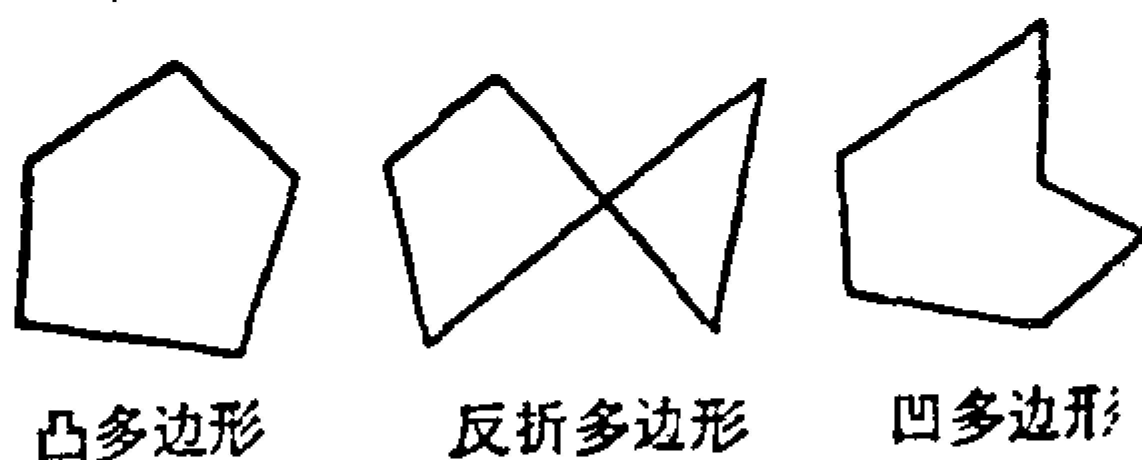


图7.6-1 各种类型的多边形

连接多边形相邻顶点的线段称为它的边，其他一些连接顶点的线段称为它的**对角线**。边的数目等于顶点的数目。在有n个顶点的n边形中，每一个顶点用对角线和其他$n-3$个顶点连起来。但是从第k个顶点到第m个顶点的对角线同从第m个顶点到第k个顶点的对角线是同一根，因而n边形的对角线数目是$n(n-3)/2$。对于$n=3$，公式表明三角形没有对角线。对于$n=4$，表明四边形有两根对角线。和n边形的一个顶点相连的对角线将多边形分成$(n-2)$个三角形。因此**凸**n边形的内角之和是$(n-2)\cdot180°$。这公式给出了三角形内角之和是180°，以及四边形的内角之和为$2\cdot180°=360°$。

正凸n边形

正凸n边形有n条相等的边和n个相等的角。在正n边形内可以有一个**内切圆**，它的每条边是圆的切线。同时另外有一个圆与它**外接**，n边形的每条边是圆的弦。由于凸n边形的内角之和是$(n-2)\cdot180°$，以及所有的内角都相等，因而每个内角为$\alpha=(n-2)\cdot180°/n=180°-360°/n$。正$n$边形的顶点到外接圆的圆心$M$的一些半径将它分成$n$个全等的等腰三角形，每个等腰三角形的顶角是$360°/n$，因而这一角度和$r$一起完全可以决定这个正$n$边形。

正六边形 在这情况下，这六个全等三角形是等边三角形，它们所

如果正十边形内接于一半径为 r 的圆，以及 r 被黄金分割，那末分成的线段中较长的一段就是正十边形的边。

正十边形可以用下面的方法作出：作出半径为 r 的圆的直径 AB，作出垂直于它的半径 MD，设 H 是 AM 的中点，根据毕达哥拉斯定理，

$$|HD|^2=|DM|^2+|HM|^2=(r/2)^2+r^2=(5/4)r^2。$$

这样，$|HD|=r\sqrt{5}/2$。以 H 为圆心、$|HD|$ 为半径的弧交于 MB 的 E 点，那末

$$|ME|=|HE|-|HM|=(r\sqrt{5}-r)/2=s_{10}。$$

一个隔一个地取正十边形的顶点，可以得到正五边形，因而有正 5 边形，正 10 边形，正 20 边形，……，正 $5\cdot2^n$ 边形这一整个序列。

正十七边形 对于上面讨论的正多边形以及正 15 边形(它的圆心角为 24°，可由(60°/4)+(72°/8)=15°+9° 来作出)的作法，古希腊的数学家就已知道。直到 1796 年才发现正多边形的另外一些作法。在那一年，刚满十九岁的高斯证明了用直尺和圆规是能作出正 17 边形的。在他的第一本科学著作(1796 年 6 月 1 日)中写道：

"对于每个几何初学者来说都知道某些正多边形，即那些三边的，五边的以及十五边的，还有那些边数加倍的正多边形都可以用几何的方法作出。在欧几里得时代就具备了这些知识。似乎从那时起，人们确信初等几何的领域不能再有所扩展了。至少我知道在这一方面试图进行的突破，没有取得一点成功。在我看来，对其他许多正多边形，特别是正 17 边形能用几何方法作出这一发现应格外引起注意。

这一发现只是一种更广泛的理论的必然结果。这种理论还不十分完善，一旦完成就会公布于众。——哥庭根大学数学系学生，勃伦斯维克的 C. F. 高斯。"

这里高斯所讲的理论，就是他的割圆方程 $x^n-1=0$ (n 为自然数)的理论。这方程的根，即 1 的 n 次方根，在沿着高斯的复数平面的单位圆周的正则区间内，这个圆的圆心是实轴和虚轴的交点，它的半径为 1。如果 n 为形如 $2^{2^k}+1(k=0, 1, 2, \cdots)$ 的素数，高斯证明了单用直尺和圆规可以将这个圆分成 n 等分。

事实上，对于 $k=0,1$ 和 2，可得到素数 3, 5 和 17。

高斯给了他的学生盖林(Gerling)关于 $\cos\varphi(\varphi=(360/17)°)$ 的实数表示，其中只含有有理数和平方根：

n	圆心角	边长	周长	面积
3	120°	$r\sqrt{3}$	$2r\cdot 2.59807621\cdots$	$\frac{3r^2}{4}\sqrt{3}\approx 1.29990r^2$
4	90°	$r\sqrt{2}$	$2r\cdot 2.82842712\cdots$	$2r^2$
5	72°	$\frac{r}{2}\sqrt{10\quad 2\sqrt{5}}$	$2r\cdot 2.93892626\cdots$	$\frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\approx 2.3776r^2$
6	60°	r	$2r\cdot 3$	$\frac{3r^2}{2}\sqrt{3}\approx 2.5981r^2$
8	45°	$r\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$2r\cdot 3.06146746\cdots$	$2r^2\sqrt{2}\approx 2.8284r^2$
10	36°	$\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$	$2r\cdot 3.090169923\cdots$	$\frac{5r^2}{4}\sqrt{10\quad 2\sqrt{5}}\approx 2.9389r^2$
12	30°	$r\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$2r\cdot 3.10582854\cdots$	$3r^2$
15	24°	$\frac{r}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$	$2r\cdot 3.11867536\cdots$	$\frac{15r^2}{8}\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}\approx 3.0505r^2$
16	22°30′	$r\sqrt{2\quad\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$2r\cdot 3.12144515\cdots$	$4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 3.0615r^2$
17	$21°10'35^{5}/_{17}''$	$\approx 0.36749904r$	$2r\cdot 3.12374180\cdots$	$\approx 3.0706r^2$
20	18°	$r\sqrt{2-\sqrt{(5+\sqrt{5})/2}}$	$2r\cdot 3.12868930\cdots$	$\frac{5r^2}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}\approx 3.0902r^2$
24	15°	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$2r\cdot 3.13262862\cdots$	$6r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}\approx 3.1058r^2$
	一般	$s_{2n}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-s_n^2}}$		

方形分成 a 根长条，每条有 a 个单位正方形，因而面积为 $a\cdot a=a^2$ 个单位正方形(见图 7.7-1)。

边长为 a 的正方形面积	$A=a^2$

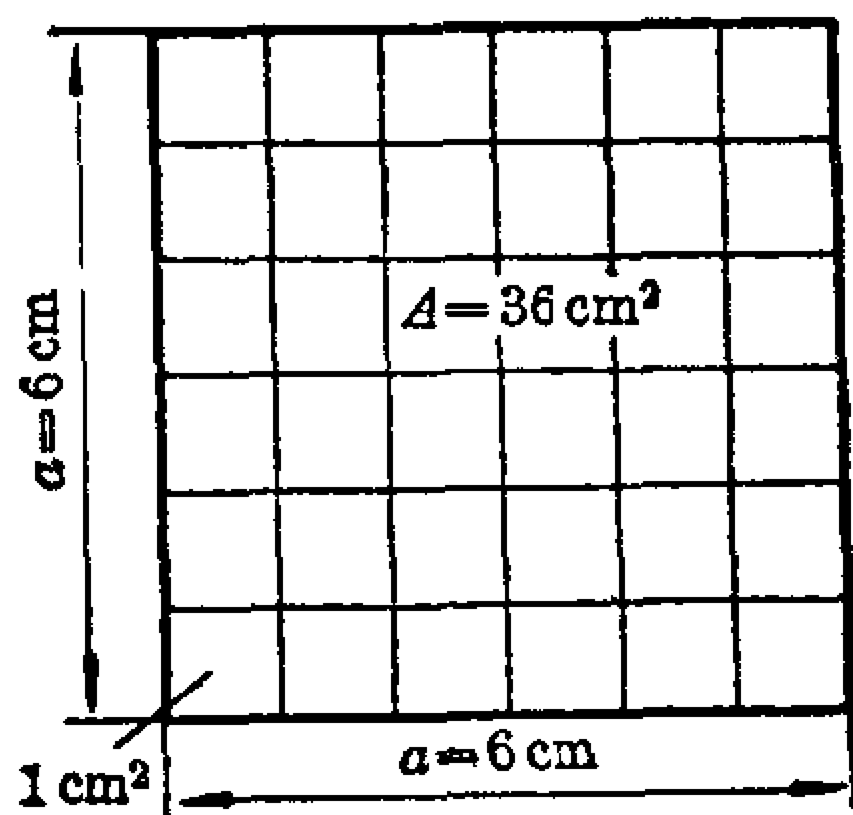


图 7.7-1　正方形面积

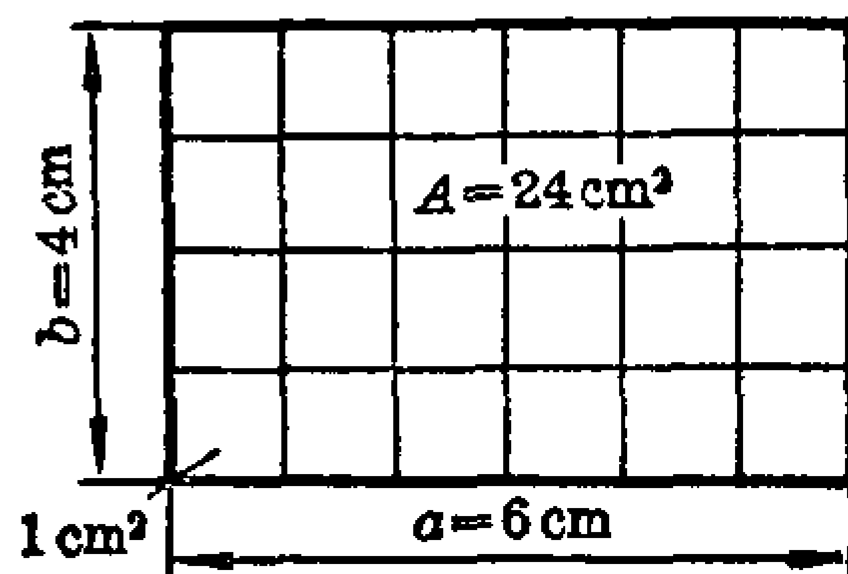


图 7.7-2　长方形的面积

长方形　边长为 a 和 b 的长方形能被 a 根长条覆盖，每根长条有 b 个单位正方形(见图 7.7-2)。因此它的面积为 $a\cdot b$ 个单位正方形。

边长为 a 和 b 的长方形面积	$A=a\cdot b$

在上面两种情况，都假定存在一些单位正方形，它们的边长和要测量的正方形或长方形的边长是能够通约的。但对于边长是任意实数，公式也成立。如果 a 和 b 是单位长度 e 的有理倍数，$a=(p_1/q_1)\cdot e$ 和 $b=(p_2/q_2)\cdot e$，那末这面积能被边长为 e' 的一些正方形覆盖，这里

$$e=[q_1,\ q_2]\cdot e',$$

$[q_1,\ q_2]$是 q_1 和 q_2 的最小公倍数。

在 I. 第 3 章内，已证明了每一个实数可用有理数来近似，其精度可以是任意的。用积分学的方法，可在合适的坐标系统中，对边界能用连续函数来描述的图形进行面积计算。

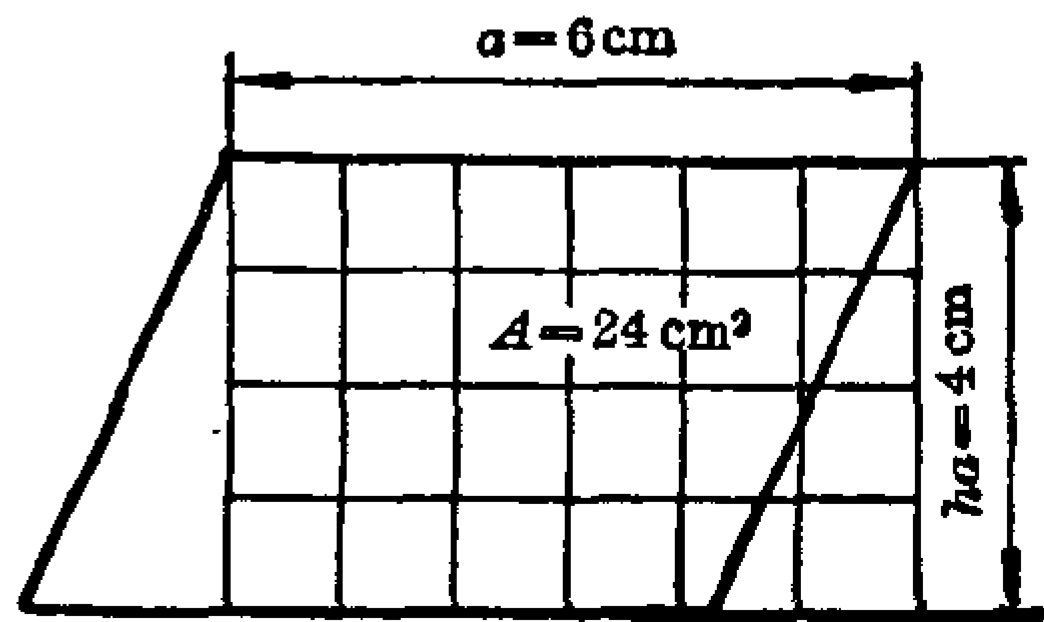


图 7.7-3　平行四边形面积

平行四边形　若从一边搬下一个直角三角形放到另一边上去，一般的平行四边形都可以变换成与之等积的长方形(见图 7.7-3)。如果平行四边形的高定义为从一边到对边的垂线的

长度，那末面积可用一边的长度和所对应的高的乘积来表示:

$$A=a\cdot h_a=b\cdot h_b。$$

平行四边形面积	$A=a\cdot h_a=b\cdot h_b$

平行四边形的面积是一边长与所对应的高的乘积。

三角形 任何一个三角形都可以看成是半个平行四边形（见图7.7-4）。因此，三角形的面积是底边和高乘积的一半：$A=c\cdot h_c/2$。在一直角三角形中，如果选择两直角边中的一条作为底，则另一条就作为高。这样，如果 a 和 b 是这两条直角边，面积就为 $a\cdot b/2$。等边三角形的边长为 a，高为 $a\sqrt{3}/2$（这是从毕达哥拉斯定理推出的），则 $A=a^2\sqrt{3}/4$。

三角形的面积是底和高乘积的一半

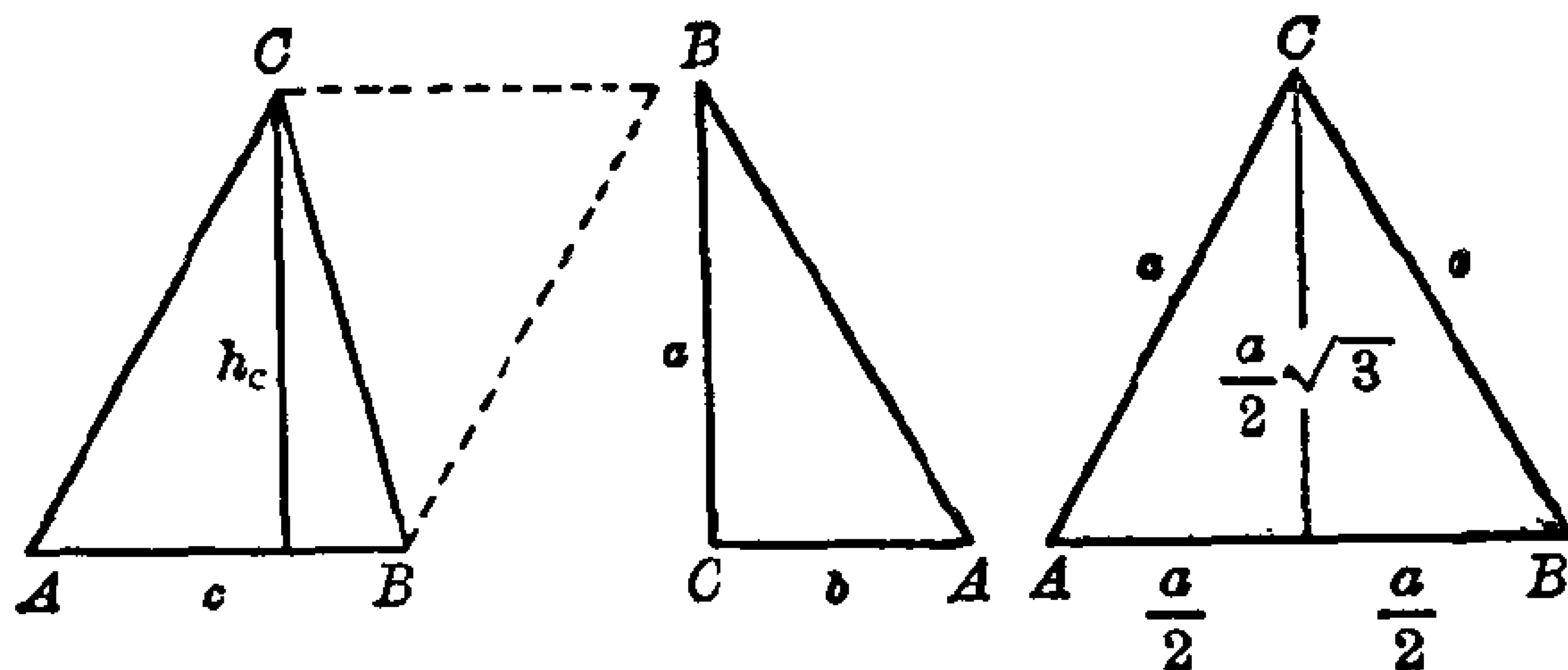


图 7.7-4 三角形的面积

三角形面积	$A=a\cdot h_a/2=b\cdot h_b/2=c\cdot h_c/2$

只用边来表示三角形面积的公式由赫伦(Heron)给出:

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\quad 这里\ 2s=a+b+c。$$

对于阿基米德来说，或许他已知道这一公式。赫伦三角形是指所有的边和面积都能用有理数来表示的三角形。例如，如果 $a=13$，$b=14$ 及 $c=15$，则 $A=\sqrt{21\cdot(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6}=\sqrt{4^2\cdot3^2\cdot7^2}=84$ 单位面积。三角形的面积也可用角与外接圆半径或内切圆的半径来表示（参见 I. 第 11 章——另外一些定理与应用）。

梯形 为了求出梯形 $ABCD$ 的面积，将它对一条（非平行）边上的中点进行反射（或关于这点旋转 180°，结果是一样的）（见图 7.7-5）。

这样得到的平行四边形的面积是梯形的两倍。一条边的长度为 $a+c$，所对应的高 h 是梯形的高，因此 $A=(1/2)\cdot(a+c)\cdot h$。由于梯形中线 m 的长度为 $(a+c)/2$，故也可写成 $A=m\cdot h$。

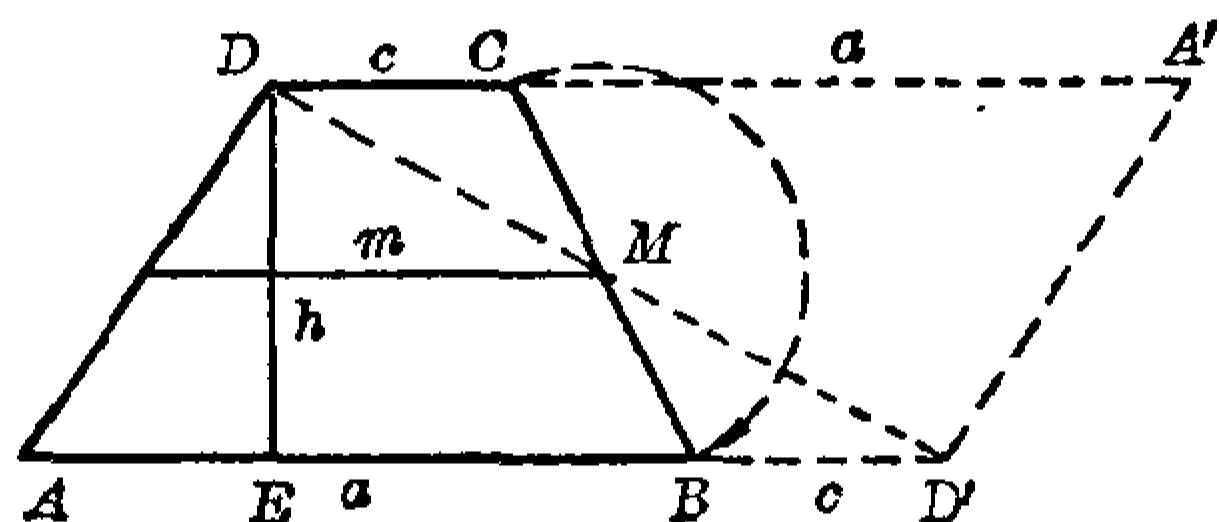


图 7.7-5　梯形的面积

梯形面积 (m 为中线，h 为高)
$A=m\cdot h=(a+c)\cdot h/2$

梯形的面积是中线和高的乘积。

如果梯形的 a 等于 c，那末它是一个平行四边形。公式就变成 $A=(a+a)\cdot h/2=a\cdot h$，这也就是平行四边形的面积公式。如果 $c=0$，梯形就成了一个三角形，公式 $A=(a+0)\cdot h/2=a\cdot h/2$ 变成三角形的面积公式。

风筝形　风筝形被它的对角线 e 和 f 分成四个直角三角形（见图 7.7-6），这可得出 $A=e\cdot f/2$ 这一公式，式中只出现了对角线。这公式也适用于菱形，因它是风筝形的特例。而对于对角线为 d 的正方形，公式变成 $A=d^2/2$。

对角线为 e 和 f 的风筝形面积	$A=e\cdot f/2$

风筝形的面积是对角线乘积的一半。

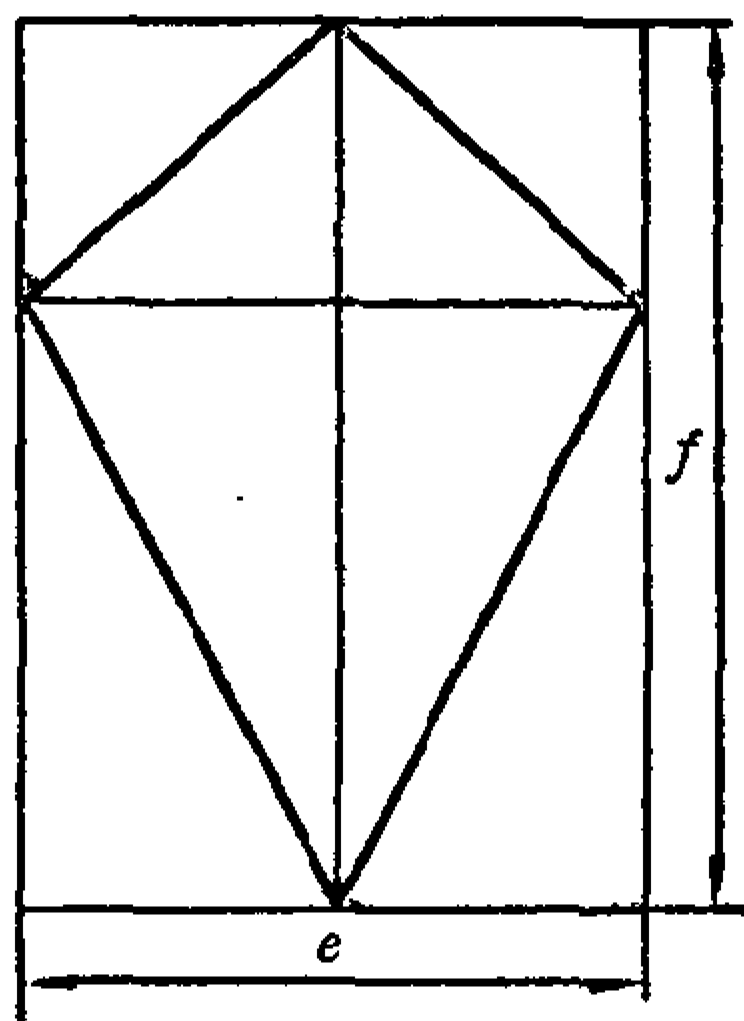


图 7.7-6　风筝形的面积

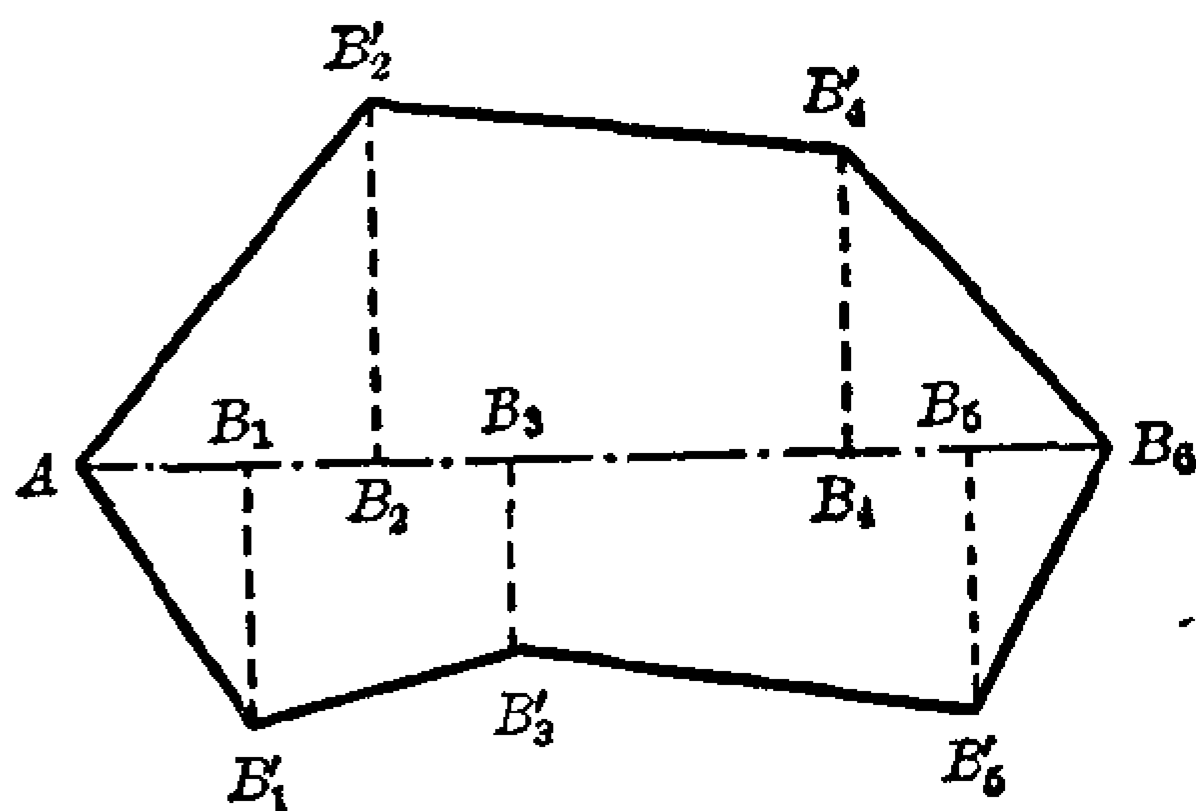


图 7.7-7　一般多边形的面积

一般多边形　除了正多边形外，习惯上对一般多边形不建立面积公式。要计算多边形的面积，可将它分成一些三角形和梯形，因而往往要计算一些关于三角形的边长和高的辅助数据。

最好将多边形分成能用上面的公式进行计算的图形。在实践中，真正起作用的与其说是计算的难易，不如说是数据测量的精度。

图 7.7-7 表示了一个不规则多边形，它被分成一些三角形和梯形。

直角三角形的面积定理

毕达哥拉斯定理　由于这一定理在平面几何的一些计算和证明中起主要作用，因而它是该学科中最有名的定理之一。通常将它的发现归功于萨摩斯的毕达哥拉斯（约公元前 580～496 年），但这并不十分确实。有关他生平能考证的详细历史资料很少，然而关于他和他的一生却有很多神话和传说。他的定理甚至激励过一些诗人。

毕达哥拉斯定理：在直角三角形中，斜边的平方等于其他两边的平方之和（见图 7.7-8）。

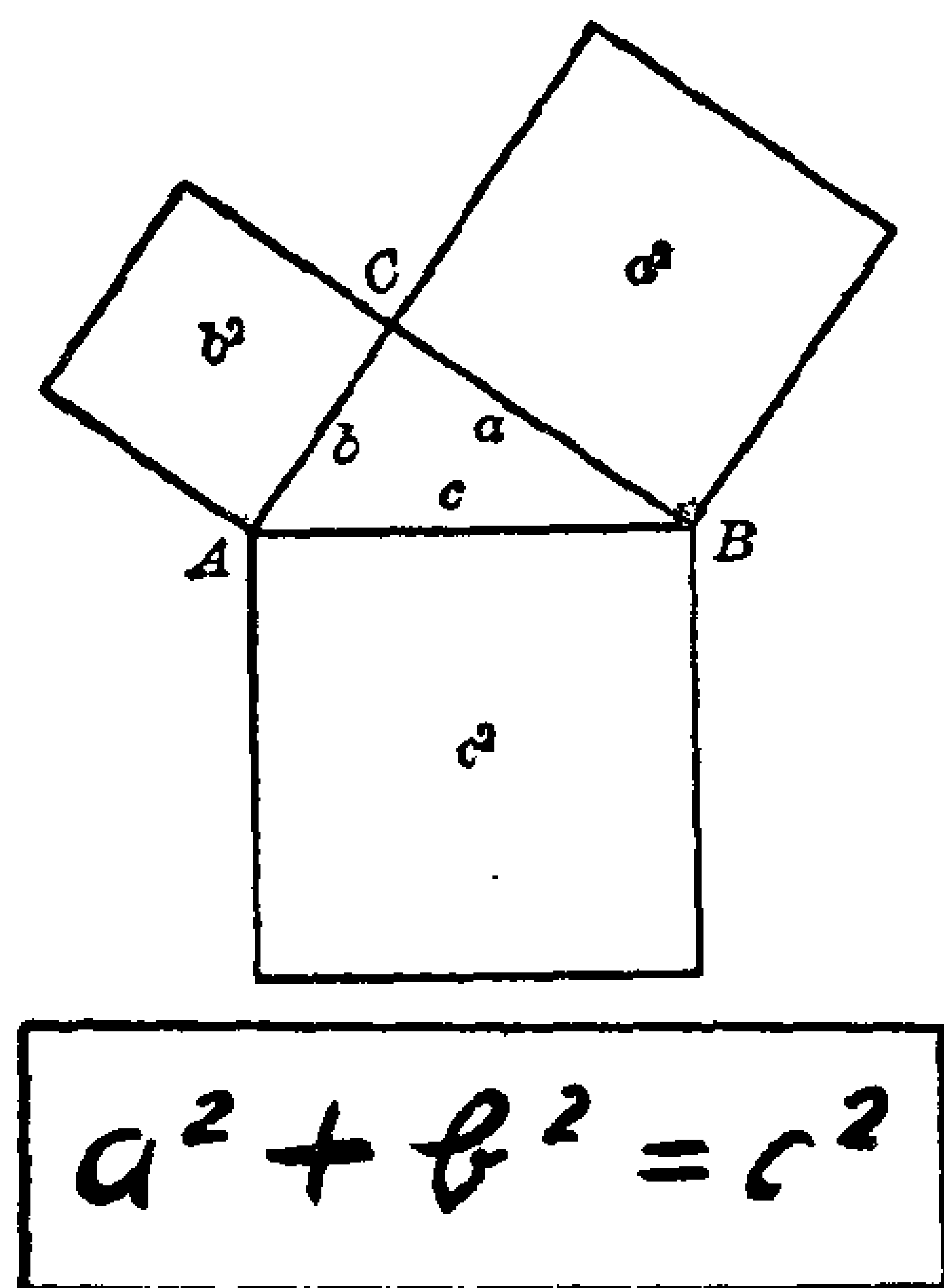


图 7.7-8　毕达哥拉斯定理

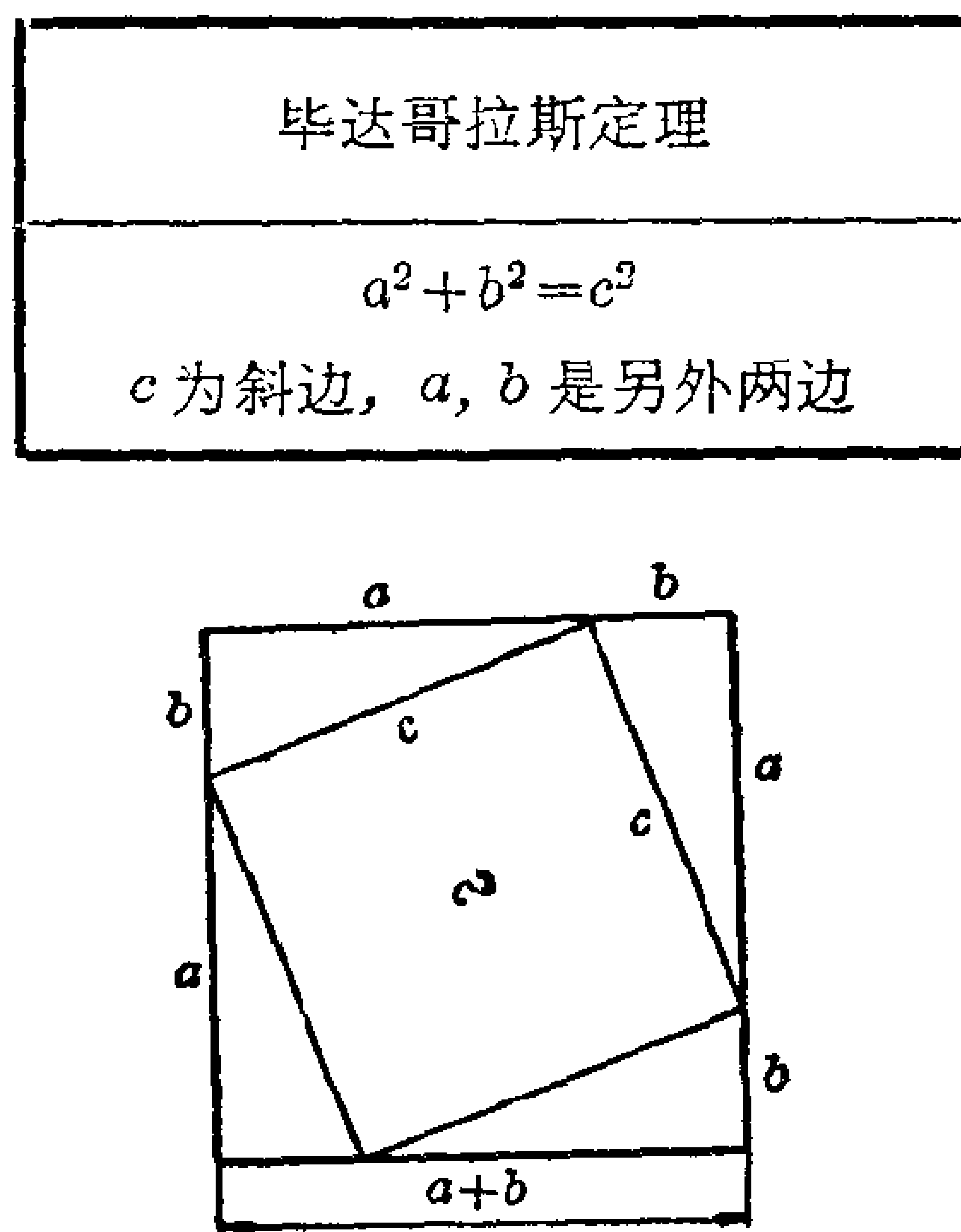


图 7.7-9　用分割来证明

已知有一百多种方法能证明这一定理。其中最简短的一种，恐怕要算下面的一种。从图 7.7-9 可以明显地看出，大正方形的面积 $(a+b)^2$

等于小正方形的面积 c^2 加上四个直角三角形的面积。故有

$(a+b)^2=c^2+2ab$　或　$a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$，因而有 $a^2+b^2=c^2$。

欧几里得定理　毕达哥拉斯定理的经典证明是根据下面的欧几里得定理。

在一直角三角形中，在一直角边上的正方形面积和一个长方形的面积相等，这长方形的一边是这直角边在斜边上的投影，另一边是斜边本身（见图 7.7-10）。

$a^2=p\cdot c$	$b^2=q\cdot c$

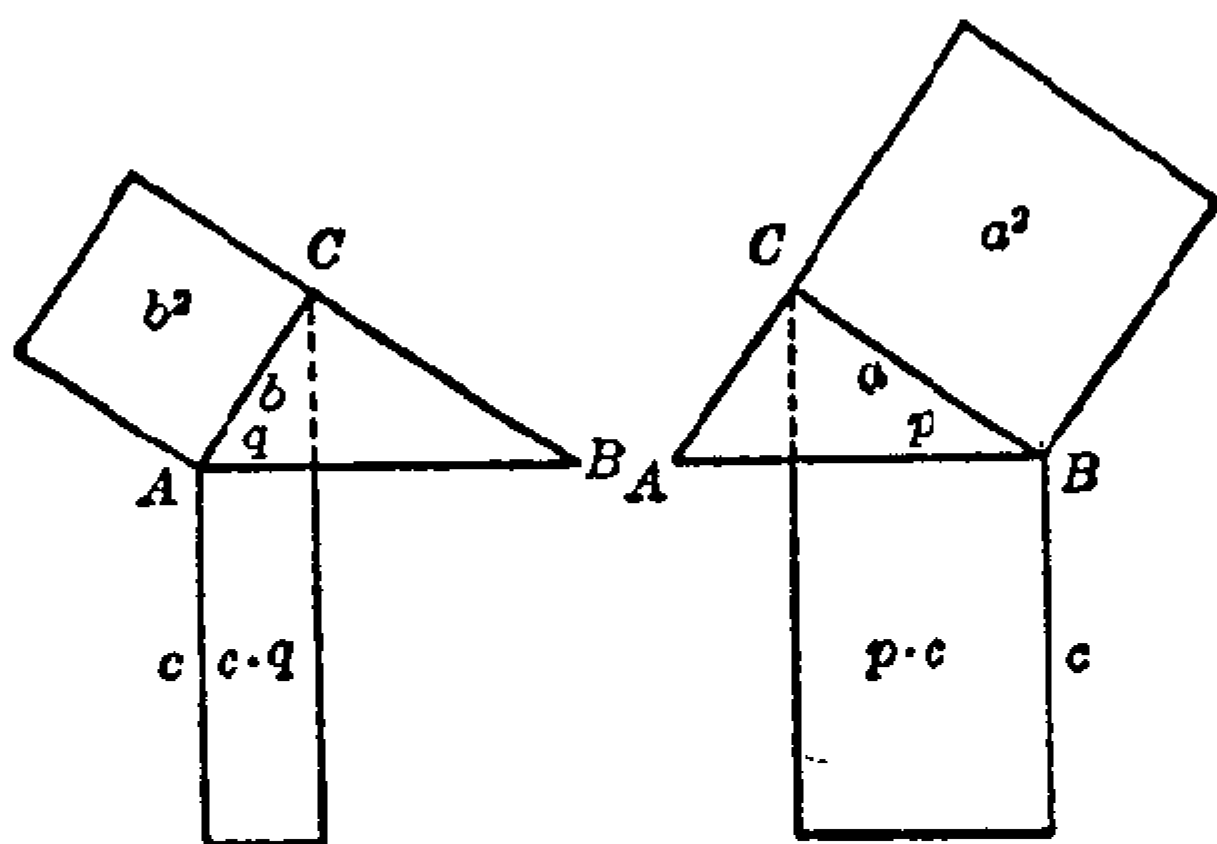


图 7.7-10　用欧几里得定理所得的相等面积

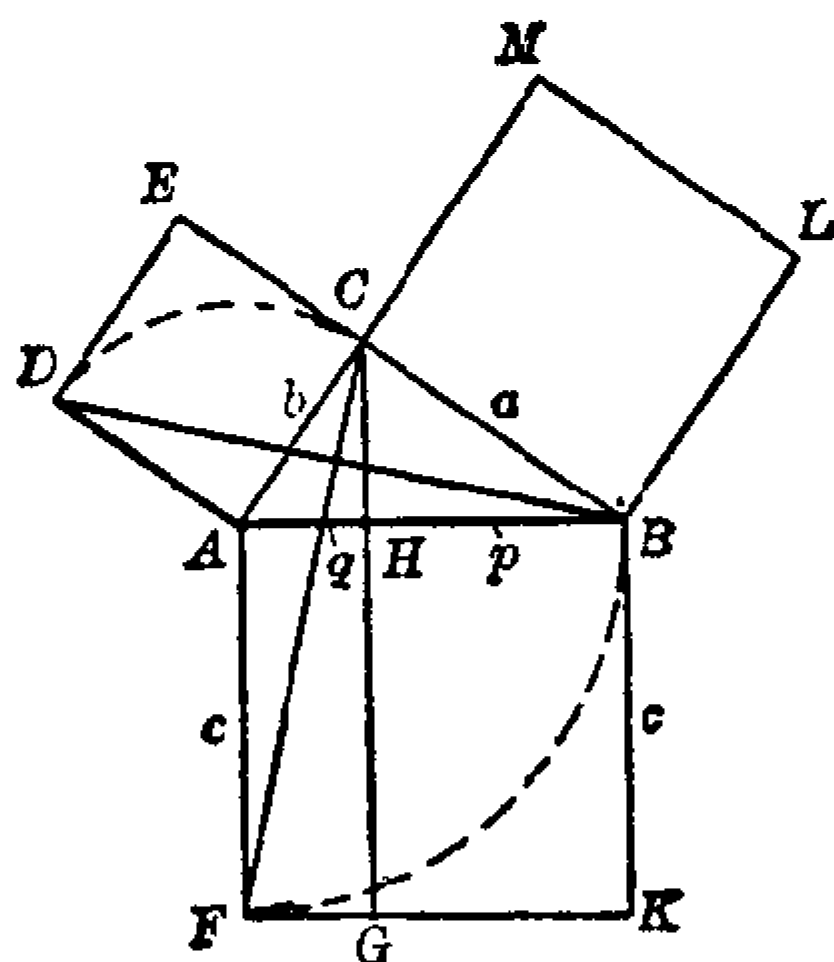


图 7.7-11　欧几里得定理和毕达哥拉斯定理的证明

三角形 ABD 和正方形 $ACED$ 具有相同的底和相同的高 $|AC|$，因此它的面积是正方形的一半（见图 7.7-11）。如果将它关于 A 点旋转 $90°$，那末 D 变成 C，B 变成 F，三角形 AFC 和 ABD 全等。它和长方形 $AFGH$ 具有相同的底 $|AF|$ 和相同的高 $|AH|$，因此它是长方形面积的一半。长方形和正方形的面积一定相等，换句话说，$b^2=q\cdot c$。同理有 $a^2=p\cdot c$。将这两表达式相加，即得到毕达哥拉斯定理：

$$a^2+b^2=cp+cq=c(p+q)=c\cdot c=c^2。$$

毕达哥拉斯定理有许多应用，其中一些是：计算正多边形的面积，解析几何中计算点之间的距离，计算等边三角形的高或四面体的高等等。

垂线定理　关于直角三角形，另一个有趣的定理是垂线定理：

<u>在直角三角形中，以斜边上的垂线为边的正方形面积等于以斜边上两线段为边的长方形的面积。</u>

垂线定理	$h^2=q\cdot p$

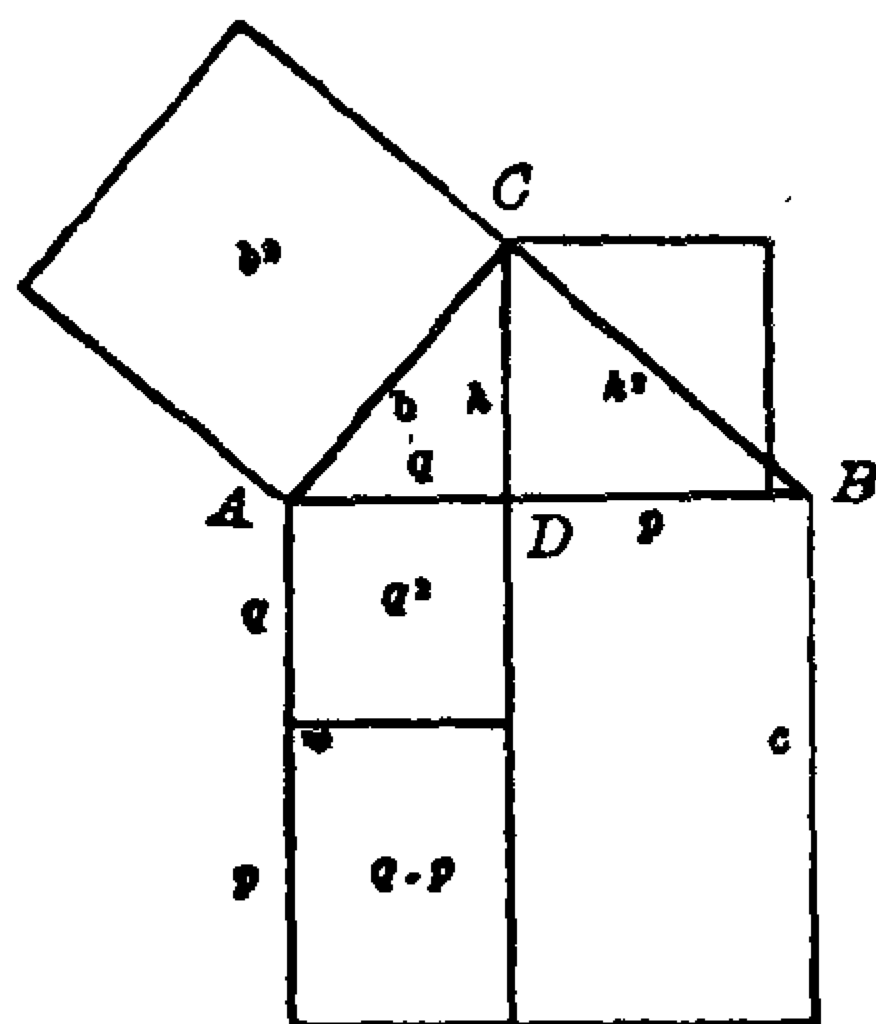


图 7.7-12 垂线定理

其证明要用相似定理（见图7.7-12）。由于垂线CD将ABC分成两个角相等的三角形，因此，这两个三角形是相似的，

$$\triangle ADC\sim\triangle CDB。$$

故有：

$$q:h=h:p$$

或

$$h^2=p\cdot q。$$

面积的变换

每个凸多边形都可以变换成面积相等的正方形。由于底和高相等的三角形面积相等，可将多边形的顶点S_1平行于对角线$d_n=|S_nS_2|$移动到直线$S_{n-1}S_n$上的一点S'_1。$\triangle S_nS_1S_2$的面积等于$\triangle S_nS'_1S_2$的面积。因此n边形变换成了面积相等的$(n-1)$边形（见图7.7-13a）。这过程一直可继续到将多边形变换成一个三角形为止，这三角形的面积等于原来的多边形面积（见图7.7-13b）。它的高是$h_D=|B'C|$，以$|FC|=h_D/2$和$|CD|=|AB|$为边的长方形$CDEF$的面积等于这三角形的面积。如果将$|FC|$和$|EF|$取作直角三角形FGK斜边上（被垂线所分）的两段线段p和q，那末（根据垂线定理），正方形$CIHK$的面积为$h^2=p\cdot q$，也就是原来多边形的面积。为了作出三角形FGK，可在过FC的直线上作$|CG|=|CD|$，然后以$|FG|$为直径作泰勒斯圆。

从下面关于互补平行四边形的定理可得到其他一些面积的变换。和前面的一条定理一样，这一条定理也包括在欧几里得的第一本著作内。它指出：

<u>如果过平行四边形对角线上任意一点作平行于平行四边形边的直线，那末在所形成的四个平行四边形中，和对角线不相交的那两个平行四边形面积相等（称它们为互补的平行四边形）。</u>

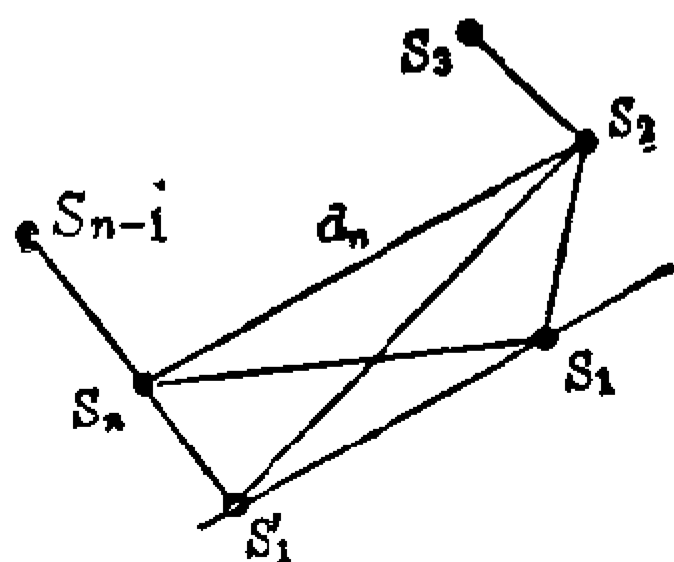


图7.7-13a n 边形 S_1, S_2, … S_n 变换成等积的 $(n-1)$ 边形

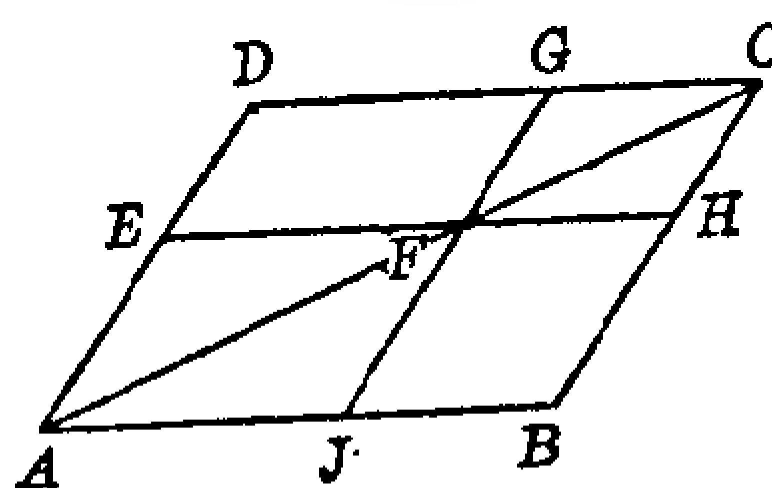


图7.7-14 互补平行四边形定理

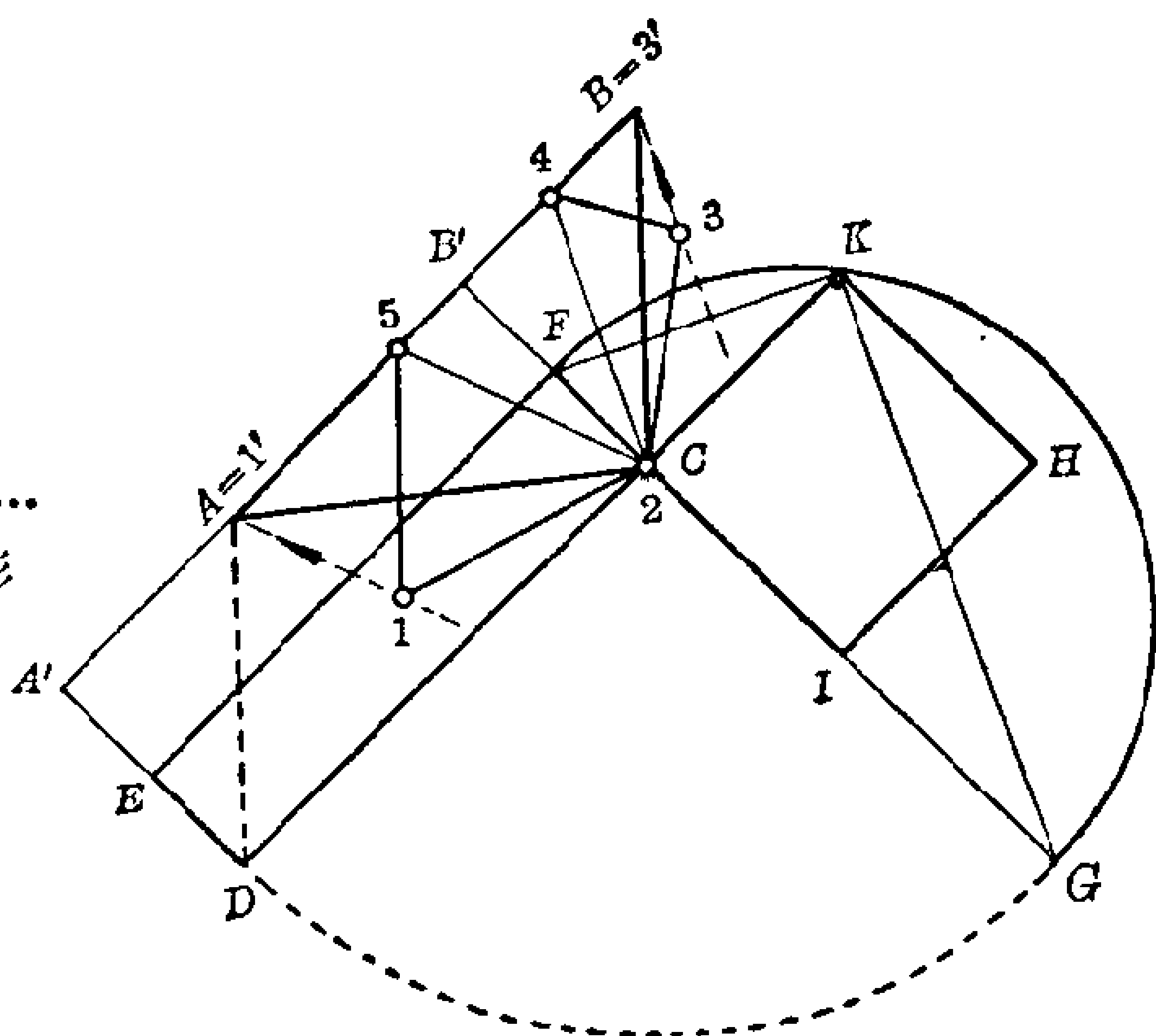


图7.7-13b 五边形变换成面积相等的正方形

证明如下(见图7.7-14):对角线 AC 将平行四边形分成两个全等的三角形 ABC 和 ACD。由于 $JG \parallel AD$ 及 $AB \parallel EH$,很明显有 $|AJ|=|EF|$ 和 $|JF|=|AE|$,因此三角形 AJF 和 AEF 全等。同样,有 $\triangle FCG$ 和 $\triangle FHC$ 全等。如果两全等三角形 ABC 和 ACD 减去这些全等的三角形,剩下的就是要证明的两个平行四边形。因此,它们的面积一定相等。

7.8 相似

相似的概念

相似比 相似是图形之间的一种几何关系,这些图形具有相同的形状,但大小不一定相同(见图7.8-1)。采用使图形的角度保持不变的这种一一对应的几何变换,可以使相似图形之间互相变换。下面是一种等价的定义:

在相似图形中,一个图形中的线段和另一图形中对应的线段成固定的比。

例如,如果三角形 ABC 以这种 $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ 和 $\gamma=\gamma'$ 方式映射到三角形 $A'B'C'$,那末这两个三角形是相似的(记作 $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$)(见

图 7.8-1)。角度的相等也意味着 $a':a=b':b=c':c=k$，称这相似图形对应线段之间的比例常数 k 为**相似比**。如果 $k>1$，图形比原来大，这种变换称为放大。如果 $k=1$，图形和原来全等，这种变换是一种恒等变换。对于 $0<k<1$，图形比原来小，这种变换称为缩小。

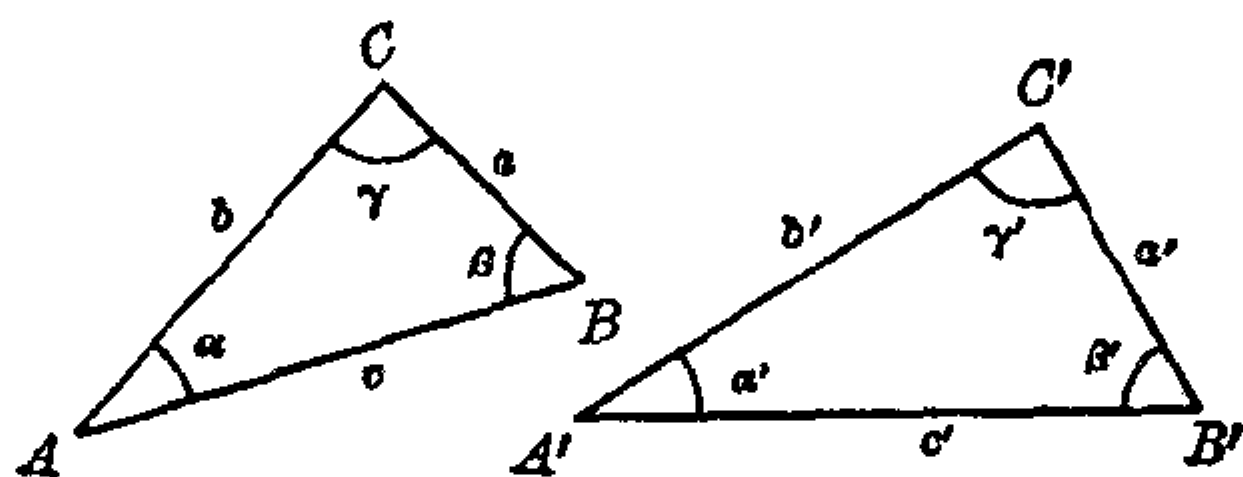


图 7.8-1　相似三角形

透视　两相似的图形通过恒等变换，能移动到一种特殊的相对位置。处于这种位置，对应的线段相互平行，我们称它们是**成透视的**。如果两个图形成透视的，一图形映射到另一图形的变换可从一线束(有可能是平行的)得到，称线束的承载点为**透视中心**。

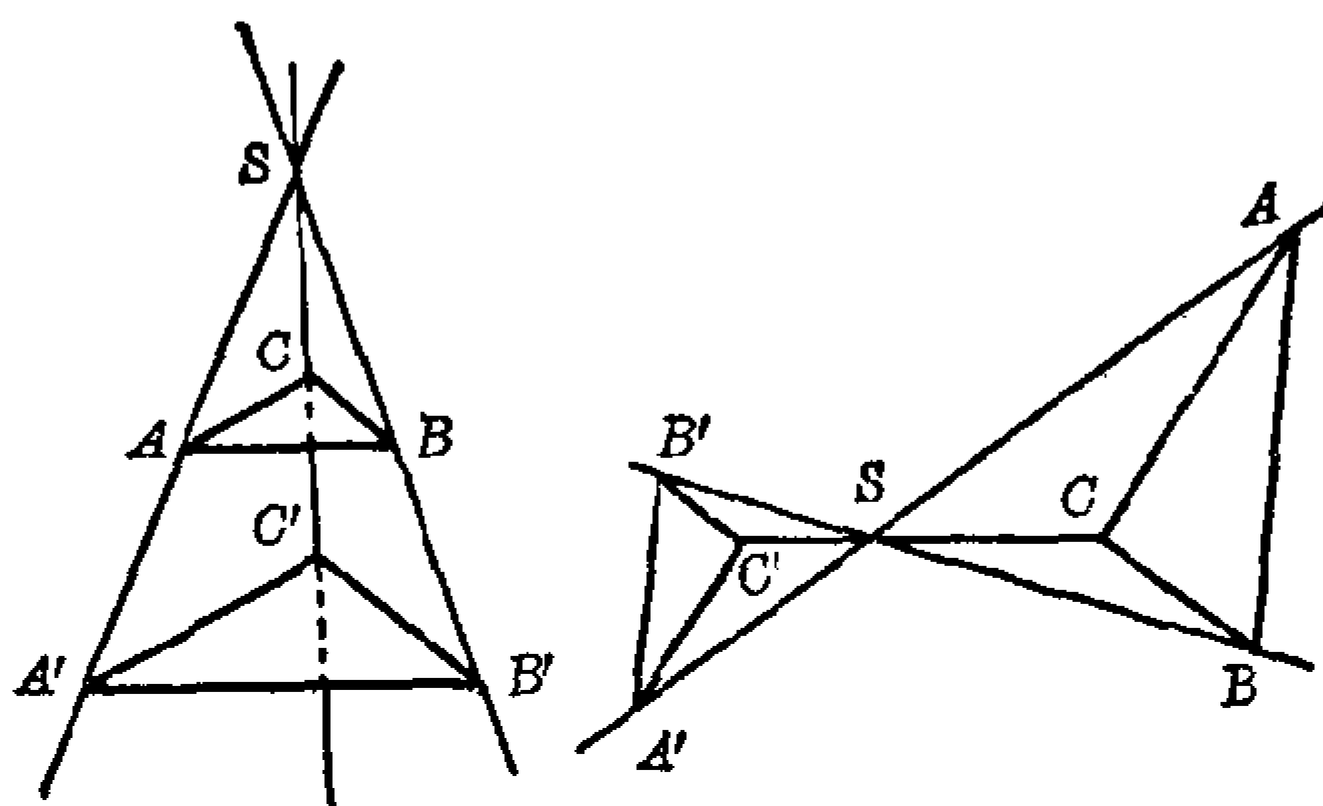


图 7.8-2　成透视的图形

从上面给出的相似三角形的比，容易得出下面一些比例式：

$$a:b=a':b';\quad a:c=a':c';\quad b:c=b':c'。$$

这些关系常表达为连比：

$$a:b:c:\cdots:n=a':b':c':\cdots:n'。$$

从这里可以看出，在相似图形中，一图形两条线段之间的比等于另一图形对应的线段之间的比。

截距定理

下面一些定理可以直接从相似的定义中得出：

如果一线束和两条平行线相交，那末

a) 线束中任意一根直线上的线段所成的比和另外任意一根直线上的线段所成的比相等；

b) 平行线上处于线束中任意两条固定直线之间线段之比等于线束中任意一条直线上处于每一条平行线和线束承载点之间的线段之比；

c) 平行线上位于线束中任意两条直线之间的线段所成的比和线束中其他任意两条直线之间的线段所成的比相等。

这样，图7.8-3中下列比例式成立：

由a)可有　$|SA|:|AB|=|SC|:|CD|$，　$|SA|:|SB|=|SC|:|SD|$，$|SA'|:|SB'|=|SC'|:|SD'|$，$|SA'|:|A'B'|=|SC'|:|C'D'|$；

由b)可有　$|AC|:|BD|=|SA|:|SB|$，　$|A'C'|:|B'D'|=|SA'|:|SB'|$；

由c)可有　$|A_1A_2|:|B_1B_2|=|A_2A_3|:|B_2B_3|=|A_3A_4|:|B_3B_4|$。

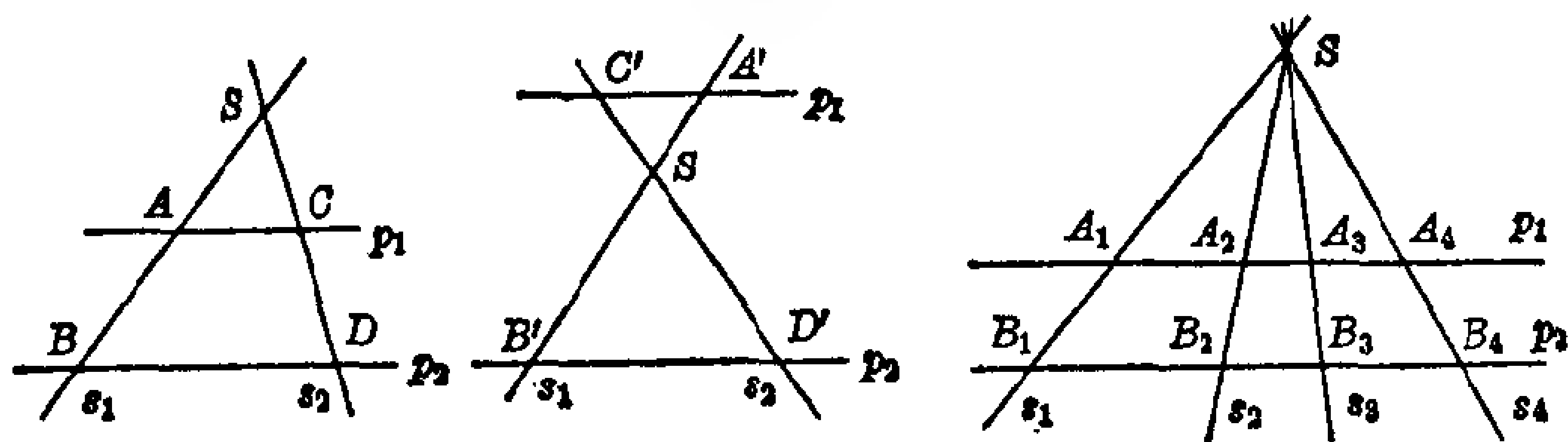


图7.8-3　截距定理

这些定理是关于两线段长度进行比较的可能性的定理，它们和是否可用同一单位量度这一经典问题密切相关。选择一合适的度量单位，使两条线段的长度都为有理数，则这两根线段称为是可公度的。在历史上可公度性这概念是很重要的。因为在经典数学中，只允许对有理数，而不是对任意的实数进行计算。在一些问题的论证中，在一些作图和测量过程中，这些定理得到了广泛的应用。楔形规就是这样一种例子(见图7.8-4)。对于图中的例子，采用这些定理可得到下列一些比例式：

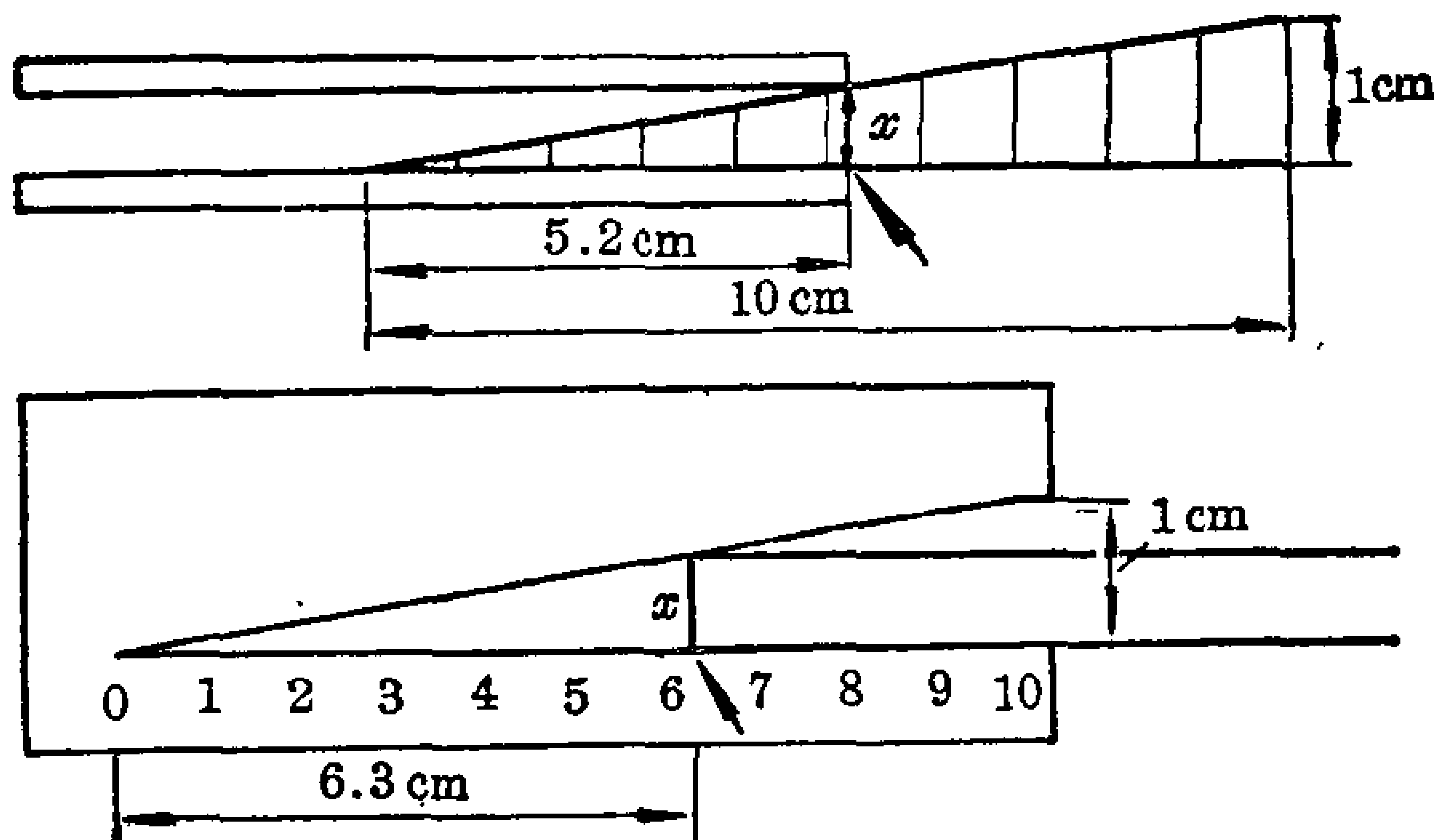


图7.8-4　楔形规

对于例1：$x:1=5.2:10$　或　$x=0.52\,\mathrm{cm}$；

对于例2：$x:1=6.3:10$　或　$x=0.63\,\mathrm{cm}$。

也可用这些定理来测量高（例如一棵树的高度）或距离（例如一条河的宽度）（见图 7.8-5）。

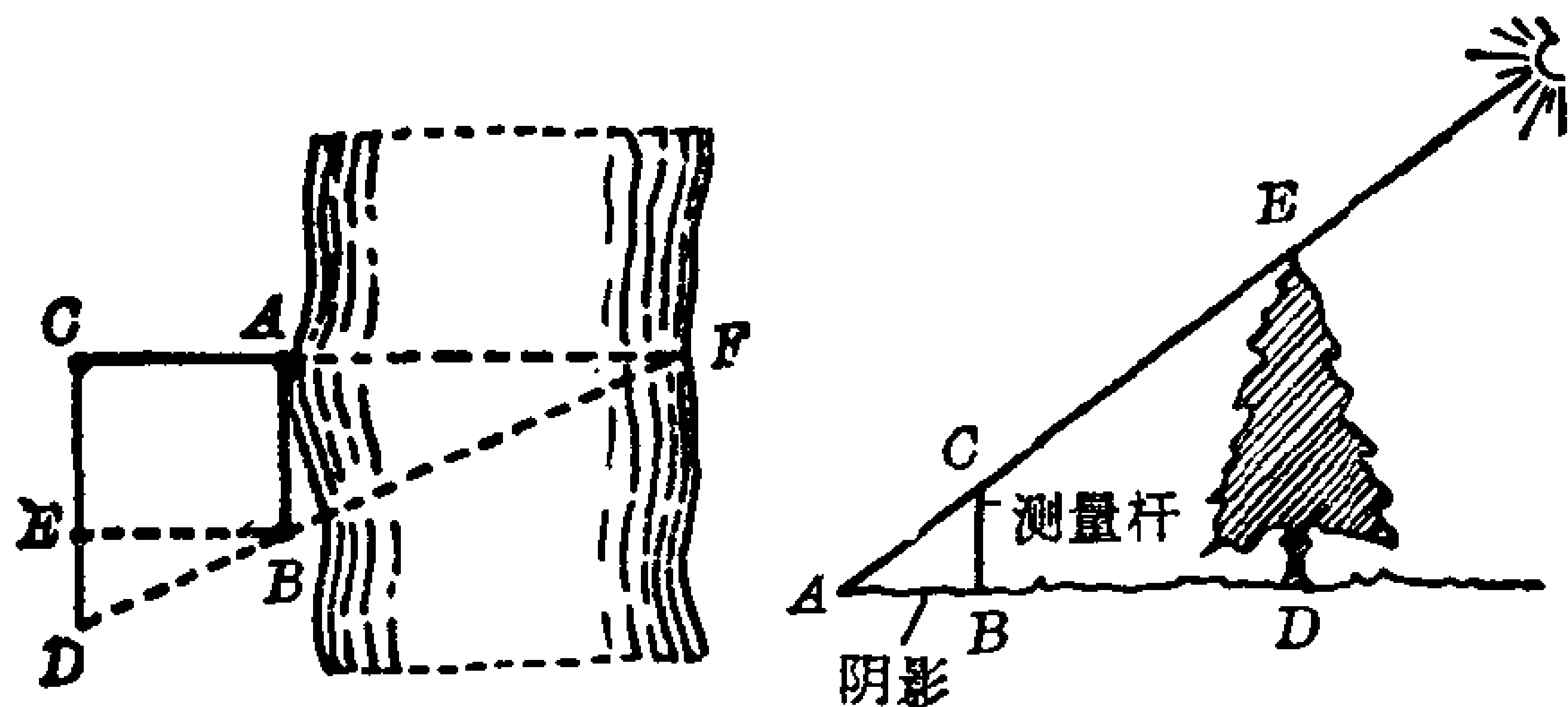


图 7.8-5　利用截距定理测量宽度和高度分别有：
$|FA|:|BE|=|AB|:|ED|$ 或 $|AB|:|AD|=|BC|:|DE|$

相似定理

在相似的定义中要求所有的角相等或者所有对应线段成比例。下面的相似定理则指出如果满足某种条件的角和对应边的比相等，则其他一些角和对应边的比也相等。

主要有四个定理：

如果　**1．一个三角形的两个角和另外一个三角形对应的角相等；**

或　**2．一个三角形两条边的比等于另一三角形所对应的两条边的比，并且所夹的角相等；**

或　**3．一个三角形两条边的比等于另一三角形所对应的两条边的比，并且大边所对的角相等；**

或　**4．一个三角形两双对边之间的比等于另一三角形中对应的两双对边之间的比；**

那末这两个三角形相似。

由于在相似的问题中，具体的长度并不重要，而关心的只是它们之间的比，因此，上面这些定理的假设条件比全等的定理少了一个。

相似定理对于证明平面几何的其他一些定理是极为重要的。例如，用来证明三角形的中线相交于一点，这一点将中线分成 2:1 的比。

斜边上的高将直角三角形分成两个都和原来的三角形相似的三角形，因而它们相互之间也相似。

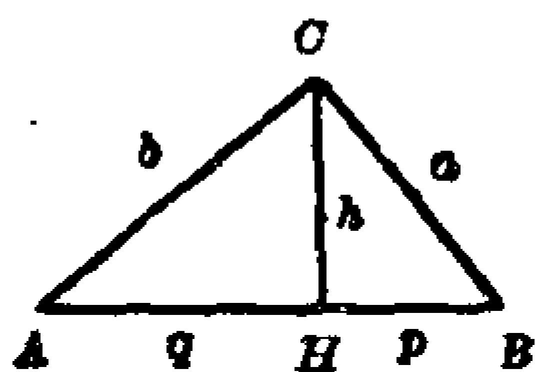


图 7.8-6 关于直角三角形的一些定理

图 7.8-6 中，高 CH 将三角形 ABC 分成两个小三角形 AHC 和 BHC。$\triangle AHC$ 和 $\triangle ACB$ 有一公共的角 $\measuredangle CAH$，以及它们都有一个直角，因此根据第二条相似定理，它们是相似的。类似地，有 $\triangle BCH\sim\triangle BAC$，因而 $\triangle AHC\sim\triangle CHB$。

在直角三角形中，一直角边的长度是斜边的长度和这直角边在斜边上投影长度的比例中项。

从 $\triangle AHC\sim\triangle ACB$，可有 $|AH|:|AC|=|AC|:|AB|$；以及从 $\triangle BHC\sim\triangle BCA$，可有 $|BH|:|BC|=|BC|:|BA|$。

改写后有：$q:b=b:c$ 或 $p:a=a:c$，然后变换成 $b^2=qc$ 和 $a^2=pc$。很明显，这定理和欧几里得定理是等价的。类似地，可直接得出

$$|AH|:|CH|=|CH|:|HB|$$

或

$$q:h=h:p。$$

因此和垂线定理相类似的定理有：

在直角三角形中，斜边上的垂线是斜边上由垂线分成的两段线段的比例中项。

线段的分割

内分和外分 利用相似定理可将一任意的线段按有理数比 $\lambda=m:n$ 进行分割。如果分点在线段的端点之间，则约定 $\lambda>0$，这称为内分。如果分点在线段之外，那末取 $\lambda<0$，称为外分。这样，λ 总是取作

$$|AT|:|TB|=m:n,$$

这里 A 和 B 是线段的端点，T 是分点。

T 可用下面的方法作出：过 A 点作一条直线(不包含该线段)，并在上面标出一线段 $|AC|=mu$，这里 u 是任意适当的长度单位。在过 B 点和 AC 平行的直线上，在 B 点的两旁用同样的长度单位标出两段线段 $|BD|=nu$ 和 $|BE|=nu$ (见图 7.8-7)。直线 CD 和 CE 与 AB 的交点 T_i 和 T_e 分别将线段按比例 $m:n$ 进行内分和外分。点 T_i 和 T_e 称为将线段进行调和分割，因为部分线段的比是相等的，并且在一有向线段上具有不同的符号。

图 7.8-7 线段的分割

图 7.8-8 黄金分割，$|BM|=|AB|/2$

黄金分割 也有可能要将线段分割成：整个线段与较长一段的比等于较长一段与较短一段的比，即 $|AB|:|AT|=|AT|:|TB|$。其作法由图 7.8-8 表示。根据割线-切线定理，$|AB^2|=|AS|\cdot|AQ|$ 或 $|AB|:|AQ|=|AS|:|AB|$。由于 $|AS|=|AT|$ 和 $|AB|=|SQ|$，将对应量减去可得 $|AB|:(|AQ|-|SQ|)=|AS|:(|AB|-|AT|)$ 或 $|AB|:|AT|=|AT|:|TB|$，这种分割称为**黄金分割**。它在美学的历史上具有重要的地位，因为人们常常认为一个图形具有理想的美，它的一个条件就是各部分都应具备这种黄金分割的比例。

7.9 圆

一些名称

圆是平面内与一给定点距离为一固定长度的点的集合。为了区分以圆为边界的**圆面**和圆本身，称这种边界为**圆周**。与圆上所有点距离相等的点称为**圆心**，从圆心到圆周上一点的直线段称为**半径**。圆周上任意两点的线段都全部落在圆内，因此圆是一种**凸形**。经过圆周上两点的直线称为**割线**，而两点之间的线段称为**弦**。通过圆心的弦，也就是所谓的**直径**，是任何一个圆内最长的弦。和圆只有一个公共点的直线称为**切线**。圆周上两点之间的圆周线段称为**弧**。两边是割线，而顶点在圆周上的角称为**圆周角**。顶点是圆心，而两边是半径的角称为**圆心角**。两条半径之间的圆面部分称为**扇形**，而在连接两半径端点的弦和圆周之间的那一部分扇形称为**弓形**。

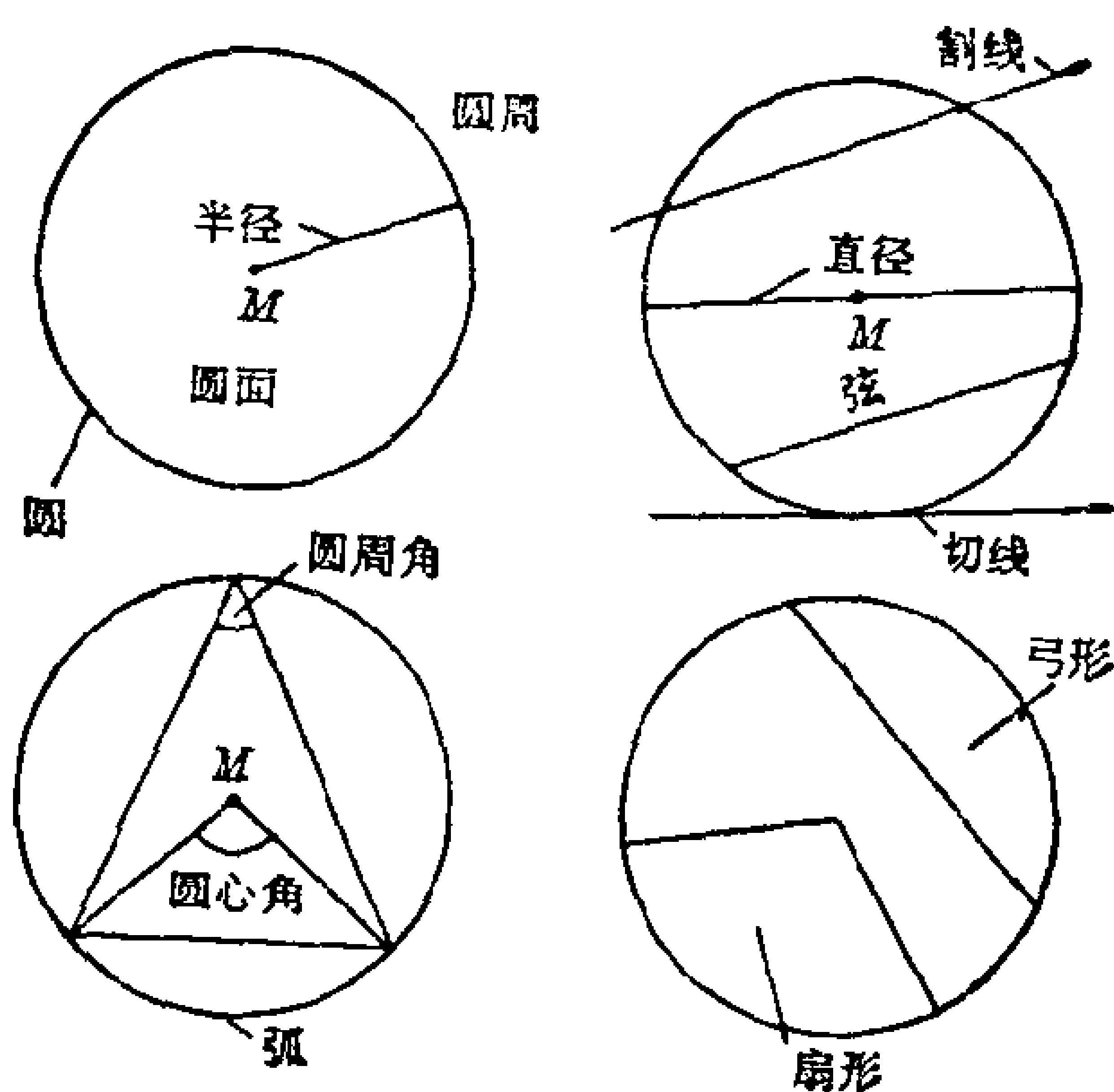


图 7.9-1　圆的各部分

关于圆内的角的定理

任意一个圆周角是同弧上圆心角的一半。

证明分三种情形(见图 7.9-2)：圆心在角的一边上(左)，圆心在两条边的中间(中)以及圆心在两边的外面(右)。在第一种情形，$\triangle AMS_1$ 是等腰三角形，因为 $|AM|=|MS_1|$。因此，$\sphericalangle AS_1M=\sphericalangle MAS_1=\beta$。由于圆心角 α 是 $\triangle AMS_1$ 的外角，故有 $\alpha=2\beta$。作直径 S_2D 和 S_3E 后，其他两种情形可以简化为第一种情形。

每个圆心角所对的弧只有一条，反之亦然。圆周角所对的弧也只有一条，但一条弧所对的圆周角却有无数个。

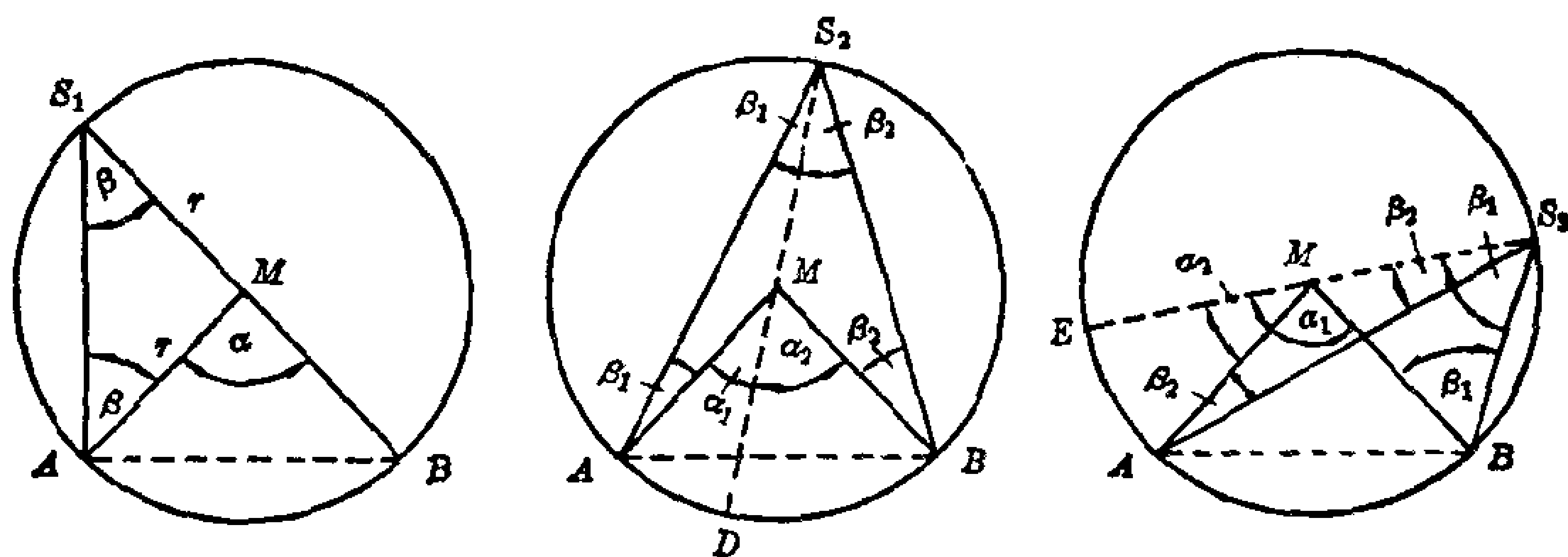


图 7.9-2　圆周角和圆心角

同弧上所对圆周角相等，半圆（或直径）所对的圆周角是直角。

如果一个圆周角的顶点从 A 移到 B，那末当它接近 B 时，它的一条边接近 B 点的切线，而另一条边接近通过 A 点和 B 点的割线（见图 7.9-3）。

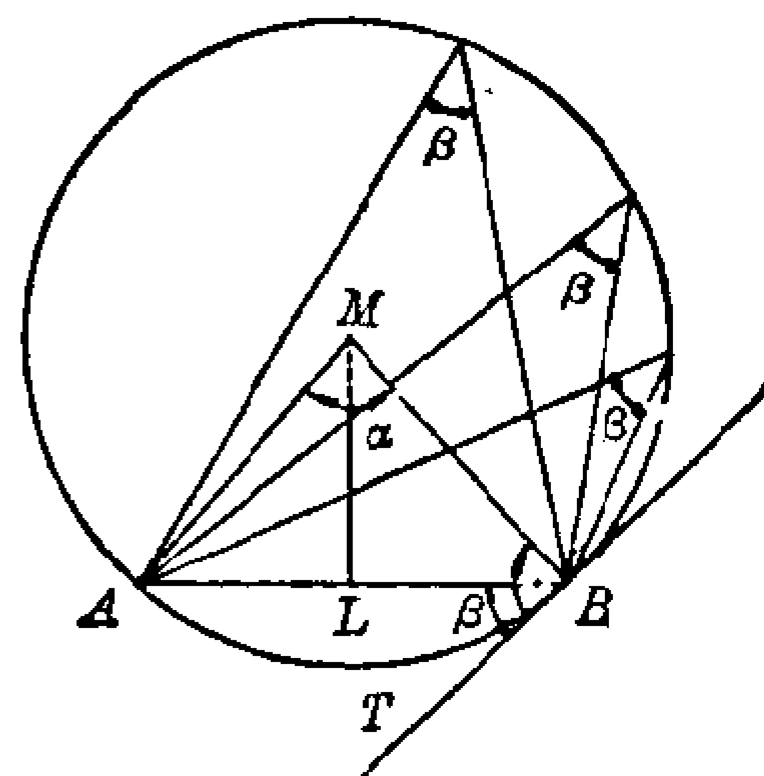


图 7.9-3 圆周角和弦切角

一弦和它端点切线的夹角等于这弦所对的圆周角。

如果作弦 AB 的垂线 ML，那末

$$\sphericalangle ABT = 90° - [90° - \alpha/2] = \alpha/2 = \beta。$$

关于圆的切线的定理

一个圆的半径和过它端点的切线互相垂直。反过来，过一半径端点且和它垂直的直线是切线。

由圆和切线组成的图形关于一根轴对称，这对称轴是通过圆心 M 和切点 B 的直线。由一圆、圆外一点 P 以及从这点作该圆的两条切线所组成的图形也是关于连接 P 点和圆心 M 的直线对称，这条直线称为图形的**中心线**（见图 7.9-4）。从这种对称可得到下面几点结论：

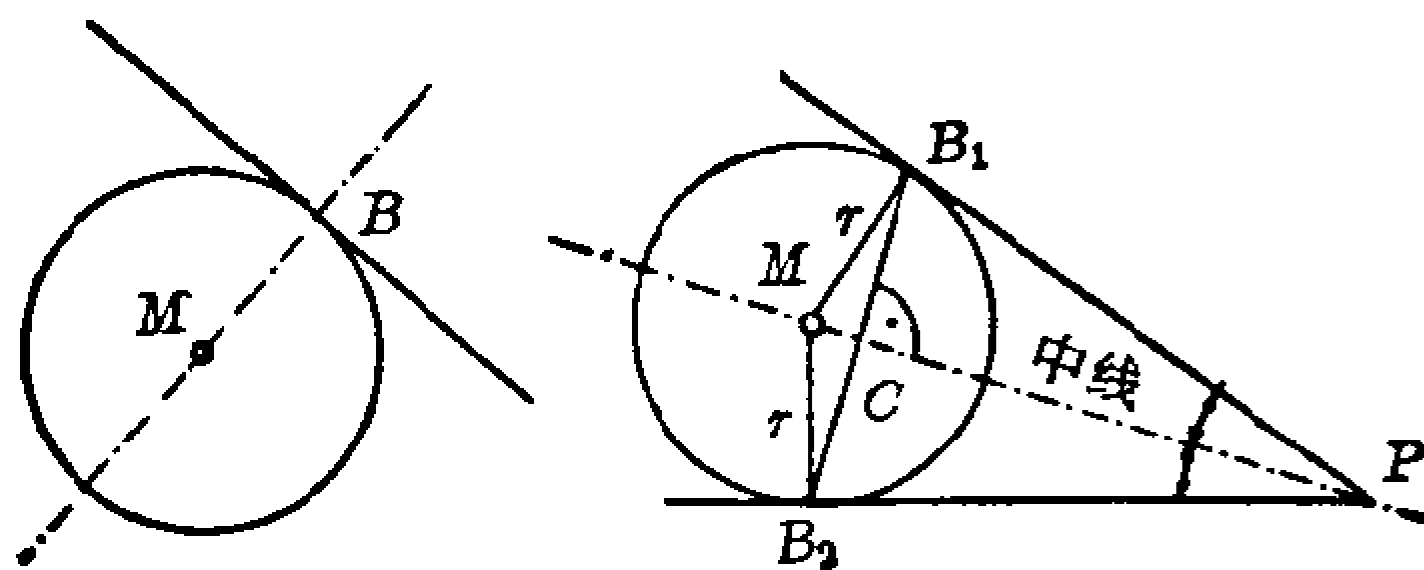


图 7.9-4 圆的切线

1. 中心线平分一点到一圆的两条切线所夹的角。
2. 在从 P 点到圆的两条切线上，P 点到切点之间的截距相等。
3. 中心线是连接两切点的弦的垂直平分线。

作图 上面一些关于圆和切线的定理是所有涉及切线的作图的基础。

从圆外一点作该圆的切线。 以中心线 $|MP|$ 的中点 H 为圆心，作另外一个半径为 $|HP|$ 的圆，这圆和原来的圆相交于 B_1 和 B_2，那末 PB_1

和 PB_2 就是所要求作的切线(根据泰勒斯定理)(见图7.9-5)。

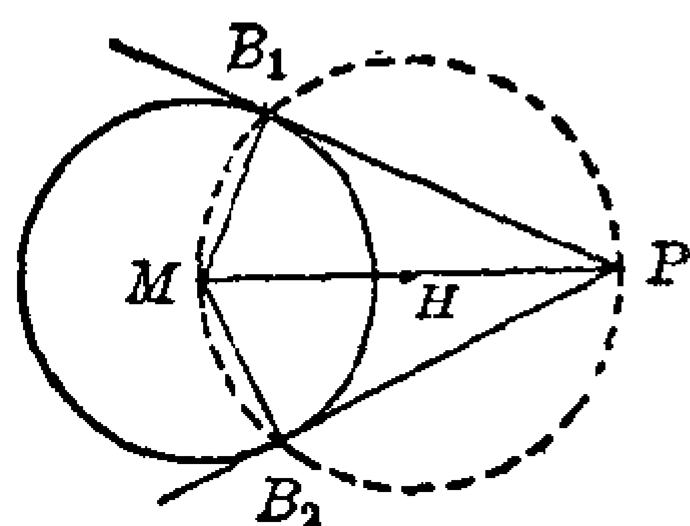


图7.9-5　从 P 点作圆心为M的圆的切线

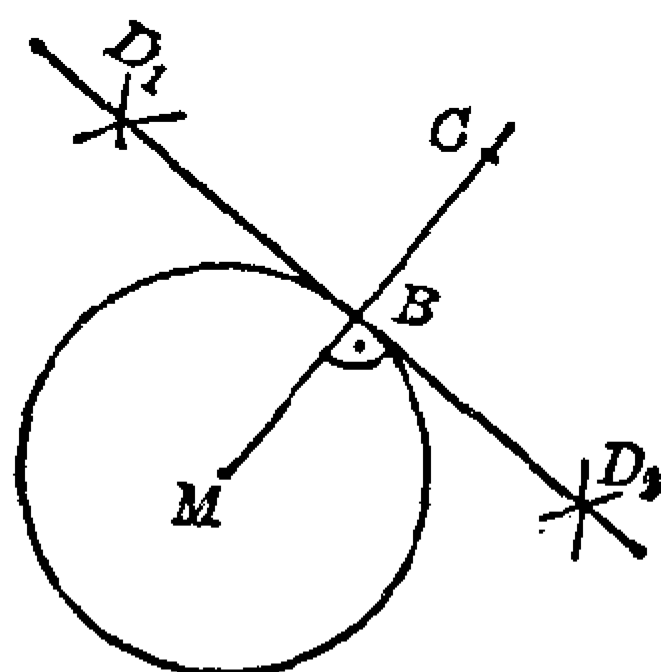


图7.9-6　在 B 点作圆的切线

在圆上一点 B 作切线。把半径 BM 延长到 C，使 $|BC|=|BM|$。以 C 和 M 为圆心，大于 $|BM|$ 的线段为半径分别作弧，过它们交点 D_1 和 D_2 的直线就是所要求作的切线(见图7.9-6)。

作两圆的外公切线。设 M_1 和 M_2 是两圆的圆心，半径为 r_1 和 $r_2(r_1<r_2)$。以 M_2 为圆心，(r_2-r_1) 为半径作圆，从 M_1 作这圆的两根切线。平行于这两根切线，并和它们的距离等于 r_1 的直线 B_1B_2 和 $B_1'B_2'$ 就是所要求作的切线(见图7.9-7)。

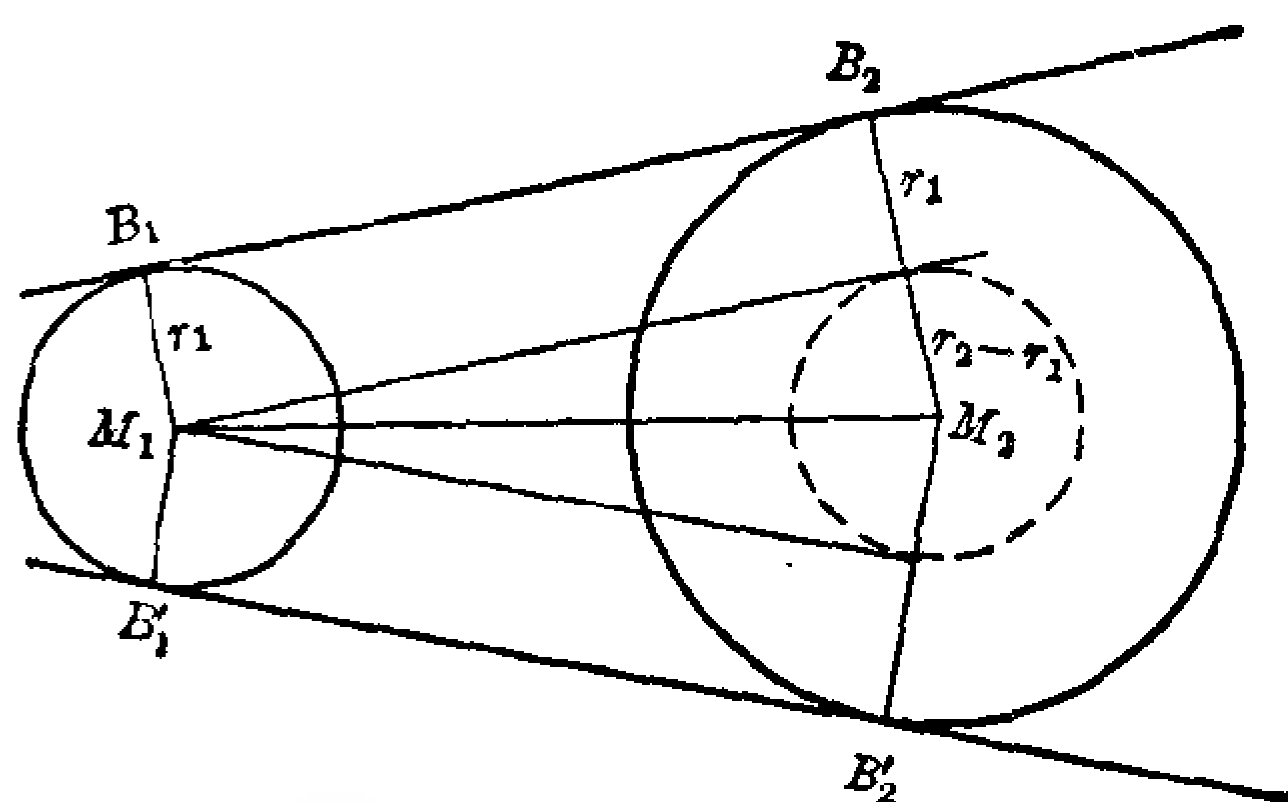


图7.9-7　两圆的外公切线

这两根切线使整个图形就象用一根皮带来传动两个半径分别为 r_1 和 r_2 的轮子。

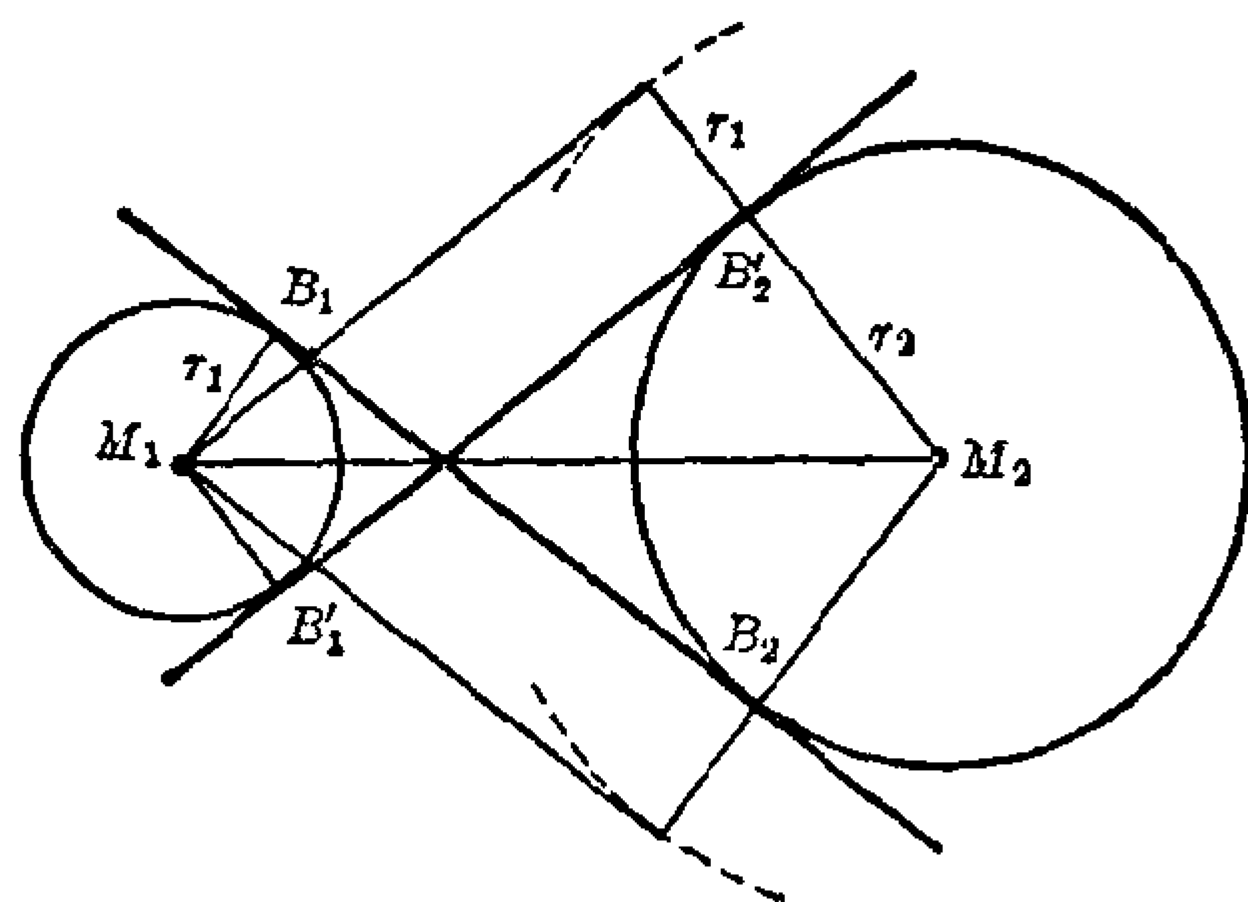


图7.9-8　两圆的内公切线

作两圆的内公切线。以 M_2 为圆心，(r_1+r_2)为半径作一圆，从

M_1 点作该圆的两条切线。和这两条切线平行，距离等于 r_1 的直线 B_1B_2 和 $B_1'B_2'$ 就是内公切线(见图 7.9-8)。

在这种情况，其形状就象用交叉皮带来传动的情形。

圆的一些计算

圆周 用内接和外切多边形可以给出直径为 d 的一个圆的周长范围(见图 7.9-9)。例如，正六边形的周长 $c_i = 3d$ 是圆的周长 c 的下界，而外切正六边形的周长 $c_e = (2\sqrt{3}d) < 3.47d$ 是它的上界，即 $3d < c < 3.47d$。为了求得周长 c，必须将 d 乘上一个因子，这因子用希腊字母 π 来表示：$c = \pi \cdot d$。这个数是数学中最重要和最有趣的常数之一。用增加多边形边数的方法，可以将 π 精确到任意的精度。阿基米德用 96 边形，找到了我们迄今还在使用的上下界：

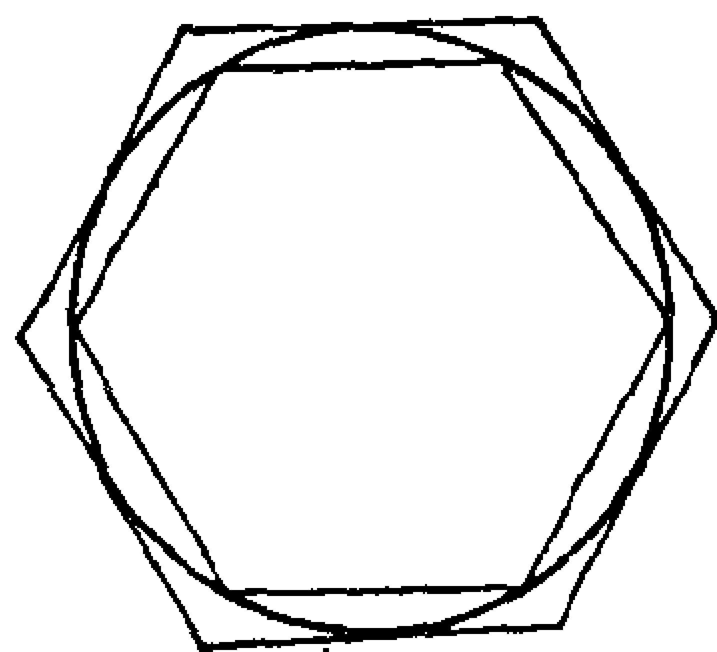


图 7.9-9 一个具有内接和外切六边形的圆

$$3^{10}/_{71} < \pi < 3^{10}/_{70} \text{ 或 } 3.14084507 < \pi < 3.14285714。$$

圆周	$c = \pi d = 2\pi r$

小数点后 40 位的 π 值是：

$$\pi = 3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ 3832\ 7950\ 2884\ 1971\cdots$$

下面进行一个粗略的计算，来看一看精度"只有"小数 30 位意味着什么！天文工作者用倍数最高的望远镜，在照相底版上经过长时间的曝光后可以看到某个星系。被照相底版捕捉到的光是星系在二十亿年之前发出的。由于光每年走过约 9.5×10^{12} 公里的路程，这些星星离开地球约 $2 \cdot 10^9 \cdot 9.5 \cdot 10^{12}$ 公里 $= 1.9 \times 10^{22}$ 公里。用这巨大的距离为半径的一个圆，它的周长 $c = 2\pi r = 3.8\pi \cdot 10^{22}$ 公里。如果以公里为单位计算这个圆周长，用 π 的前 30 位小数，那末在小数点后第 8 位产生误差，误差的大小在两个单位左右，即忽略 π 其他一些小数位后所引起的误差约为 20 微米或 0.02 毫米。很明显，这种精度在实用中是从来不需要的。常用的 π 近似值为两位小数 $\pi = 3.14$ 或 $\pi = 3^1/_7$，或四位小数 $\pi = 3.1416$。

乙

四

$$A=(A_{AB}-2A_{AC}+A_{OD})/2=\pi[d^2-2e^2+(d-2e)^2]/8$$
$$=\pi(d^2-2de+e^2)/4=\pi(d-e)^2/4。$$

希波克拉底月牙形　也有一些有名的月牙形图形，其中最有名的要算是希波克拉底月牙形。根据泰勒斯定理，左边图中的三角形 ABC 是直角三角形（见图 7.9-16）。因此有：

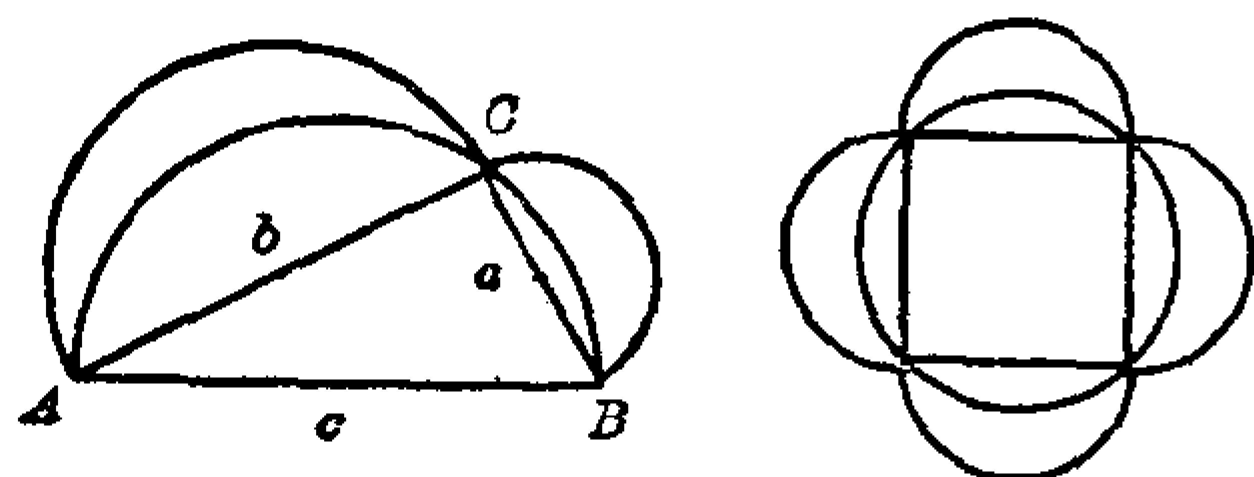


图 7.9-16　希波克拉底月牙形

$$c^2=a^2+b^2。$$

在 $|AB|=c$ 上半圆的面积为 $A_{AB}=\pi c^2/8$。在 $|AC|$ 和 $|BC|$ 上半圆的面积之和是 $A_{AC}+A_{BC}=\pi(b^2+a^2)/8$，因而也就等于 A_{AB}。于是有：

两月牙形面积之和等于三角形的面积。

同样，在右图中，月牙形面积之和等于正方形的面积。在这些公式中竟没有出现 π 这个数，古代数学家（包括希波克拉底本人）曾被这奇特的现象引入歧途，他们不断地去寻找那种化圆为方的办法，而这种寻找是根本毫无希望的。

关于弦、割线和切线的定理

将圆绕圆心旋转，可以马上看出：

长度相等的弦和圆心的距离相等。反过来，与圆心距离相等的弦，其长度相等。

如果一圆的弦 c_1 比另一弦 c_2 长，它离圆心的距离比 c_2 近。因而，直径是最长的弦。

如果一束直线和圆相交，那末在每条直线上，线束承载点到圆周之间截距的乘积等于一个固定的常数。这是下面三个定理的综合和概括。

弦定理：如果圆的两弦相交，那末一弦上的两段截距之积等于另一弦的两段截距之积。

证明如下（见图 7.9-17）：$\sphericalangle B_1A_1B_2$ 和 $\sphericalangle B_2A_2B_1$ 相等，因为它们所对的弧相等，$\sphericalangle A_1B_2A_2$ 和 $\sphericalangle A_2B_1A_1$ 也是如此。因而

$$\triangle A_1SB_2\sim\triangle A_2SB_1,$$
$$|SA_1|:|SB_2|=|SA_2|:|SB_1|$$

或

$$|SA_1|\cdot|SB_1|=|SA_2|\cdot|SB_2|。$$

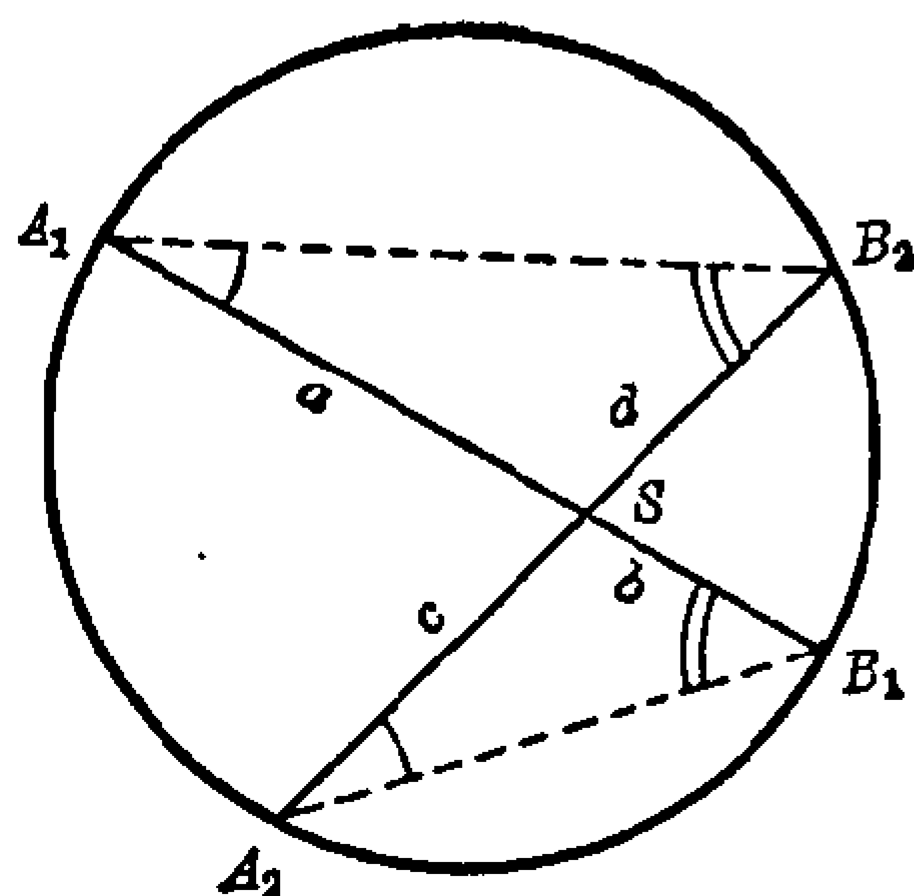


图 7.9-17 弦定理

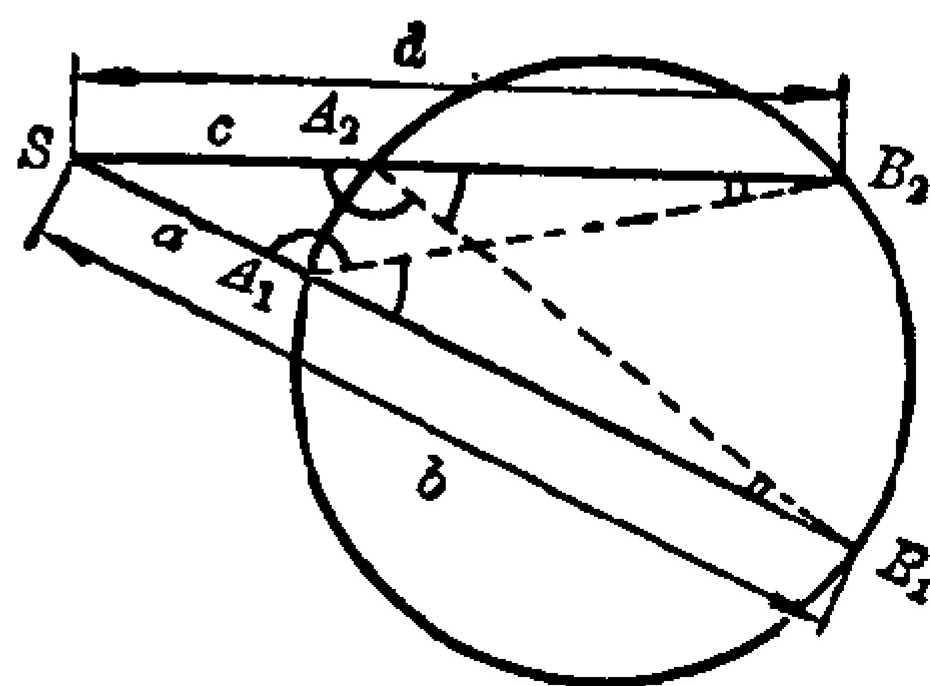


图 7.9-18 割线定理

割线定理：如果两条割线在圆外相交，那末在一割线上交点和圆之间两段截距的乘积等于另一割线上两段截距的乘积(见图 7.9-18)。

关系式 $|SA_1|\cdot|SB_1|=|SA_2|\cdot|SB_2|$ 的证明和弦定理的证明完全相似。

割线-切线定理：如果一割线和一圆的切线相交，那末在切线上交点和切点之间的截距是割线上的两段截距的比例中项。

将这看成是割线定理的极端情形就能证明这条定理。当一根割线移动到切线处时，割线上两段截距的长度相等（极限情况)，割线定理就变成

$$|SA|^2=|SA_1|\cdot|SB_1|$$

或 $$t^2=a\cdot b$$

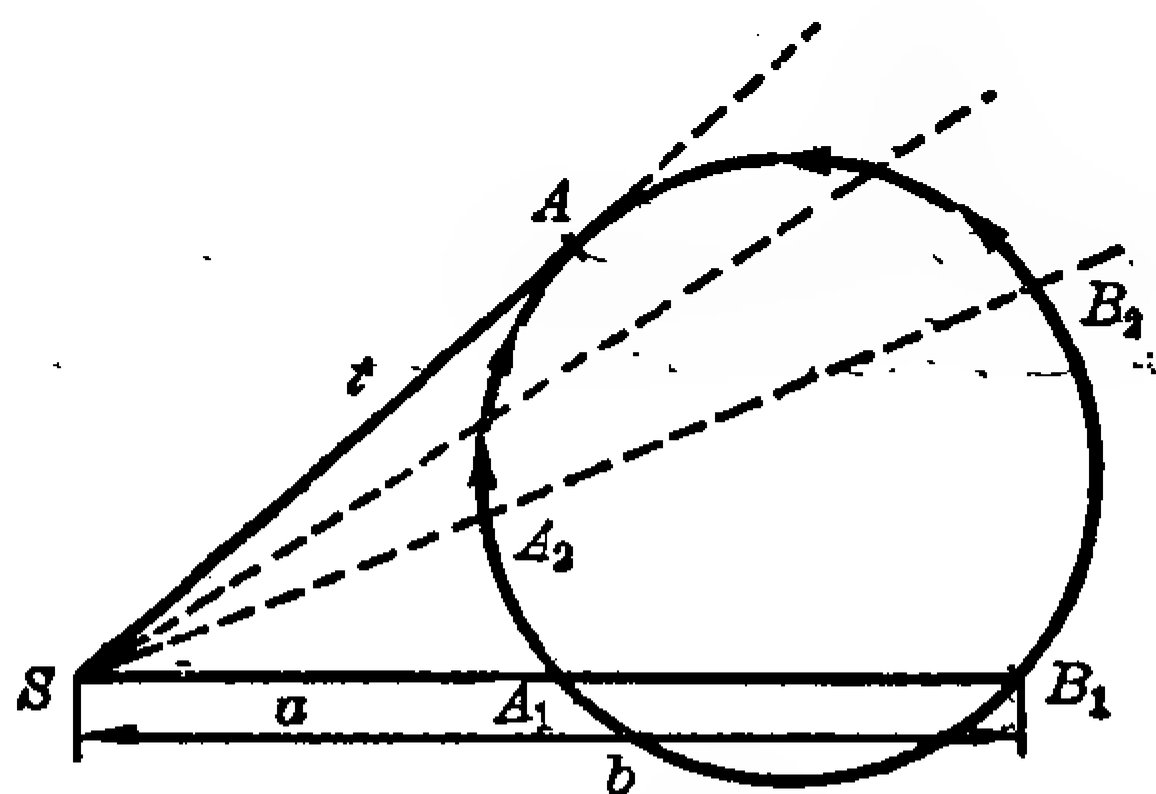


图 7.9-19 割线-切线定理

(见图 7.9-19)，称这常数乘积为线束承载点关于圆的幂。

弦四边形和切线四边形

弦四边形 如果一个四边形所有的边都是一个圆的弦，称它为圆内接四边形。利用有关圆心角和圆周角的定理可得到下面的结论:

圆内接四边形相对的内角之和等于 180°(见图 7.9-20)。

反之，若四边形相对内角之和是 180°，则它是圆内接四边形。

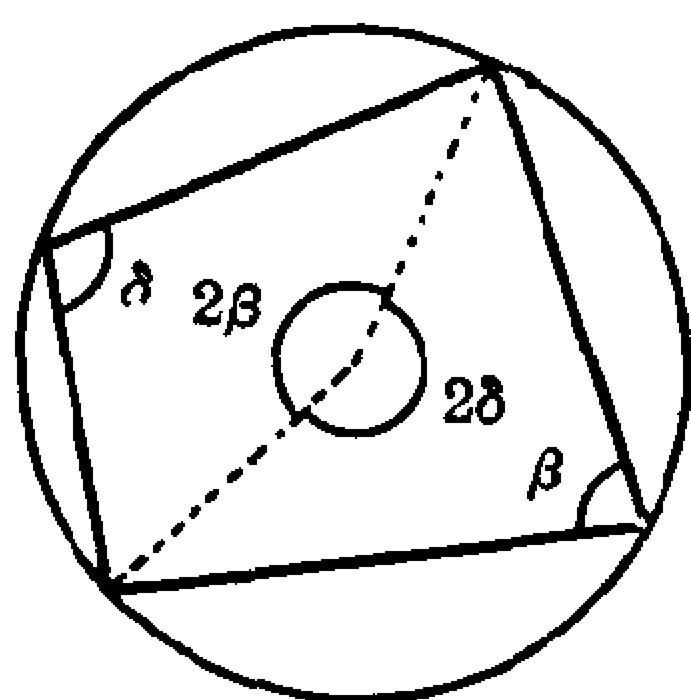


图7.9-20　圆内接四边形

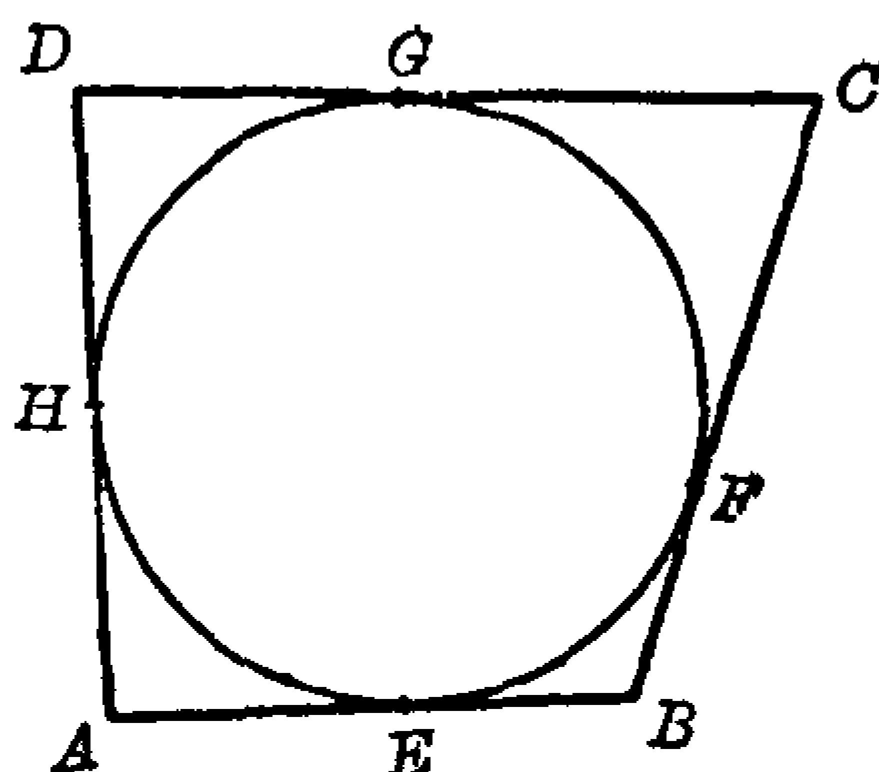


图7.9-21　切线四边形

切线四边形　如果四边形的边和一圆相切，那末(见图7.9-21)：

$$|AE|=|AH|,\ |BE|=|BF|,\ |CF|=|CG| \text{ 及 } |DG|=|DH|,$$

因为从一点到一圆的两条切线的截距相等。从这可有

$$|AE|+|EB|+|CG|+|GD|=|BF|+|FC|+|DH|+|HA|,$$

因而　$|AB|+|CD|=|BC|+|DA|$　或　$a+c=b+d$。

切线四边形的对边之和相等。

从图中可以看出，反过来也是成立的。

这些定理有许多推论：例如，正方形有一内切圆和一外接圆；一长方形有一外接圆，但没有内切圆；菱形有一内切圆，但没有外接圆；一般平行四边形既没有内切圆也没有外接圆。

7.10　几何轨迹

轨迹是由一个规则来定义的点的集合，根据这规则能判别一任意给定的点是否属于该集合。于是，轨迹只包含那集合中的点，而不包含其他的一些点。这样，空间所有到一给定点 M 的距离为一固定长度 r 的点的轨迹是一个球面，它的半径为 r，球心为 M。类似地，空间所有到一直线的距离为一常数的点的轨迹是一圆柱曲面，这给定的直线是它的轴。

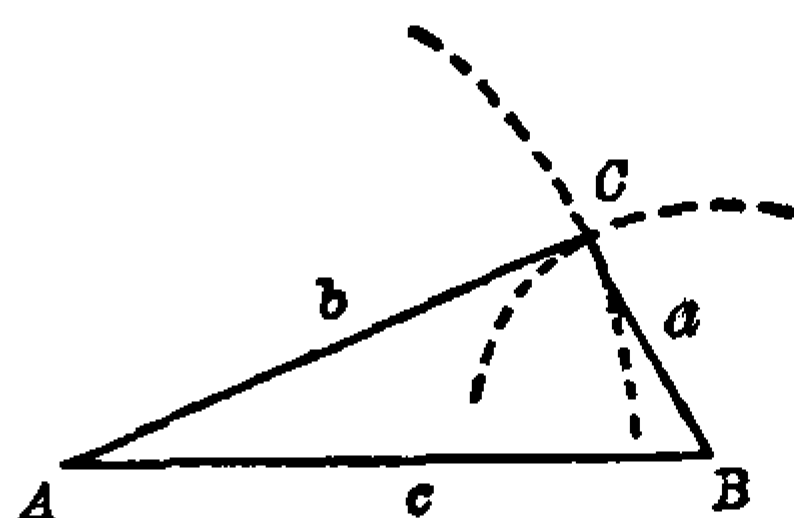


图7.10-1　几何轨迹：确定点 C 的位置

在平面上，轨迹是一些曲线，例如圆、抛物线或直线。常常用两条轨迹相交来决定一个点，例如，到线段 c 的端点 A 和 B 的距离

分别等于b和a的点C的位置，是由这点必须在到B的距离为a的轨迹上，同时也要在到A的距离为b的轨迹上这一条件决定的（见图7.10-1），至多还有它对于直线的对称点。

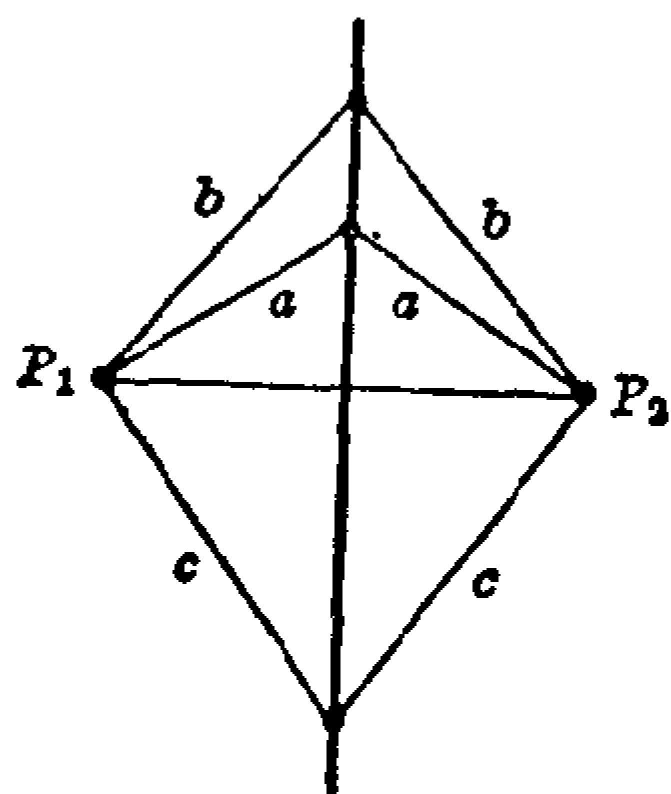


图 7.10-2 几何轨迹：垂直平分线

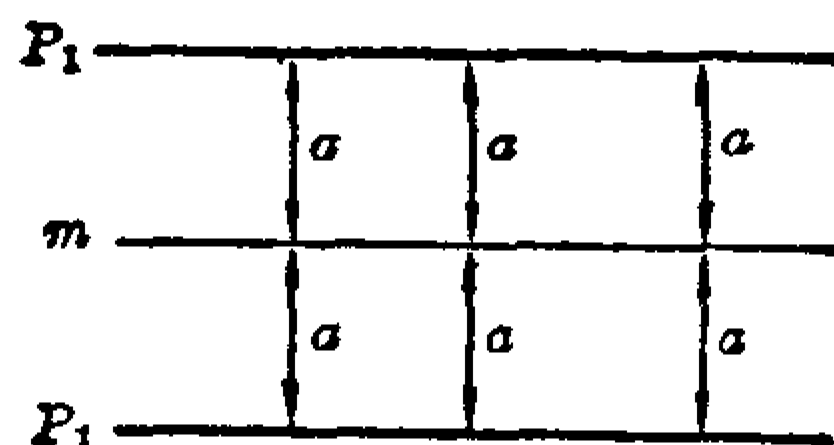


图 7.10-3 几何轨迹：一对平行线及中间平行线

某些基本轨迹：

1. 到两给定点距离相等的点的轨迹是这两点之间线段的垂直平分线（见图 7.10-2）。

2. 和一给定直线距离固定的点的轨迹是一对平行线，它们与直线的距离是固定的距离（见图 7.10-3）。

3. 与两条平行线距离相等的点的轨迹是一条位于它们中间的平行线（见图 7.10-4）。

4. 与两条相交直线距离相等的点的轨迹是交点处对顶角的一对角平分线（见图 7.10-5）。

5. 到一给定点距离固定的点的轨迹是以给定点为圆心，以此距离为半径的一个圆。

6. 若一给定线段所对的角为一固定的角，所有这些角的顶点的轨迹是以这线段为弦的两条圆弧（见图 7.10-6）。

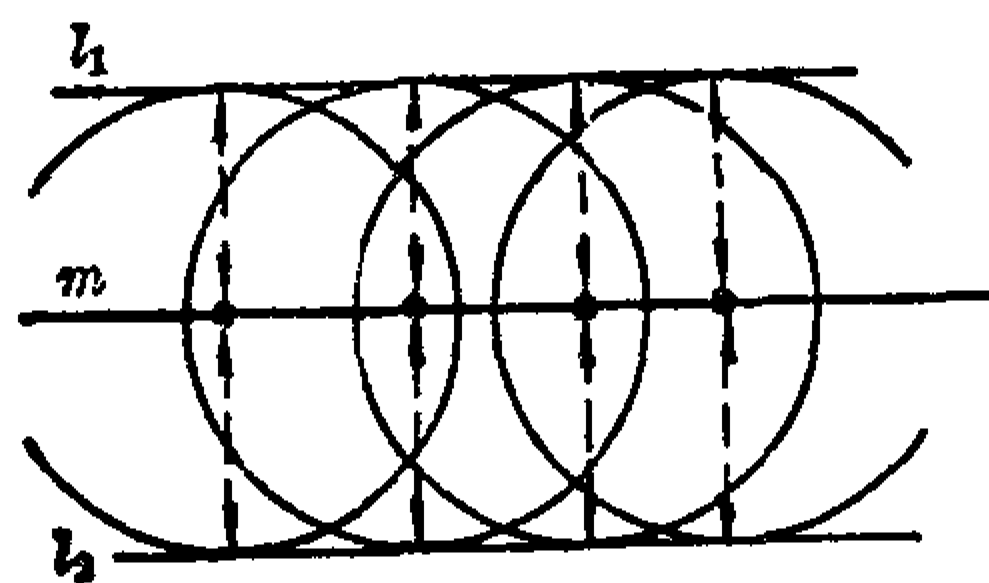


图 7.10-4 几何轨迹：中间平行线

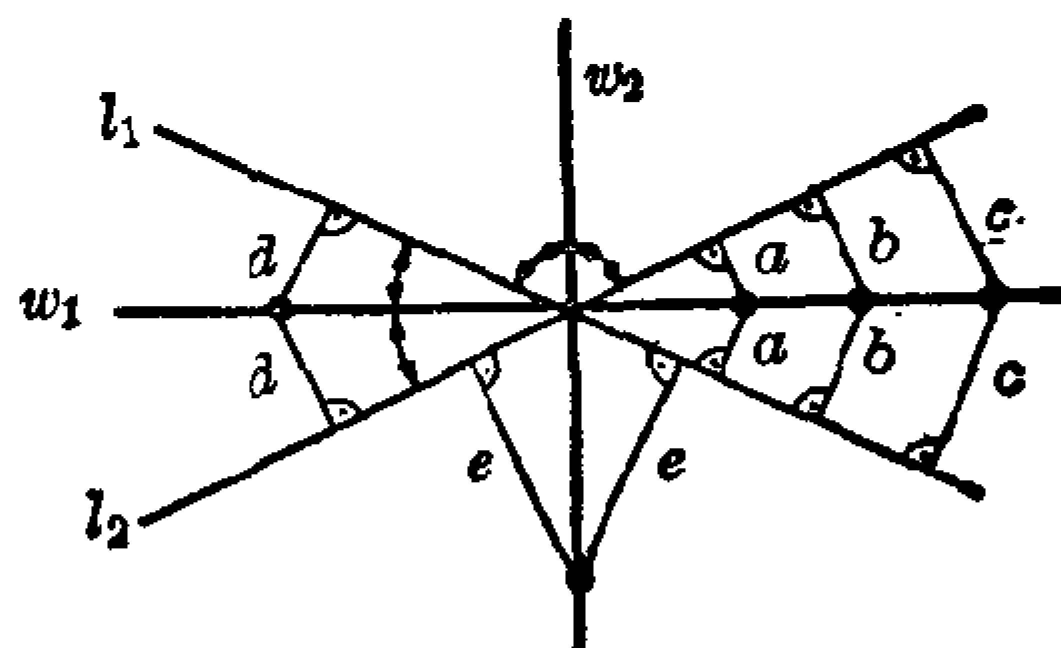


图 7.10-5 几何轨迹：角平分线

如果 $|AB|=s$，以及 α 是一给定的角，那末圆心是以 AB 为底、以 2α 为顶角的等腰三角形 ABM 的顶点 M。

这六条轨迹可被用来解决平面几何中另外一些涉及轨迹的问题。

应用　一些作图常可化为上面给出的一些轨迹，但也许要分几步才能作出。例如，以两给定直线 l_1 和 l_2 为切线的一些圆，如这两条直线是平行的，则这些圆心的集合是一条位于它们中间的平行线（由轨迹3得出）；但如果它们是相交的，这些圆心的集合就是一对角平分线 w_1 和 w_2（由轨迹4得出）（参见图7.10-4和图7.10-7）。

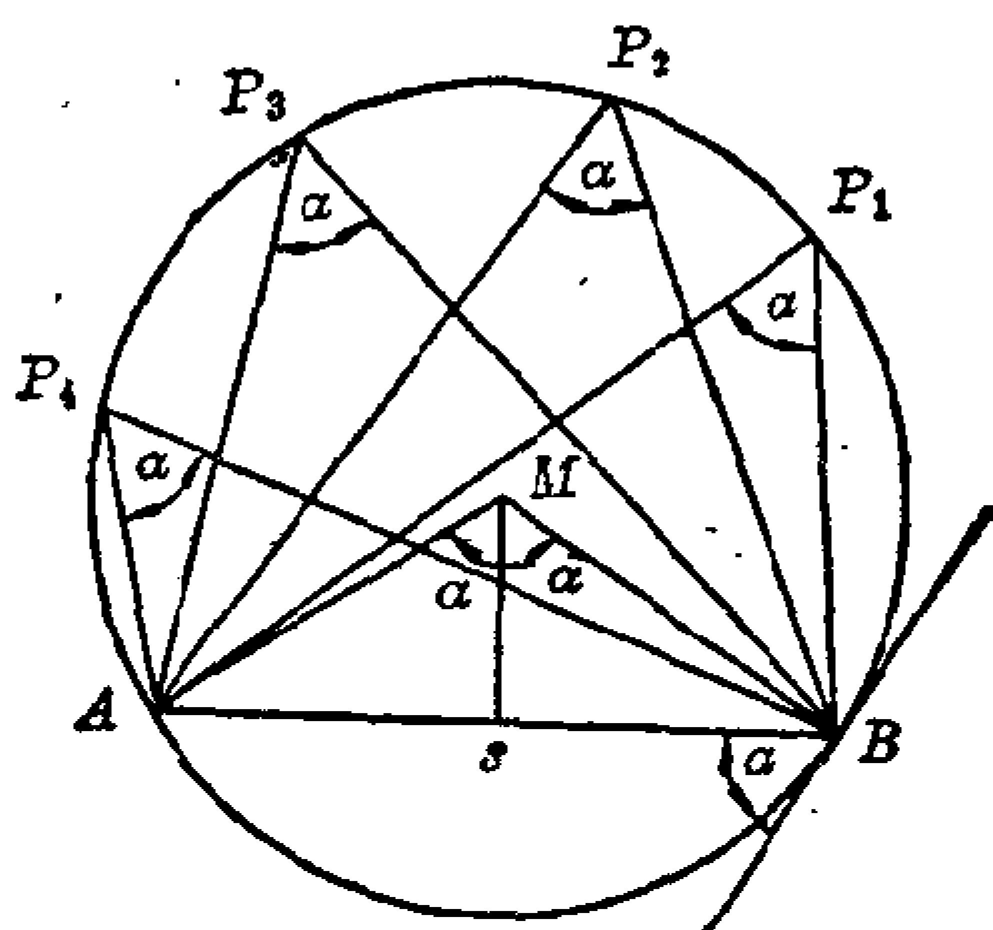


图7.10-6　几何轨迹：一弦所对的弧

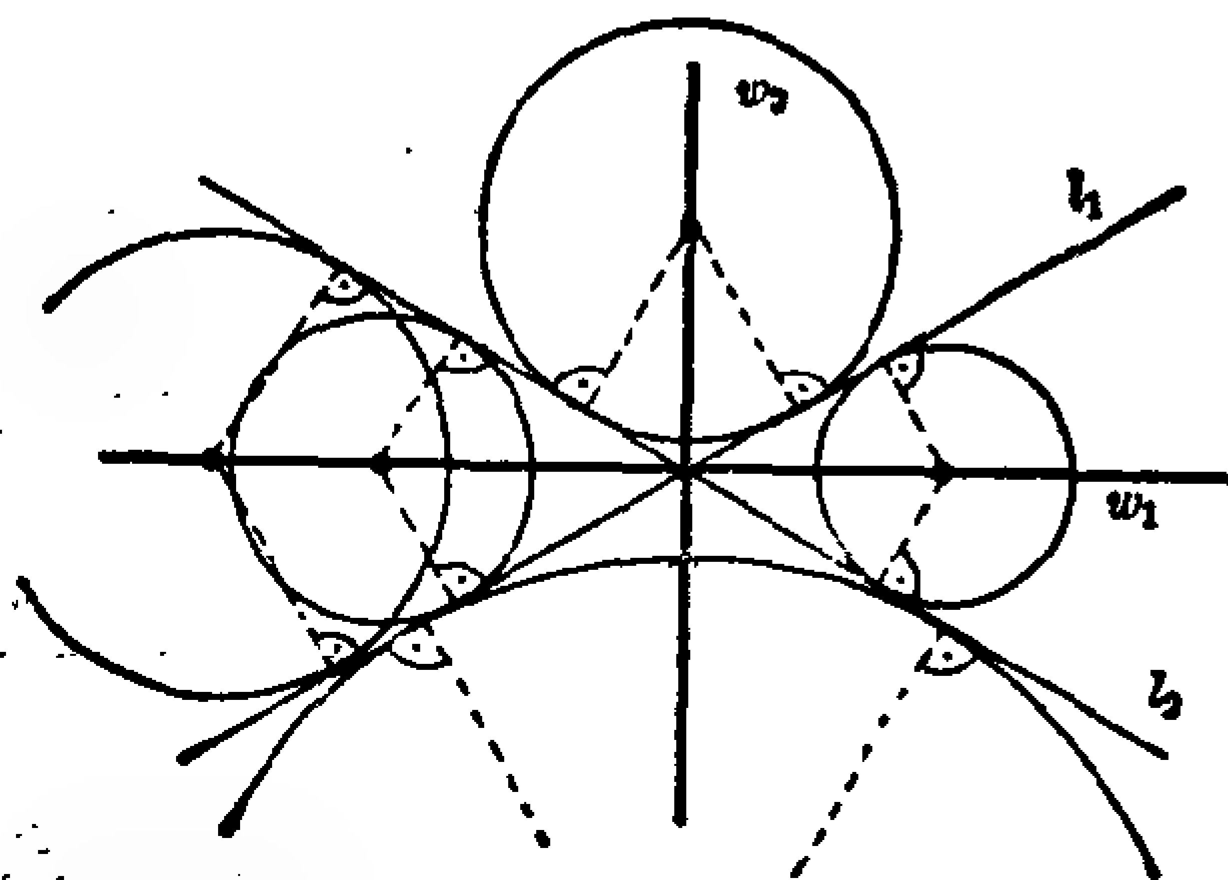


图7.10-7　几何轨迹：角平分线

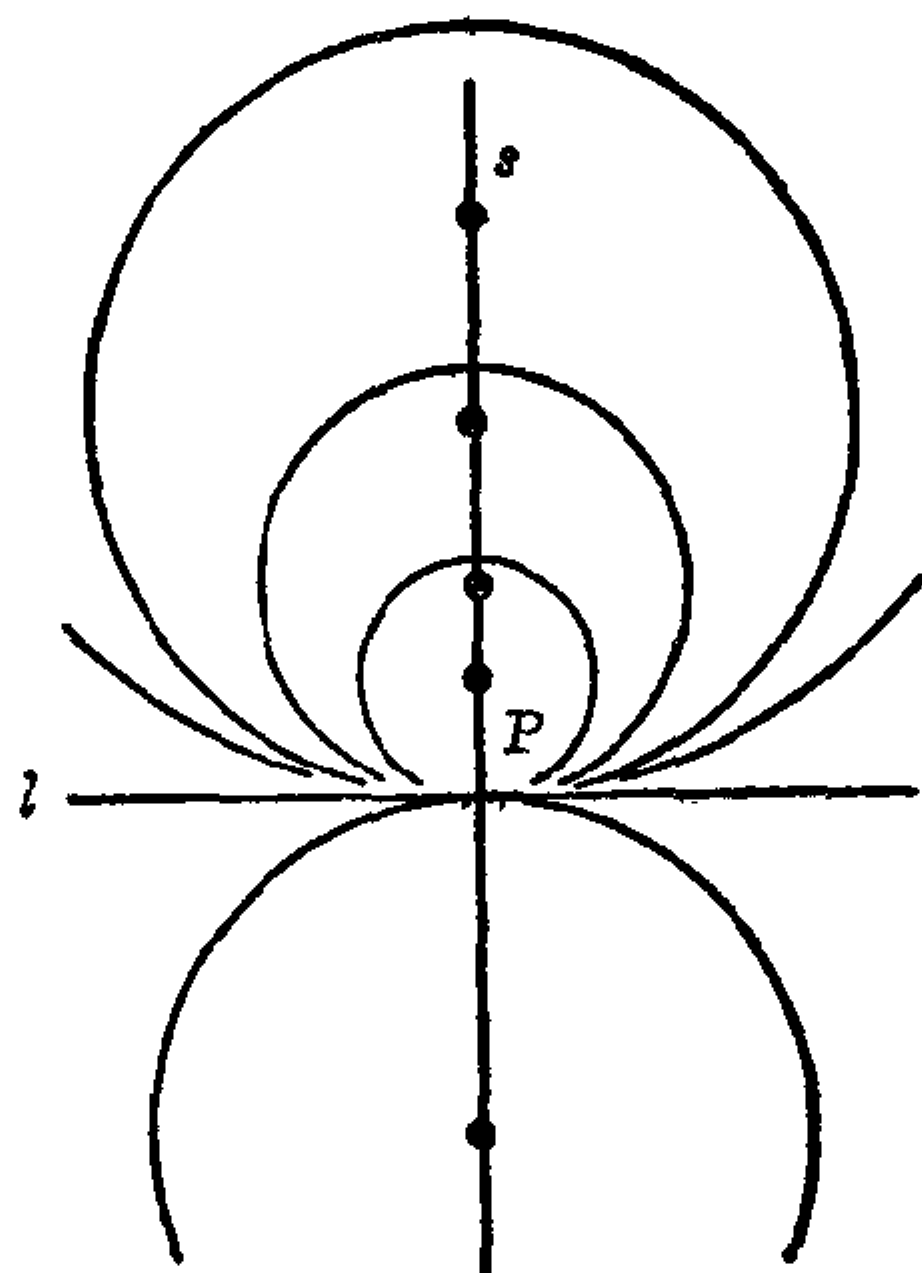


图7.10-8　几何轨迹：垂线

如果增加另外一些条件，会得到一些新的轨迹。例如，与一条给定直线 l 相切于 P 点的所有这些圆的圆心轨迹是一条过 P 点垂直于 l 的垂线(见图7.10-8)。与一给定半径为 ρ 的圆相切半径为 r 的一些圆，如果它们是外切的，则这些圆心的轨迹是一个半径为 $r+\rho$ 的同心圆；如果它们是内切的，并且 $r<\rho$，则轨迹是一个半径为 $(\rho-r)$ 的同心圆（见图7.10-9）。

常用两轨迹相交的办法来作出某些点。例如，一半径为 R 的齿轮加一半径为 r 的小齿轮后，可带动一根与大齿轮中心 M 距离为 $a(>R)$ 的齿条。小齿轮的轴心可以这样求得：以齿轮中心 M 为圆心，$R+r$ 为半径作圆，它与一平行于齿条且距离为 r 的直线相交。这交点就是小齿轮的轴心(见图 7.10-10)。

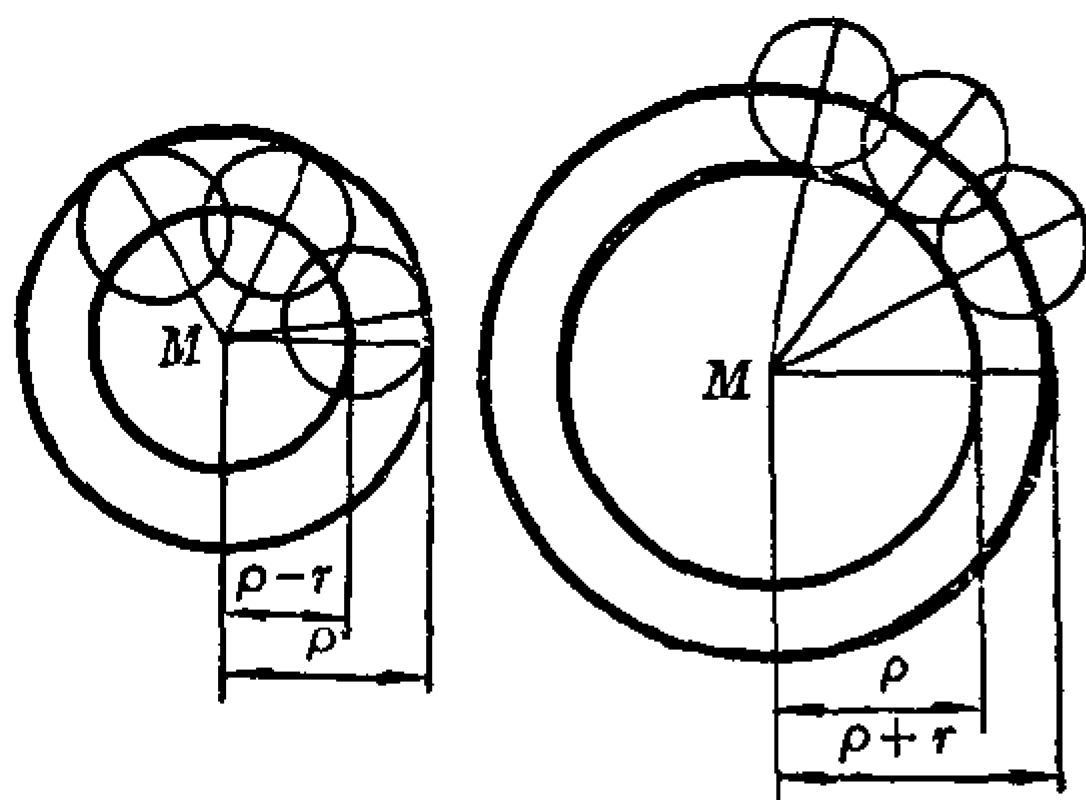


图 7.10-9 几何轨迹：同心圆

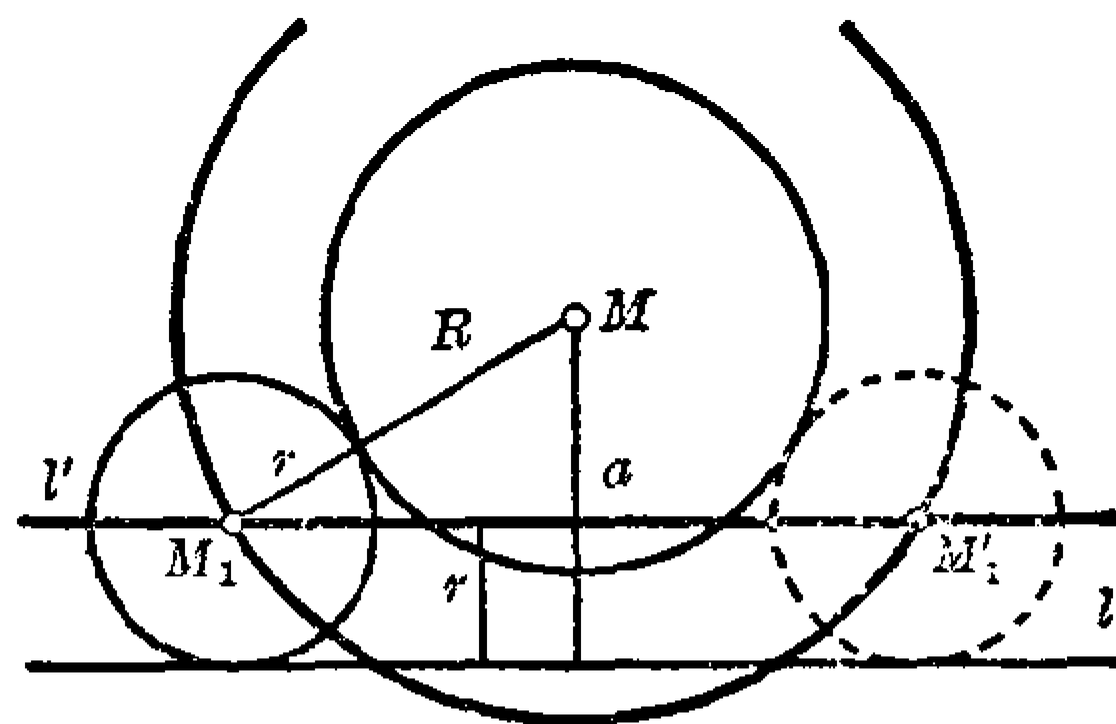


图 7.10-10 几何轨迹：直线和圆

7.11 二次曲线的平面几何处理

椭圆

椭圆是平面上与两定点的距离之和为一常数 $2a$ 的点的轨迹。

定点 F_1 和 F_2 称为椭圆的**焦点**，P 点到 F_1 和 F_2 的距离 r_1 和 r_2 称为**径向距离**，常数 $2a$ 一定要大于两焦点之间的距离。于是，分别以 F_1 和 F_2 为圆心、r_1 和 r_2 为半径的两个圆（这里 $r_1+r_2=2a$）的交点 P_1 和 P_2 都在这椭圆上。如果将焦点互相交换一下，也是这样作图可在椭圆上得到另外两点 P_3 和 P_4（见图 7.11-1)。点 P_1, P_2, P_3 和 P_4，以及整个椭圆都是关于通过焦点的直线**对称**的，但它们关于 F_1F_2 的垂直平分线也是对称的。两根对称轴的交点 C 是椭圆的**对称中心**，称为它的**中心**。每个焦点到椭圆中心的距离称为这椭圆的**线性偏心率**，$|CF_1|=|CF_2|=e$。在任意一根过椭圆中心的直线上，在椭圆内的那段线段称为**直径**，最长的直径称为**长轴**。它的两个端点 V_1 和 V_2（称为**主顶点**）离焦点的距离为 $a+e$ 和 $a-e$，离中心 C 的距离为 a。最短的直径称为**短轴**，它的两个端点 W_1 和 W_2（称为**副顶点**）离两个焦点的距离都为 a。它们和中心的距

离 b 可以用毕达哥拉斯定理从半长轴 a 和线性偏心率 e 算出，即

$$b^2=a^2-e^2。$$

椭　　圆	$r_1+r_2=2a \quad a^2-b^2=e^2$

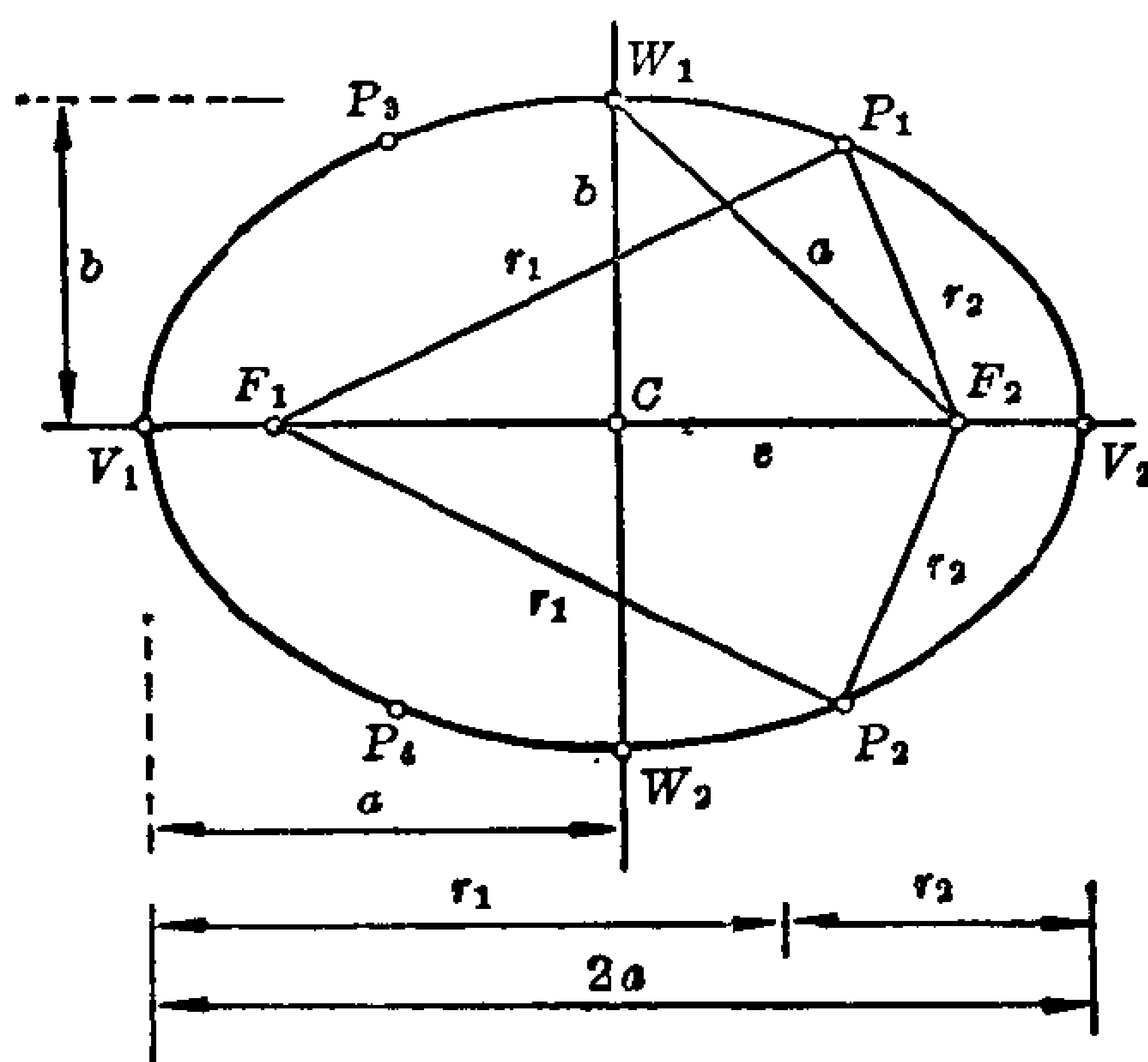


图 7.11-1　椭圆

椭圆的形状由值 a, b 和 e 中任意两个所决定，如可用边长为 $2a$ 和 $2b$ 的长方形来决定。如果 b 越小，椭圆就越扁，拉得就越长。在极限情况下，退化成线段 $|F_1F_2|=|V_1V_2|$，在其上面每一点重复了两次。当 b 对于 a 逐渐增加时，椭圆越来越象一个圆。当长方形成一正方形，即 $b=a$ 时，它就变成了一个圆。圆可以看成是线性偏心率为 0 的椭圆，这时

$$a=b=r_1=r_2=r。$$

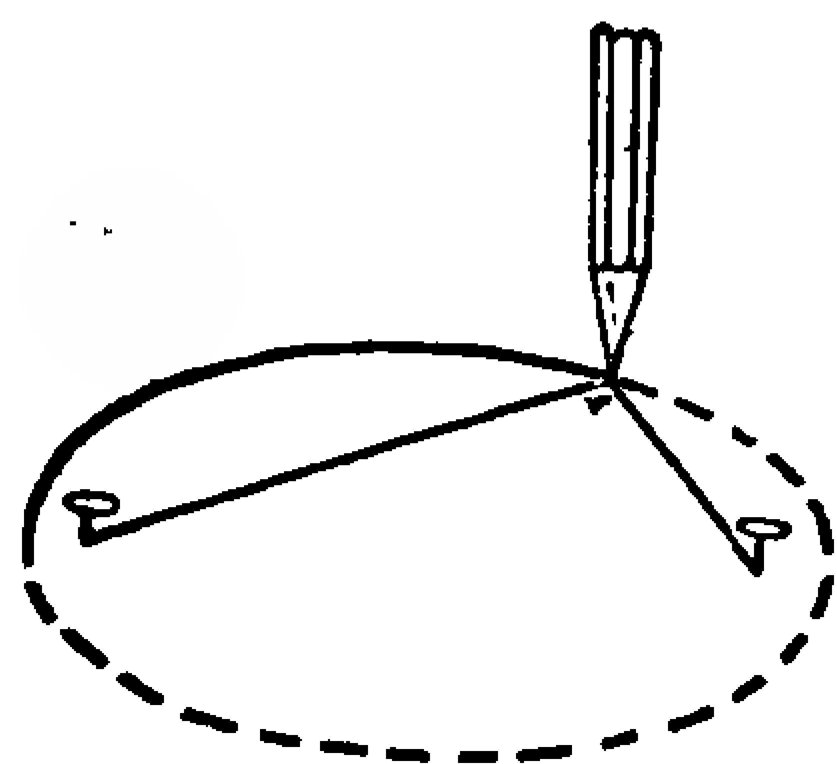


图 7.11-2　用线来作椭圆

用线来作图。 在布置椭圆形的花坛时就可用这方法。用两只图画钉（或小棒）标出两个焦点，并在它们上面缚一根长度为 $2a(>2e)$ 的线。用一枝铅笔（或另外一根小棒）套在这根线里移动，并使线总是处于拉紧的状态，那末它就画出了一个椭圆。因为在移动时总是有 $r_1+r_2=2a$（见图 7.11-2）。

将椭圆看作圆的透视仿射图象 画法几何的双圆作图法是：以 C 为圆心、以 a 和 b 为半径作两个同心圆；过公共半径上的两点 A_i 和 B_i 分别作两根轴的平行线，其交点就是椭圆上的一点 P_i（见图7.11-3）。过 P_i 点与 CA_i 平行的直线与两根轴相交于 H_i 和 N_i。在平行四边形 $CB_iP_iH_i$ 中有 $|H_iP_i|=b$，在平行四边形 $CA_iP_iN_i$ 中有 $|P_iN_i|=a$。这样，可以用下面的方法作出一椭圆：在一张纸的边缘标出 P_i，H_i 和 N_i 点，使 $|H_iP_i|=b$ 和 $|N_iP_i|=a$，如果来回移动纸片，使 H_i 和 N_i 总是保持在两条正交的直线上，那末 P_i 所画出的就是一个椭圆。大多数的椭圆作图仪器都是基于这种"**纸片作图法**"的原理：即距离固定的两点在两互相正交的直线上移动。

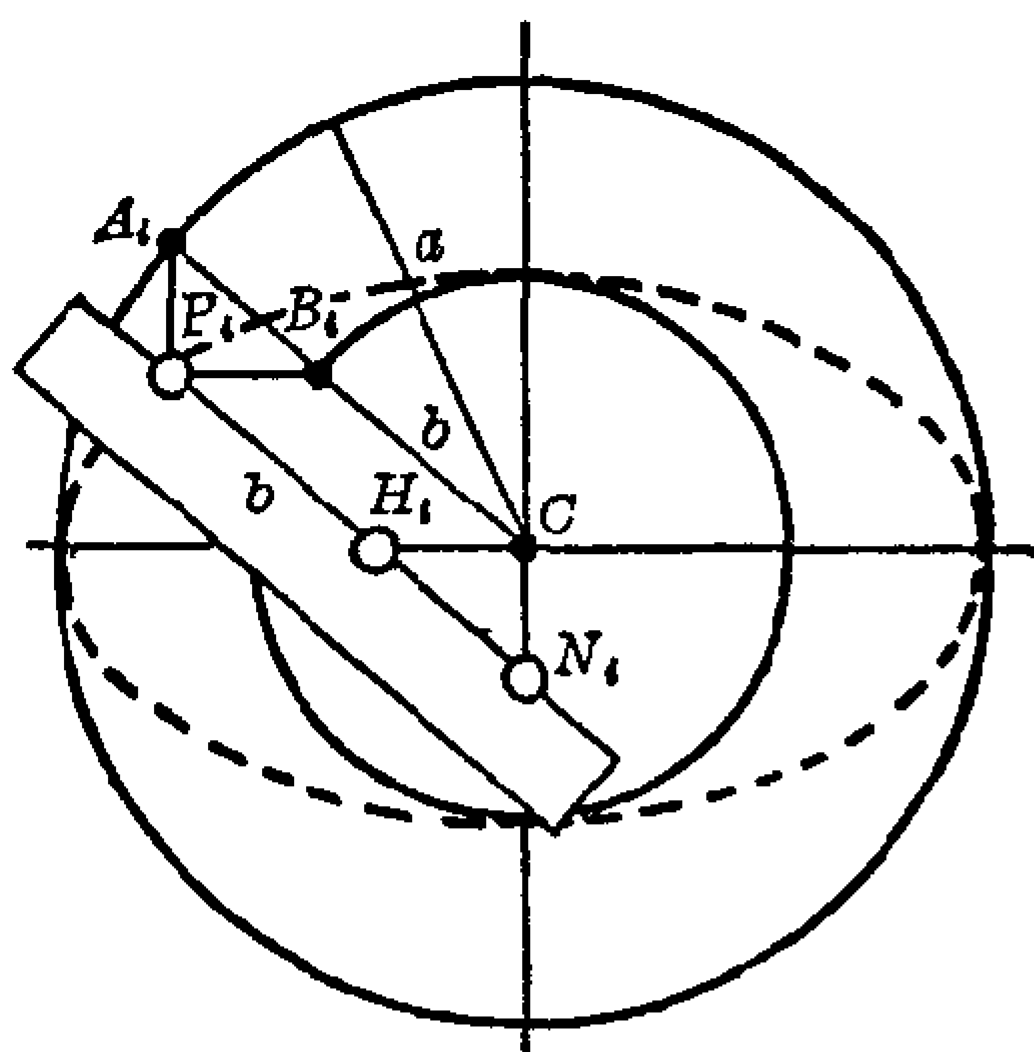


图 7.11-3 椭圆绘图仪的原理

如果椭圆的两条直径是双圆作图法中圆的两根正交直径的象，那末称它们是**共轭的**。例如，CP 和 CQ 是正交半径 $CP_1\perp CQ_1$ 的象（见图7.11-4）。因此旋转 90° 后，$\triangle CPP_1$ 变成 CP^*Q_1，即 P_2 到 Q_2，P 到 P^* 以及 P_1 到 Q_1。四边形 $QQ_2P^*Q_1$ 是一长方形。它的对角线 QP^* 向两面延长，与椭圆的轴交于 X 和 V。其边 Q_1Q，P^*Q_2 和 QQ_2 延长后分别与两轴相交于 R,S 和 T。现在图中含有边和角相等的直角三角形，$\triangle XRQ\cong\triangle CSQ_2$，给出了 $|CQ_2|=|XQ|=b$；$\triangle RCQ_1\cong\triangle QTV$ 给出了 $|CQ_1|=|QV|=a$。里茨 (Rytz) 作图法就是根据这些等式得到的，也就是 $|UX|=|UC|=|UV|$ 这等式。

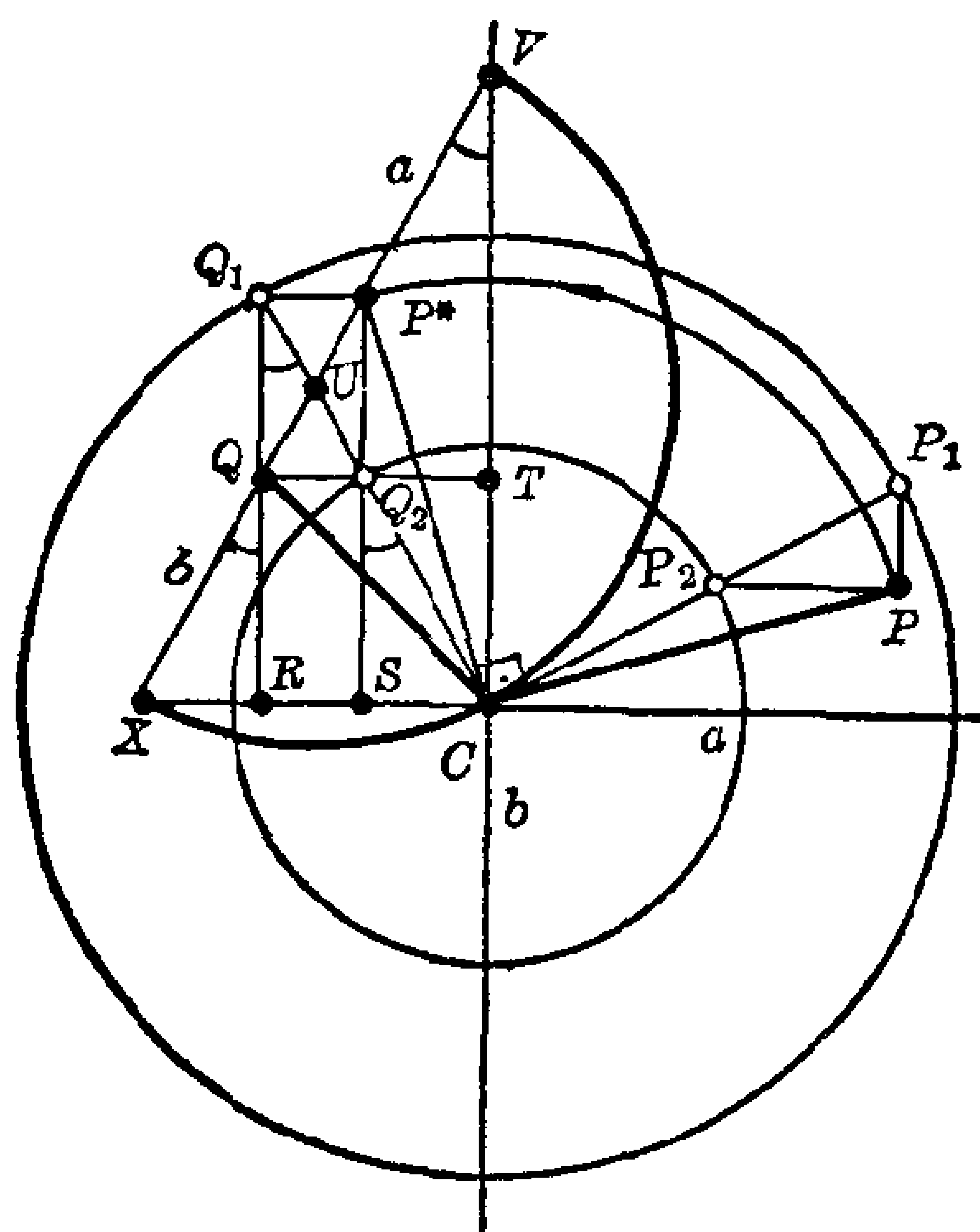


图7.11-4 里茨作图法

第二种纸片作图法。 如果线段 $(a+b)$ 的端点 X 和 V 沿两正交的轴移动，那末线段上使 $|XQ|=b$ 和 $|QV|=a$ 的点 Q 画出了一个椭圆。

里茨作图法。 如果只知道中心点 C 及椭圆的两个共轭半直径 CP 和 CQ，那末两根轴可用下面的方法作出。将 CP 绕 C 点旋转 $90°$，得 CP^*。以 QP^* 的中点 U 为圆心、以 $|UC|$ 为半径的圆和 QP^* 的延长线交于 X 和 V，现在 CX 和 CV 就是这两根轴，$|QV|$ 和 $|QX|$ 的长度分别是长轴和短轴的一半 a 和 b。

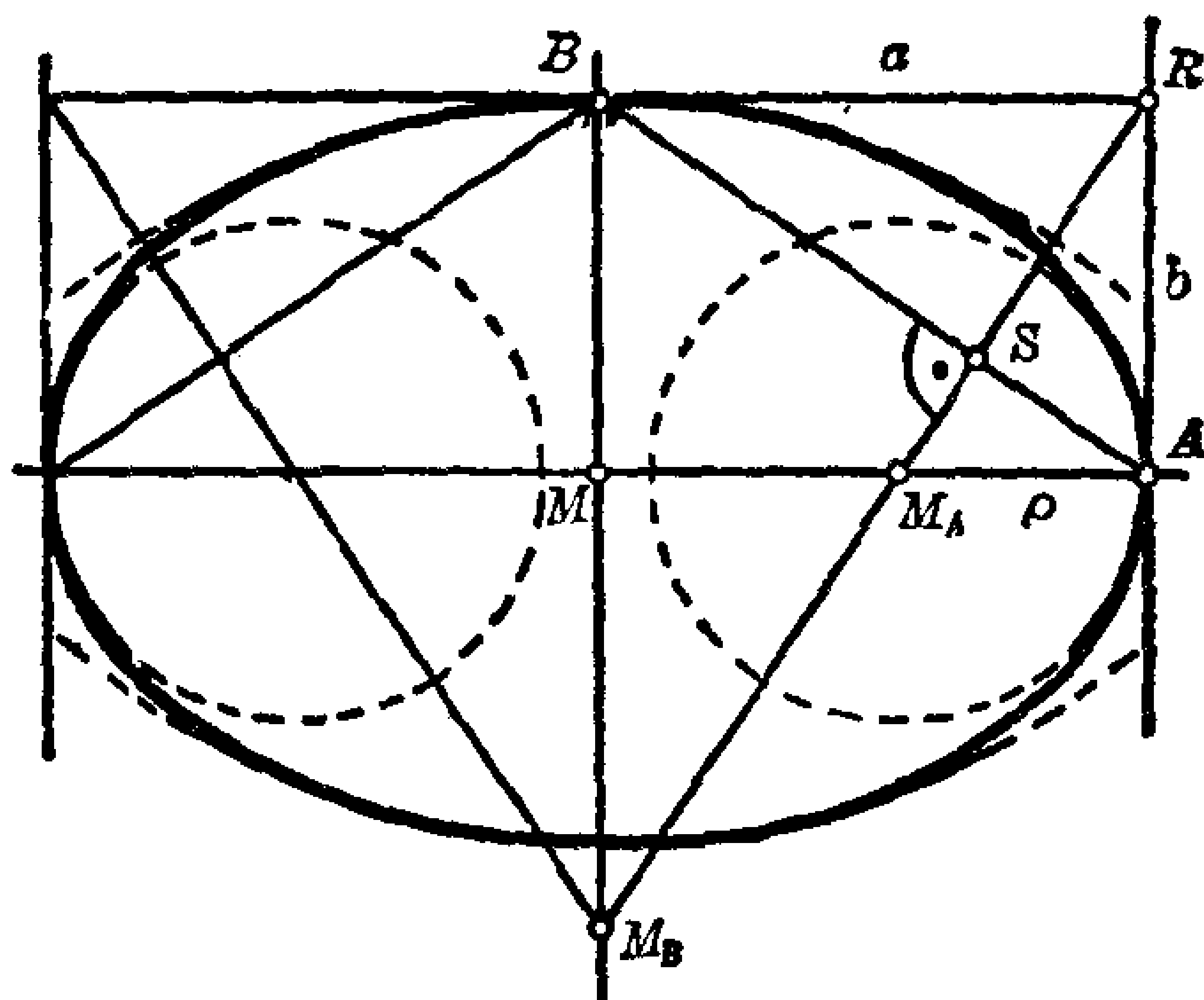


图 7.11-5 用曲率圆的近似作法

用主曲率半径近似作法。 常用一些圆来近似地画出一个椭圆，而图形也是足够精确的。这些圆的半径就是在长轴和短轴处的曲率半径（见图 7.11-5）。只要用少量的辅助线就能作出它们的圆心 M_A 和 M_B，以及半径 $r=|M_BB|$ 和 $\rho=|M_AA|$。如果椭圆的轴选作坐标系的轴，那末用解析几何的方法也能很容易将它们计算出来。作顶点为 $M(0, 0)$，$A(a, 0)$，$R(a, b)$ 和 $B(0, b)$ 的长方形和它的对角线

$$AB(y=-(b/a)x+b)。$$

过 R 和 AB 垂直的垂线 $[y=(a/b)x-(a^2-b^2)/b]$ 交于它上面的 S 点 $[x_S=a^3/(a^2+b^2),\ y_S=b^3/(a^2+b^2)]$；$|AS|=b^2/\sqrt{a^2+b^2}$，$|SB|=a^2/\sqrt{a^2+b^2}$，以及交于轴上 M_A 和 M_B 两点，这两点就是要求作的圆心。这两条半径可用相似三角形来计算。直线 RSM_B 和 ASB 与平行线 $RB \parallel AM$ 及 $BM_B \parallel RA$ 相交，因而有：$\rho:a=|AS|:|SB|=b^2:a^2$ 或 $\rho=b^2/a$，以及 $r:b=|SB|:|SA|=a^2:b^2$ 或 $r=a^2/b$。

椭圆的切线 如果 P_i 是椭圆上的任意一点，该椭圆的焦点为 F_1 和 F_2（见图 7.11-6），那末向径 $|F_2P_i|=r_2$ 延长到 L_i，使 $|P_iL_i|=|P_iF_1|=r_1$，L_i 到 F_2 的距离总是等于 $r_1+r_2=2a$。有时称以 F_2 为圆心、以 $2a$ 为半径的圆为导圆。线段 F_1L_i 的垂直平分线 P_iN_i 将等腰三角形 $F_1P_iL_i$ 的顶角平分，且是该椭圆在 P_i 点的切线。对于该线上其他每一个点 Q_i，由于三角形 $F_2Q_iL_i$ 给出了 $|F_2Q_i|+|Q_iL_i|>|F_2L_i|=2a$，因此 Q_i 不在椭圆上。这也给出了椭圆的一种新定义：

椭圆是平面上一些圆的圆心轨迹，这些圆和一给定的圆，即半径为 $2a$，圆心为 F_2 的导圆内切，并通过一固定的内点 F_1。

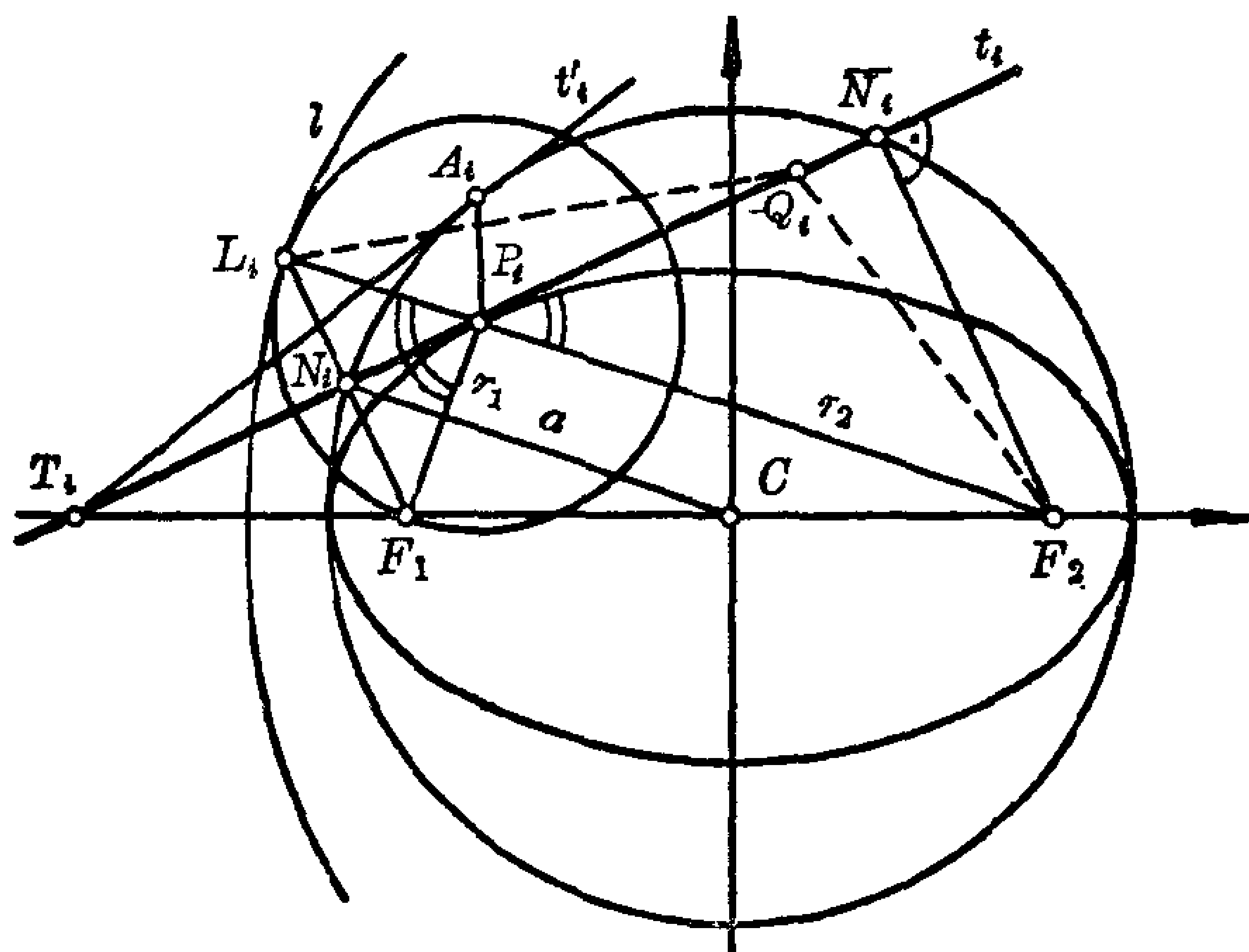


图 7.11-6 椭圆的切线

从图中可以看出，半径 r_1 和 r_2 与切线的夹角相等，因而从椭圆的一个焦点发出的声波或光波能被反射到另一个焦点上。在椭圆形的低语廊里，在 F_1 处发出很轻的声音，能在 F_2 处清楚地听到，而在其他地方却都听不见。

如果 C 是椭圆的中心，由于 N_iC 平分三角形 $F_1F_2L_i$ 的两条边 F_1L_i 和 F_1F_2，因而它和第三边平行并是它的一半。因此所有过 F_1 和切线垂直的直线与切线的交点 N_i 都在以 C 为圆心、a 为半径的圆上。

从椭圆焦点作它切线的垂线，其垂足都在以半长轴 a 为半径的外接圆上。

如果将椭圆看成是外接圆的仿射象(见图7.11-6),那末P_i是圆上点A_i的象,A_iP_i和长轴垂直,长轴称为仿射轴。圆A_i处的切线t'_i与椭圆P_i处的切线t_i相交于长轴的延长线上T_i点,用这点和t'_i可作出t_i。

椭圆的面积 仿射映象$x=x'$, $y=(b/a)y'$可将半径为a的圆变换成一半长轴为a,半短轴为b的椭圆。圆的面积公式πa^2变为πab。

椭圆面积	$A=\pi ab$

双曲线

双曲线是平面上与两定点距离之差为一常数$2a$的点的轨迹。

给定点F_1和F_2是双曲线的焦点,双曲线上一点到两焦点的线段r_1和r_2称为该点的径向距离(见图7.11-7)。常数$2a$必须小于两焦点之间的距离。如果以F_1和F_2为圆心,以r_1和r_2 $(r_1-r_2=2a)$为半径分别作两条弧,它们的交点P_1和P_2是双曲线上的点。半径的长度交换一下,可得另外两点P_3和P_4。过F_1和F_2的直线是P_1和P_2,也是P_3和P_4的对称轴,而且事实上也是整个双曲线的对称轴。F_1F_2的垂直平分线也是一根对称轴。两轴的交点C是双曲线的对称中心,称为双曲线的中心。称焦点到中心的距离为焦距或线性偏心率$e=|CF_1|=|CF_2|$。双曲线和它主轴F_1F_2的交点称为它的顶点V_1和V_2。它们和中心的距离为a,和焦点的距离分别为$e-a$和$e+a$。

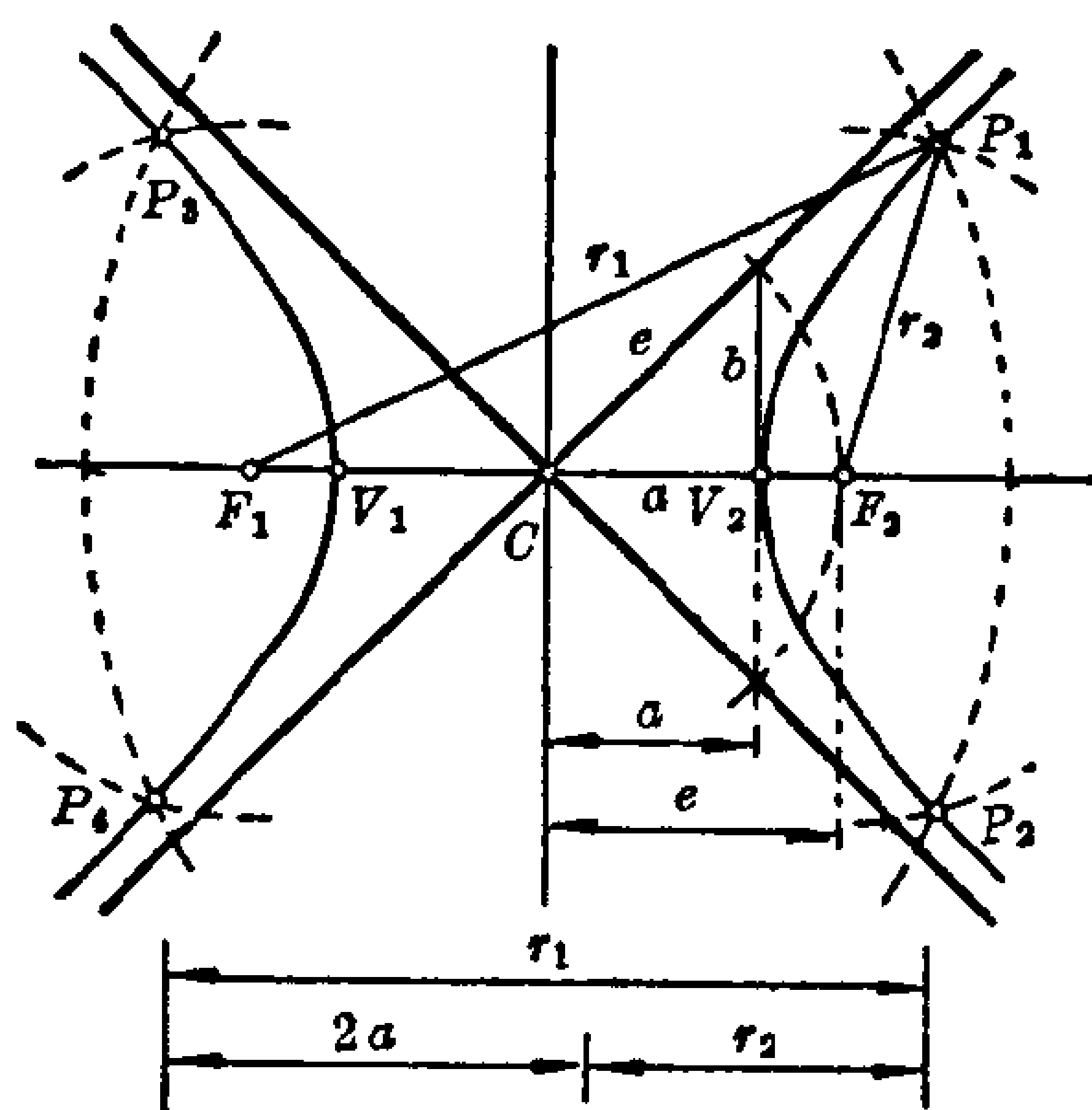


图7.11-7 双曲线: $r_1-r_2=2a$

双曲线	$r_1-r_2=2a$ $e^2=a^2+b^2$

在解析几何中可以证明双曲线有两条渐近线。这两条渐近线分别和过V_1和V_2点垂直于主轴的直线相交,交点和V_1及V_2的距离为b,可由公式$b^2=e^2-a^2$来计算出b。

双曲线完全落在由渐近线所组成的对顶角的两条边内。在极限情况 $b=0$, $e=a$ 时，主轴 $|V_1V_2|=|F_1F_2|$ 以外的两根半直线就是**退化双曲线**。在这两半直线上每个点重复了两次。另一方面，当 b 增大时，双曲线的曲率减小。在极限 $b\to\infty$ 时，过 V_1 和 V_2 点和主轴垂直的直线就是它的**退化双曲线**。如果 $a=b$，两渐近线互相垂直，双曲线称为是**等轴的**。

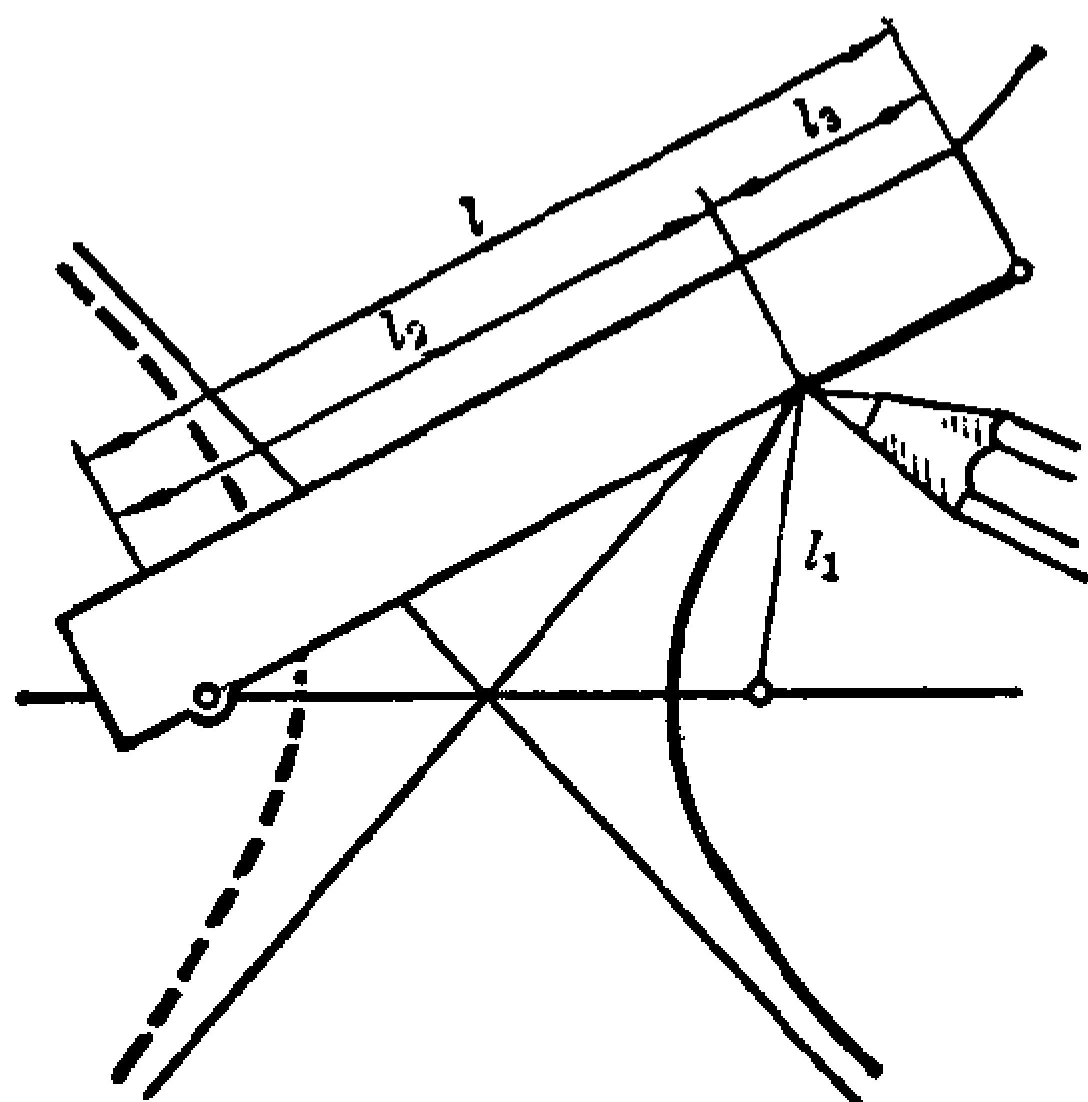


图 7.11-8 用线来作双曲线

用线来作图 假定给出了双曲线的两个焦点 F_1 和 F_2 以及线段 $2a$，用一长为 l 的直尺，将它的一端固定在 F_1 上，并使它能上下转动。取一根长为 $k=l-2a$ 的线，其一头缚在直尺的一端，另一头缚在 F_2 上。用铅笔套住这根线，使线往直尺的边上贴紧。这时使直尺转动，铅笔也同时贴紧直尺移动，并使线总是处于拉紧的状态，这样，铅笔所画出的就是双曲线的一条弧(见图 7.11-8)。这是因为 $l_2+l_3=l$, $l_1+l_3=k$，故 $l_2-l_1=l-k=2a$。

双曲线的切线 如果 P_i 是双曲线上任意一点，双曲线的焦点为 F_1 和 F_2。在动径 $|P_iF_2|=r_2$ 上截去一段等于 $|P_iF_1|=r_1$ 的线段，那末这分点 L_i 到 F_2 的距离为一**固定的长度** $|F_2L_i|=2a$。F_1L_i 的**垂直平分线** P_iN_i 平分等腰三角形 $F_1L_iP_i$ 的顶角，并且也是双曲线在 P_i 点处的切线 t_i。因为对于在该直线上其他每一点 Q_i，从三角形 $F_2Q_iL_i$ 可有 $|F_2Q_i|-|Q_iL_i|$ 小于 $|F_2L_i|=2a$，因此在这些点中没有一个是在双曲线上的。这也给出了双曲线的另一种新定义：

双曲线是一些圆的圆心轨迹，这些圆和一给定的圆(即是以 F_2 为圆心、$2a$ 为半径的导圆)外切，并通过一固定的外点 F_1。

从图 7.11-9 中可以看出：

双曲线 P_i 点处的切线平分这一点两条动径之间的夹角。

如果 C 是双曲线的中心，那末直线 CN_i 平分三角形 $F_1F_2L_i$ 的两条边 F_1F_2 和 F_1L_i。因而它和第三边平行并等于它的一半。因此从一焦点到双曲线切线的垂足都在以 C 为圆心、a 为半径的圆上。

双曲线焦点到切线的垂足都在相切于双曲线顶点、圆心是双曲线中心的这一个圆上。

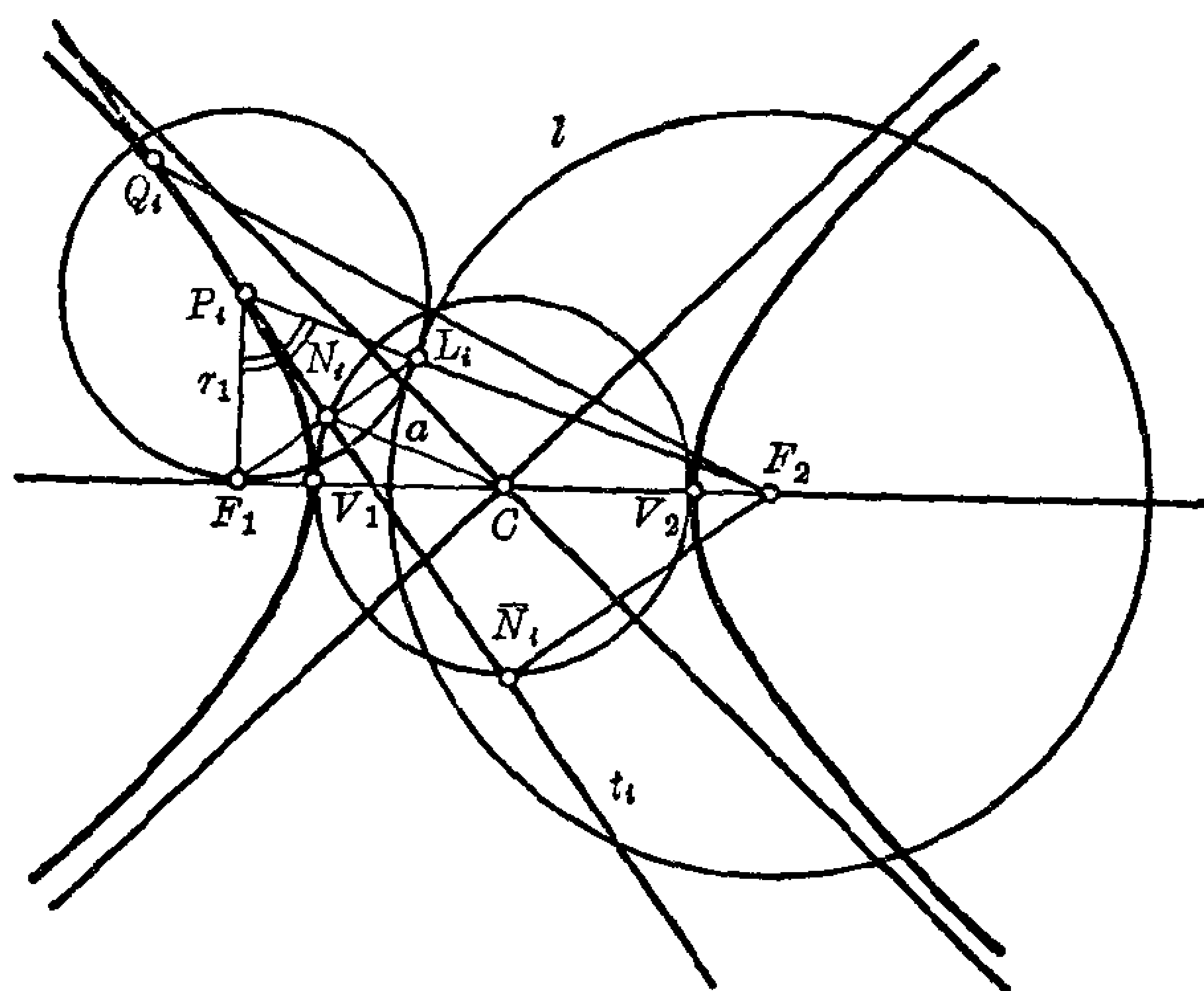


图 7.11-9　双曲线的切线

抛物线

抛物线是平面上与一定点及一条定直线距离相等的点的轨迹。

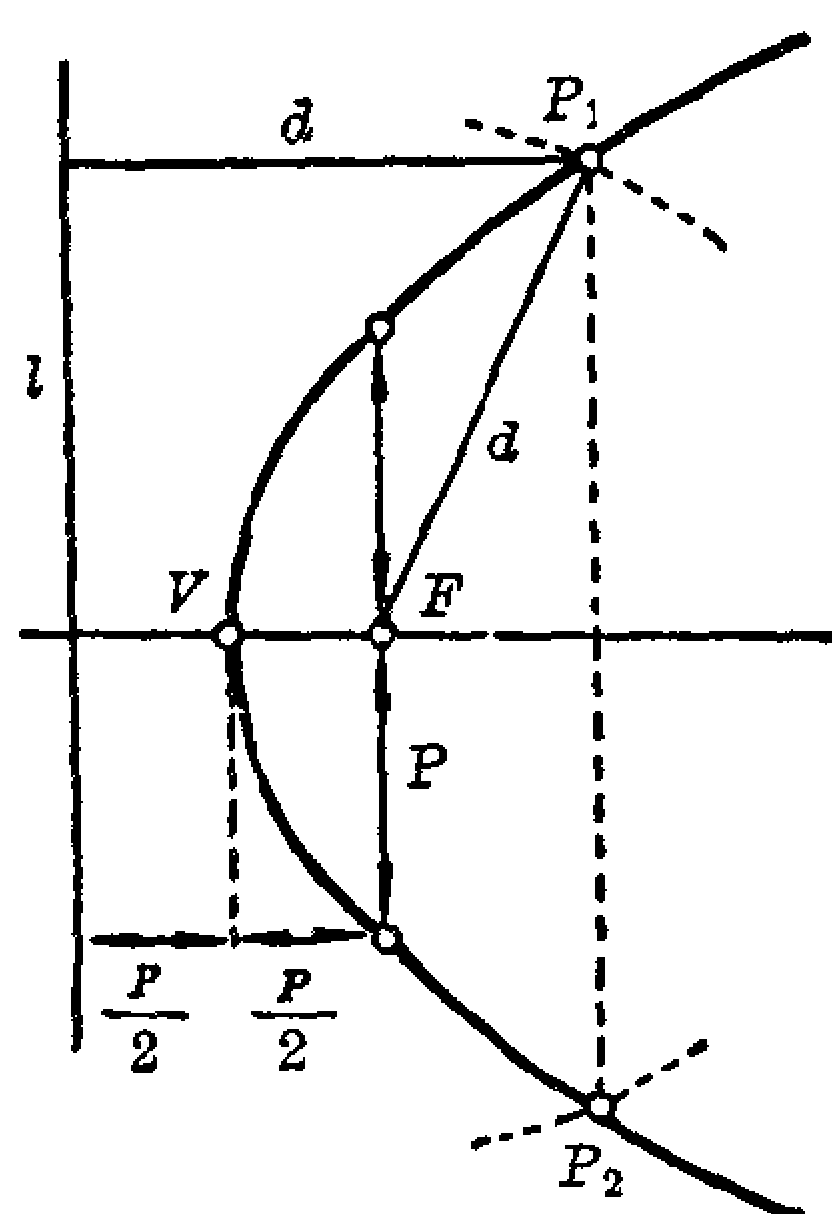


图 7.11-10　抛物线

这点称为焦点 F，这条直线称为准线。从焦点到准线的距离是抛物线的半参数 p（见图 7.11-10）。每一根平行于准线、并和它相距 $d\left(>\frac{p}{2}\right)$的直线与以 F 为圆心、d 为半径的圆相交于抛物线上两点 P_1 和 P_2。因而这两点，以及整个抛物线关于过焦点 F 且垂直于准线的直线对称。这条直线称为抛物线的轴，它和抛物线相交于它的顶点 V。这顶点到焦点和准线的距离为 $p/2$。根据抛物线的定义，很明显过焦点和准线平行的弦的长度为 $2p$。

用线来作图　也可以用一根线来作出

抛物线的图形。用一块三角板(或直尺)，使它的一条短边 AB 靠在准线上，并可上下移动。再用一根长度为 $|BC|$ 的线，把它的一头缚在 C 点，另一头缚在焦点上。用一枝铅笔使这根线贴住三角板的边并将它拉紧，在三角板上下移动时，铅笔画出了抛物线的一条弧。因它和准线的距离总是等于它和焦点的距离(见图 7.11-11)。

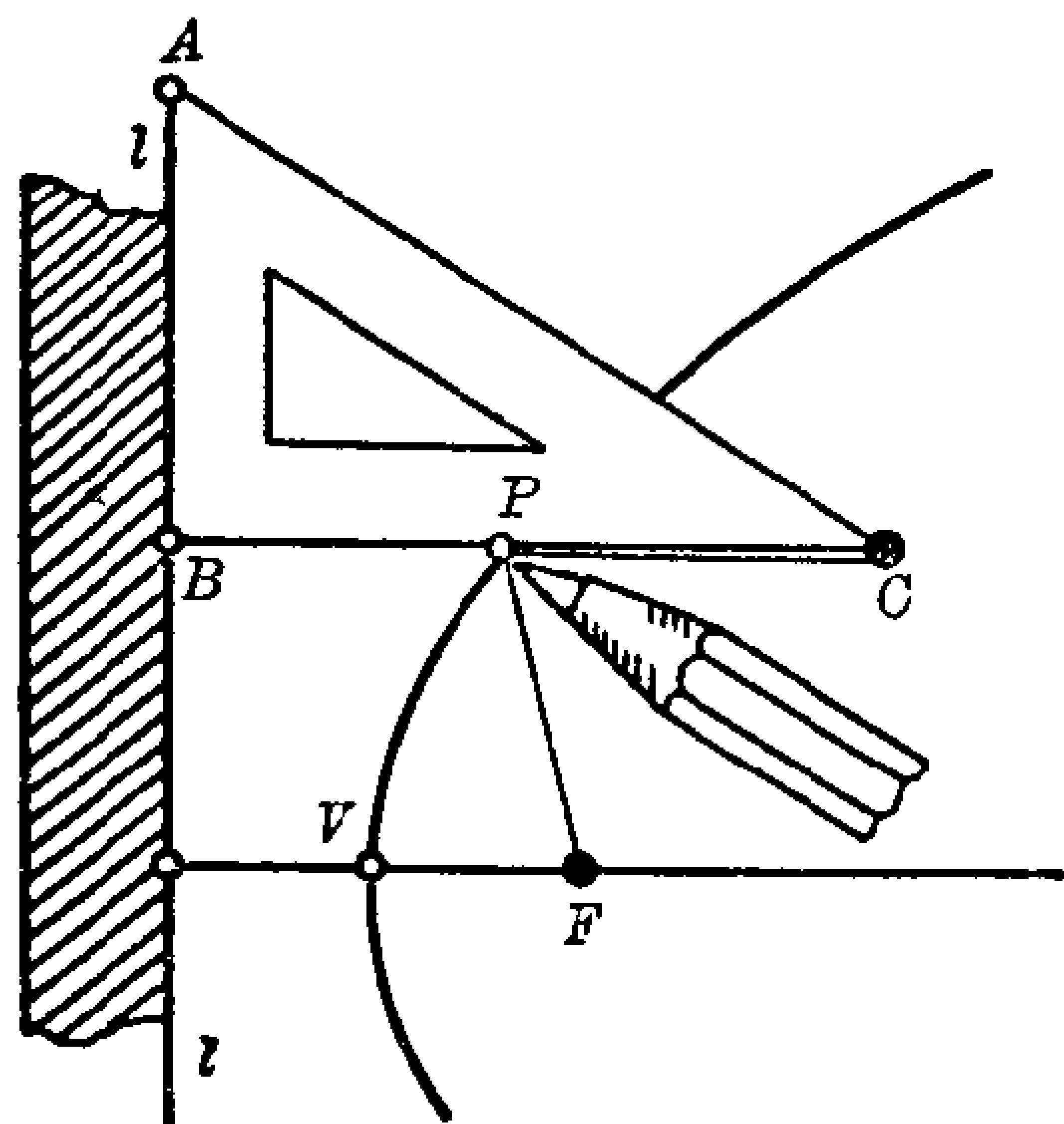


图 7.11-11 用线来作抛物线

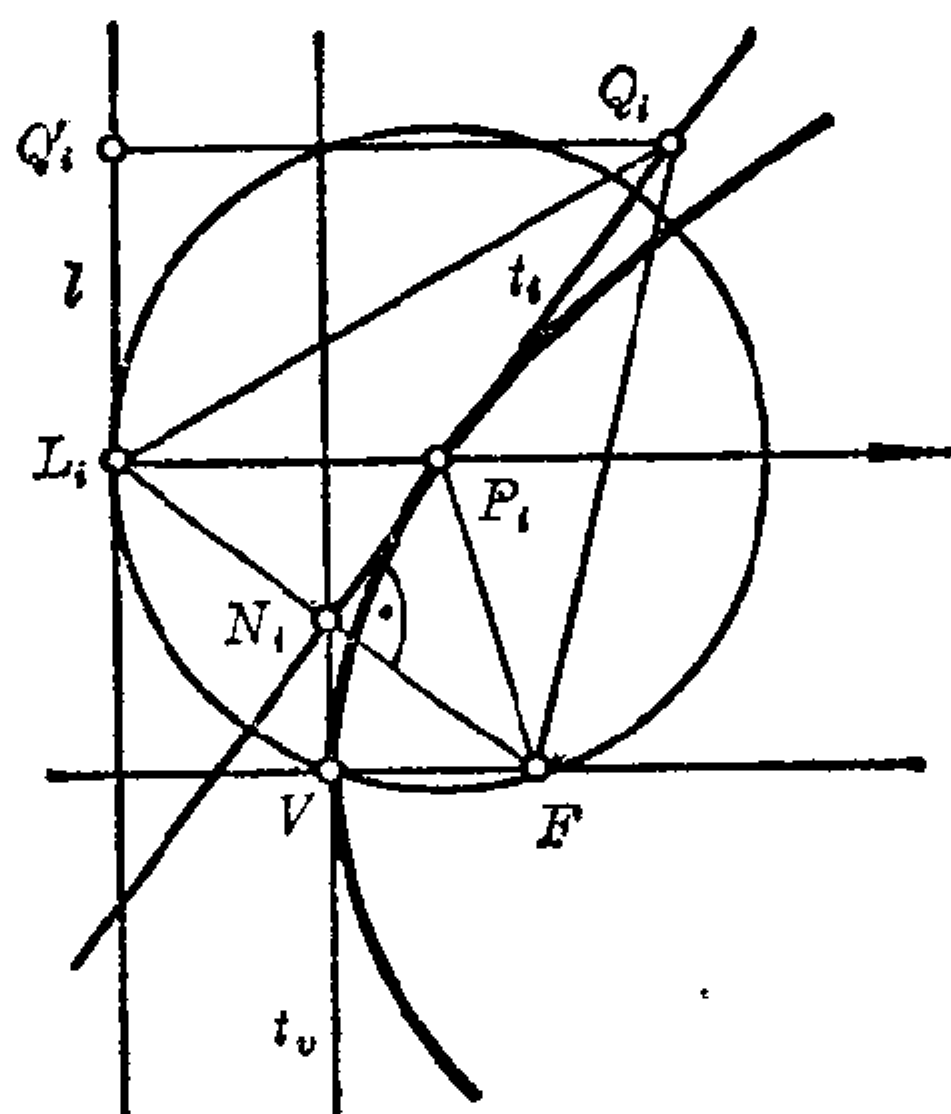


图 7.11-12 抛物线的切线

抛物线的切线 如果 P_i 是抛物线上一点，它和准线 l 的距离 $|P_iL_i|$ 等于 $|P_iF|$，因而 $\triangle FL_iP_i$ 是一等腰三角形。FL_i 的垂直平分线 P_iN_i 将角 $\measuredangle L_iP_iF$ 平分，并且是抛物线在 P_i 的切线 t_i。因为如果 Q_i 是 t_i 上其他任何一点，Q_i 到准线的距离 $|Q_iQ'_i|$ 小于

$$|Q_iL_i| = |Q_iF|$$

(见图 7.11-12)。这又给出了另一种抛物线的定义：

抛物线是一些圆心 P_i 的轨迹，这些圆和一给定的线 l (准线)相切，并通过一定点 F。

从图中可以看出，P_i 点处的切线和动径 P_iF 的夹角等于切线和过 P_i

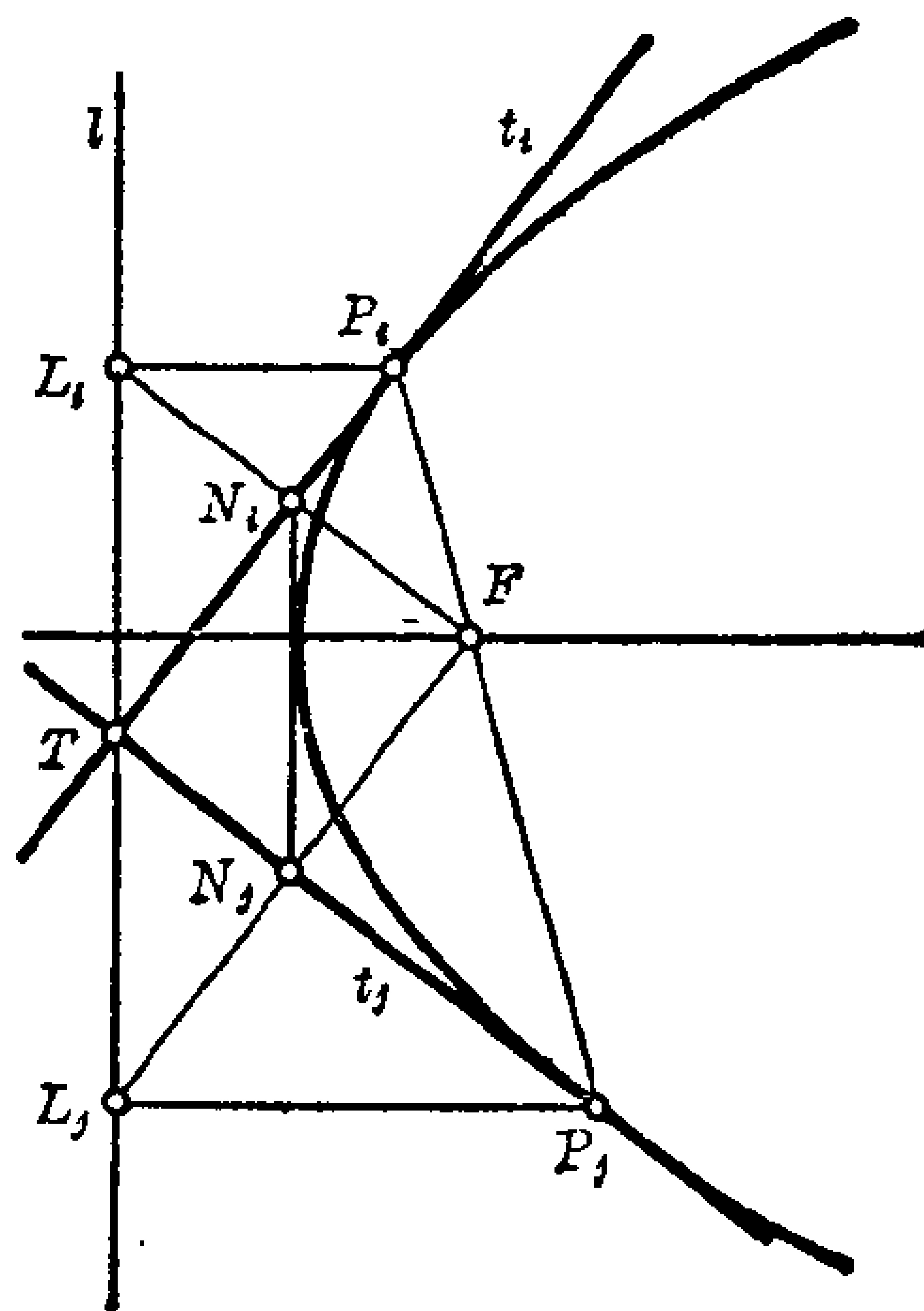


图 7.11-13 一对正交的抛物线切线

平行于轴的直线的夹角。凡是从抛物线焦点发出的射线经反射后都变成和轴平行的平行线。反过来，和轴平行的平行线都被反射到焦点上。

由于 N_i 点在过顶点 V 的垂直切线 t_v 上，这切线和轴垂直，因而有：

抛物线是所有直角三角形一边的包络线，这些直角三角形的顶点在垂直切线上，而其另一边通过焦点。

如果切线 t_j 垂直于 t_i，它们相交于 T 点，那末 FN_iTN_j 是一长方形，它的对角线 N_iN_j 是垂直切线 t_v 上的一段线段，因此它一定和准线平行。三角形 N_iN_jF 和 N_iN_jT 全等，因而它们底边 N_iN_j 上的高也相等。故 T 和垂直切线的距离为 $p/2$，并在准线上(见图 7.11-13)。

正交的抛物线切线在准线上相交。

第8章 立体几何

8.1 基本概念……309
空间的直线和平面……309
立体……313
测量单位……314
8.2 立方体和长方体……315
表面积……315
体积……316
特殊关系……318
8.3 棱柱和圆柱……319
概述……319
表面积……321
卡瓦列利原理……322
8.4 棱锥和圆锥……324
概述……324
表面积……326
体积……327
平截头棱锥体(棱台)和平截头圆锥体(圆台)…328
8.5 多面体……330
欧拉多面体定理……330
正多面体……331
晶体……333
8.6 球……334
概述……334
体积……336
表面积……338
8.7 其他立体……339

立体几何是欧几里德几何的一个分支，其内容包括不位于一平面的几何图形的形状、相对位置、大小及其他度量性质。立体几何是三维空间几何，它对客观实体的空间性质作了深刻的阐明。

立体几何的有些问题可以限制在一个平面上讨论，因此它与平面几何有密切联系。此外，在立体几何中常要用到画法几何的方法。最后，在数值立体几何中，算术和代数运算是必不可少的。

8.1 基本概念

空间的直线和平面

点、直线和平面是三维空间初等几何学的基石；特别是几何体的边界曲面常常是由平面组成的。在平面几何中对点和直线的基本概念的直观

解释，必须再根据平面的基本概念和在空间的直线与平面的相对位置予以补充。

平面 设有一固定点 A 和一不过 A 点的直线 l_1，过 A 点与 l_1 相交或与 l_1 平行的直线族组成一个平面(见图 8.1-1)。空间平面还可以看成是由直线 l 沿着与它相交的另一条直线 l_1 平移得到的。因此，空间平面的位置是由如下子集唯一确定的：1. 一条直线 l_1 和线外的一个点 A；2. 两条相交直线 l 和 l_1；3. 两条平行直线；4. 不在一条直线上的三个点，例如 A 和确定 l_1 位置的两个点；5. 一个点 A 和一个矢量(平面的法向矢量 $\boldsymbol{n}$)。

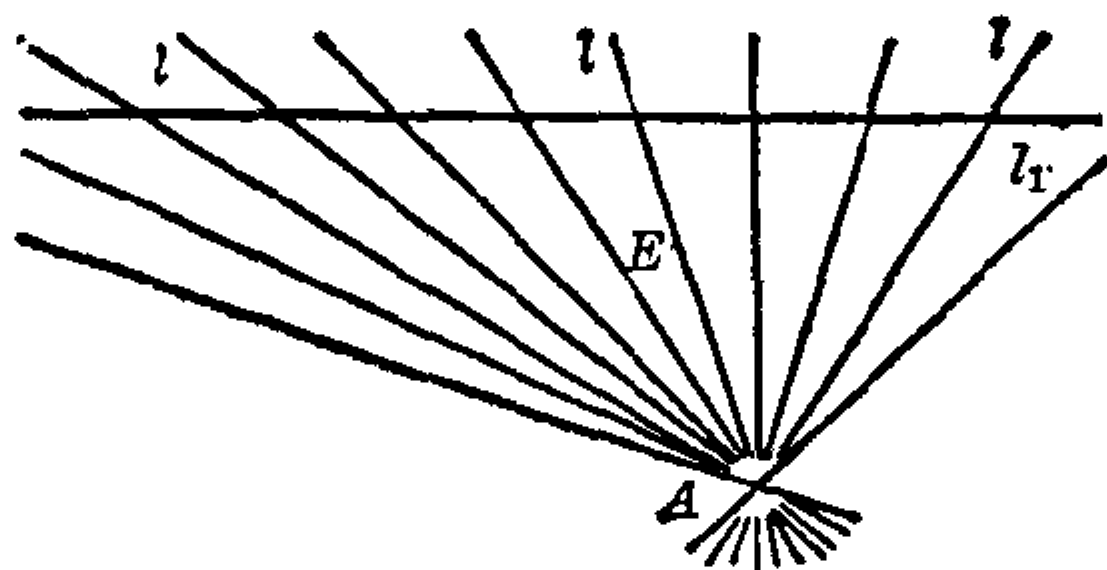


图 8.1-1 空间平面的构成

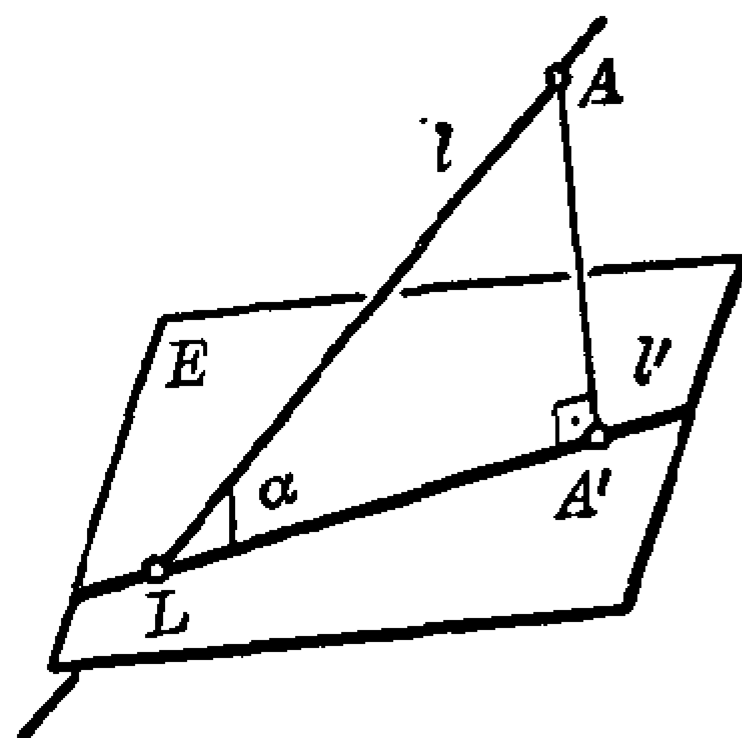


图 8.1-2 直线 l 相对于平面 E 的倾角

空间中直线和平面的相对位置 如果一条直线 l 和一个平面 E 有两个公共点 A 和 B，则直线 l 一定在平面 E 上；如果直线 l 与平面 E 没有任何公共点，或者直线完全位于平面上，则称 l 平行于 E。如果直线 l 与平面 E 只有一个公共点，即交点 L，则称此直线 l 与平面 E 相交。如果直线 l 垂直于平面 E 上的两根不同直线 l_1 和 l_2，则此直线 l 与平面垂直于 L 点。如果直线 l 与平面 E 交于 L 点，将此直线垂直投影到 E 上，便得到 l 在 E 上的正投影 l'。l 对 E 的倾角 α 定义为 $\alpha = \sphericalangle(l, l')$ (见图 8.1-2)；如果 $l \perp E$，则 $\alpha = 90°$，如果 $g \parallel E$，则 $\alpha = 0°$。

空间中直线的相对位置 假如两直线 l_1 和 l_2 互相平行或相交于一点，则过此两直线可作一平面，两线间的距离或夹角可由平面几何的方法来确定。

两偏斜直线 l_1 和 l_2 (见图 8.1-3) 既不平行也没有公共点。过一直线上的一个点作一条与另一直线平行的直线，例如过 l_1 上的 N 点作 $l_2' \parallel l_2$，则 l_1 和 l_2' 之间的夹角就定义为 l_1 和 l_2 之间的倾角α。直线 n_{12} 在 N 处垂直 l_1 和 l_2'，也垂直于 l_2。l_1 和 n_{12} 构成的平面 E 与 l_2 交于 D_2 点，过 D_2 点

平行于 n_{12} 的直线交 l_1 于 D_1。线 D_1D_2 是 l_1 和 l_2 的公垂线，D_1D_2 的长度 d 是这两条偏斜线之间的距离。这是 l_1 上的点与 l_2 上的点之间的最小距离。

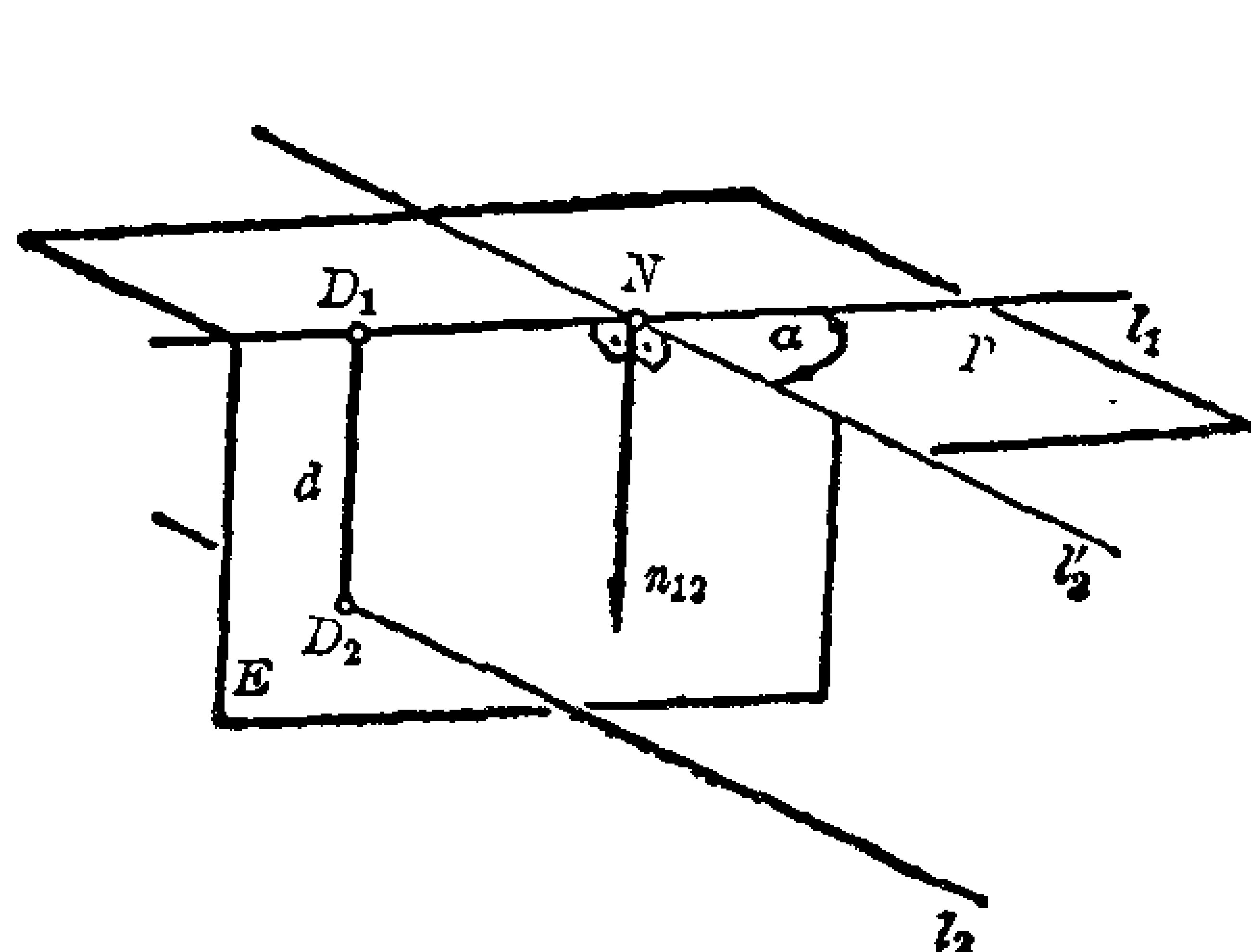


图8.1-3 偏斜直线间的距离

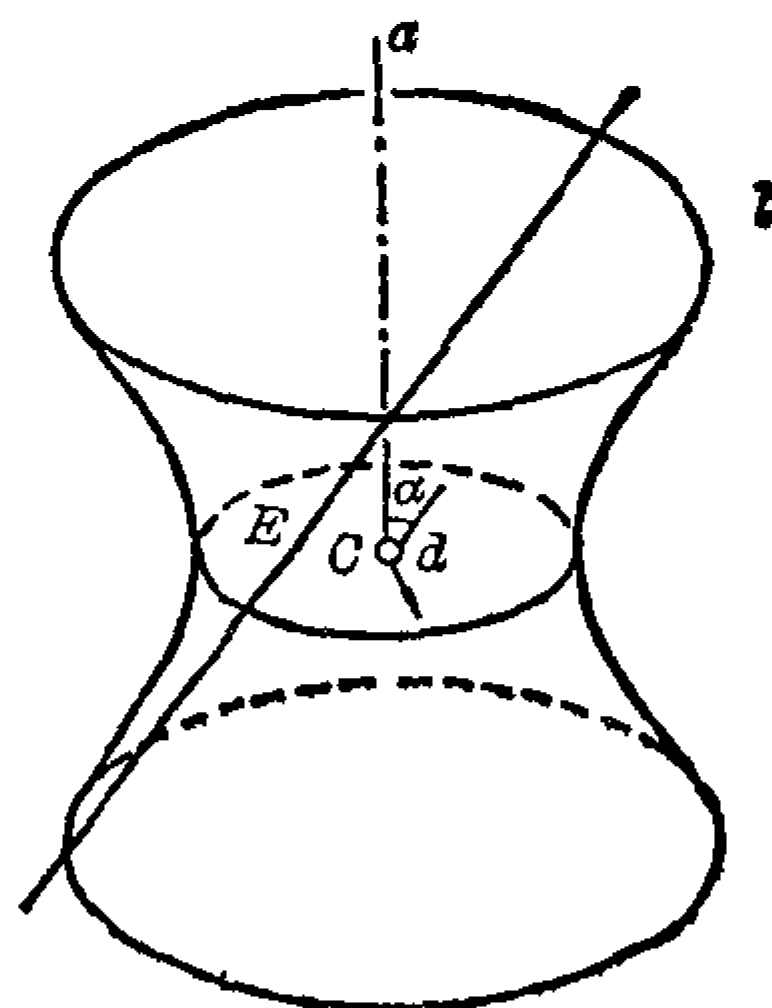


图8.1-4 单叶旋转双曲面

对于空间的任一直线 a，有任意多条直线 l 与 a 构成一给定角 α，并与 a 相距一给定距离 d。如果我们选择限于这样的直线 l，即它们与 a 的公垂线都在与 a 垂直的平面 E 上，这样就得到两个直线族，它们是以 a 为转轴的单叶旋转双曲面的母线(见图 8.1-4)。平面 E 与双曲面相交截出最小圆，转轴就在圆心处。此外，一组母线的每根线都与另一组的每根线相交(与之平行的线除外)，而一组母线中的任何两条线都是偏斜线。特别是如果 $\alpha=0$，曲面即为旋转柱面，这正好是彼此平行的一组母线。

以一确定角度 α 与一固定直线 a 相交于 Z 点的直线集组成一旋转锥面。Z 为顶点，a 是轴，直线 l 是锥面的母线。

过空间一点 P 的线集构成一个线把。过 P 的任一平面截此线把成为一线束。如果 P 是无穷远处的一个点(非正常点)，则相应的线系是空间平行直线把和平面平行直线束(参看 **II**. 第 12 章)。

空间平面的相对位置 非重合的空间两平面最多只能有一条公共线。既没有公共点也不重合的两个平面叫平行平面。

包含一直线 s 的平面集合组成一平面束，s 就是它们的承载子(见图 8.1-5)。一垂直于 s 的平面 Π 与这些平面相交成线束。平面 Π 上各线之间的交角根据定义就等于相应面的交角，例如，

$$\beta=\measuredangle(l_1, l_2)=\measuredangle(E_1, E_2)。$$

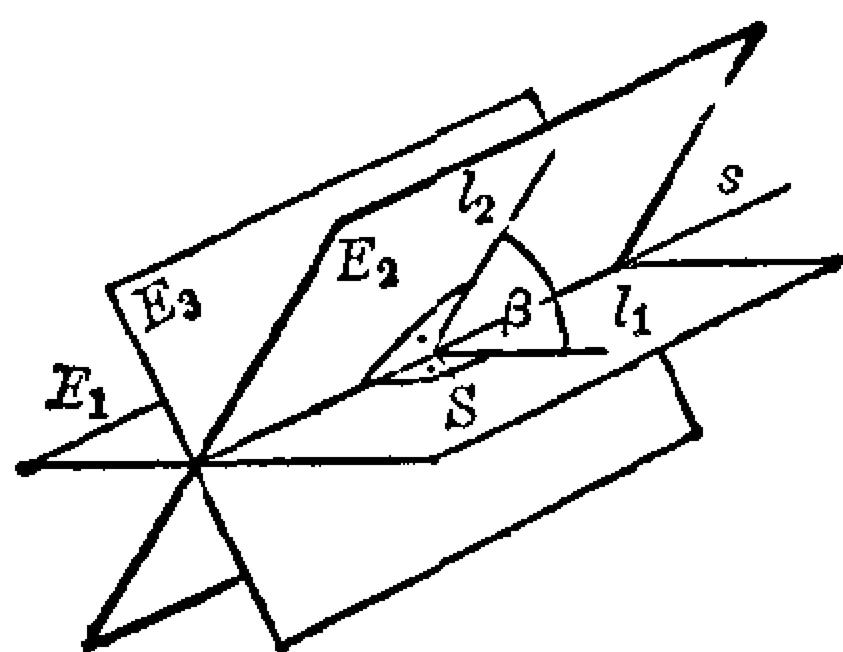


图 8.1-5　以直线 s 为承载子的平面束

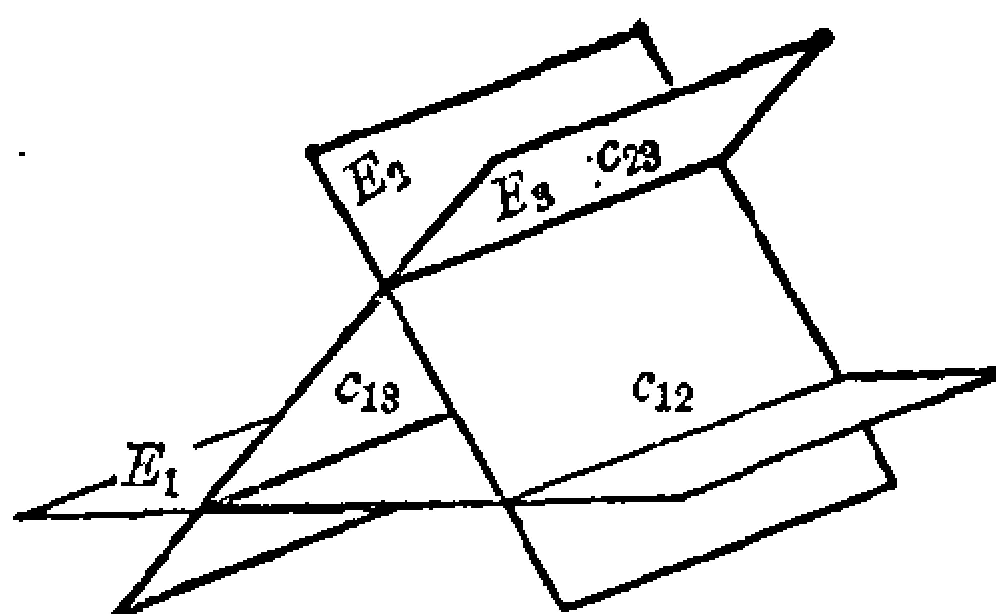


图 8.1-6　三个平面 E_1, E_2, E_3 的交线 c_{12}, c_{13}, c_{23} 的平行性

因此，两个平面的交角被归结为两条直线的交角。

如果 $\beta=90°$，两直线互相垂直。如果平面 E_2 平行于两平面 E_1 和 E_3 的交线 c_{13}，则它与 E_1 和 E_3 相交得平行线 $c_{12}\parallel c_{13}\parallel c_{23}$（见图 8.1-6）。**平行平面束**是这样的一些平面，它们中的任何两个平面均无公共点（见图 8.1-7）。如果一直线垂直于平行平面束中的一个平面，则它与束中每一个平面都垂直。在垂直线上截出的线段即为相应两平面之间的距离；例如，$|P_2P_3|$ 是平面 E_2 和 E_3 之间的距离。

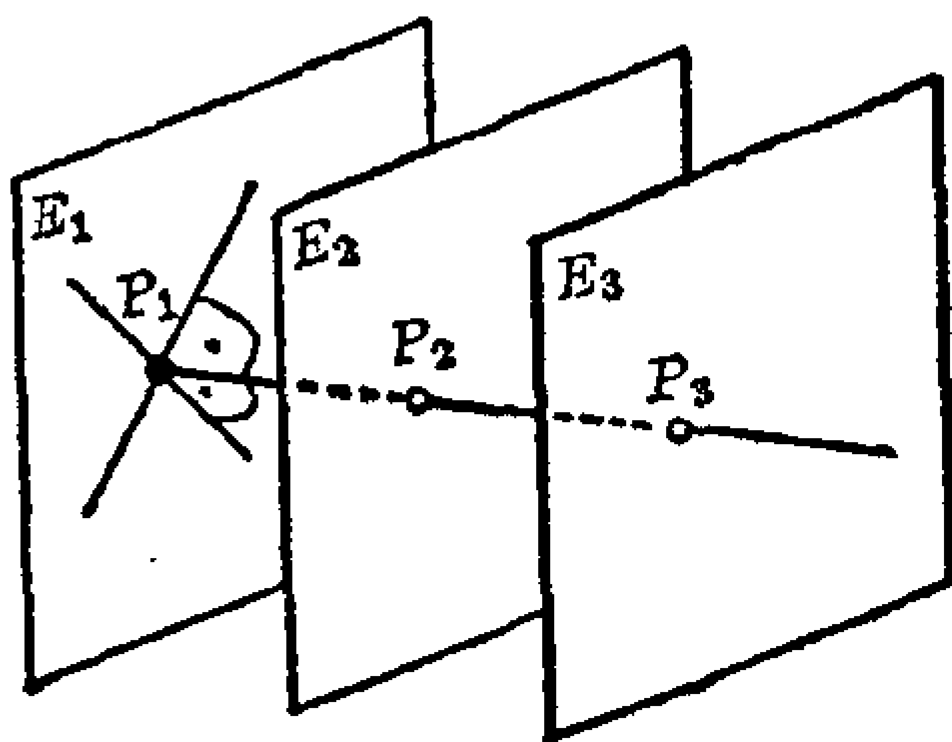


图 8.1-7　平行平面束

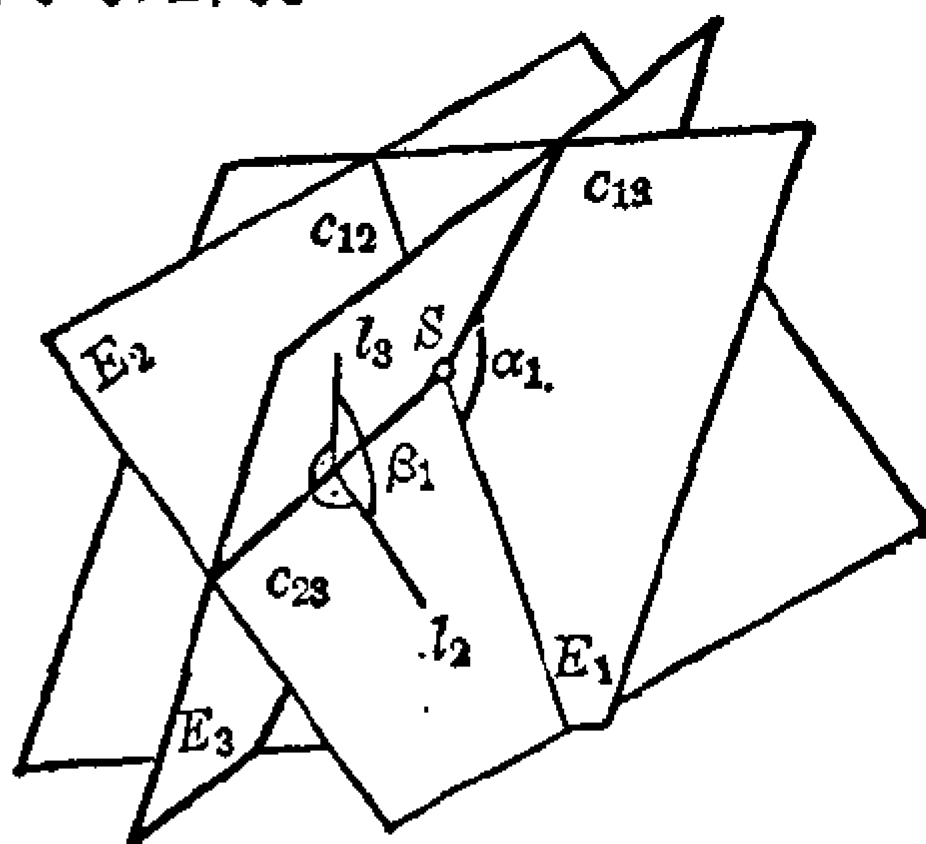


图 8.1-8　平面把和立体角

平面把表示具有一公共点 S 的所有空间平面集。S 是把的承载子。这些平面中的任何两个都相交于过 S 点的直线，例如，E_1 和 E_2 相交于 c_{12}（图 8.1-8）。一个把的三个平面 E_1, E_2, E_3 只有一个公共承载子 S，它们的交线为 c_{12}, c_{13}, c_{23}，这样的三个平面分空间为八个具有公共顶点 S 的三棱或三面**立体角**。这个顶点分每条交线为两条半直线，而不同直线的任意三条半直线组成了立体角的棱。

两条棱之间的夹角叫**棱角**，它是在由此两棱构成的平面中测量的，例如，$\alpha_1=(c_{12}, c_{13})$。**面角**是在与两平面交线垂直的平面内测量的，例

如，$\beta_1 = \sphericalangle(l_2, l_3)$是$E_2$和$E_3$之间的夹角，这里$l_2 \perp C_{23}$，$l_3 \perp C_{23}$（见图8.1-8)。一般说来，棱角$\alpha$和面角$\beta$是不同的。棱角和面角都是直角的三棱立体角出现在长方体的顶点。这类立体角在画法几何中会遇到：它们是由三个投影面组成的。

如果从立体角内的一点向各个面画垂线，就形成以此点为顶点以垂线为棱的另一个立体角。这个新角叫做原来角的*极角*，反过来，原来角可以看成是新角的极角(参看 I. 第12章)。

每个立体角都是它的极角的极角。

关于立体角有如下定理:

1. *n棱立体角的所有棱角之和小于360°。*
2. *n棱立体角的所有面角之和大于$n\cdot180° - 360°$而小于$n\cdot180°$。*
3. *极角的一个棱角和原来角的相应面角之和为180°。*
4. *极角的一个面角与原来角的相应棱角之和同样是180°。*

立体

基本概念 按照立体几何的含义，立体是位于空间的一完全闭合区域内的三维空间的所有点、直线和平面的集合，空间的完全闭合区域也就是立体的边界曲面内，并包括边界曲面上的点、直线和平面。边界曲面的所有面的面积之和称为**曲面面积**，被此曲面完全包围的这部分空间的量度称为立体的*体积*。

如果一个立体完全以平面为界，它就叫**平面体**，或叫**多面体**；例如，立方体、长方体、棱柱、棱锥。限制多面体的多边形叫**面**。将两个面连接在一起的线段叫**棱**，棱的端点叫立体的**顶点**。交于一棱的两个半平面之间的夹角是此两面之间的**面角**。从广义上说，当立体的两个曲面以一个角度交成一条曲线时，受曲面完全或部分包围的立体叫**曲面体**，曲面的相交曲线叫**曲面体的棱**。角可以由有关点处的两个切平面的垂线之间夹角来度量；当这两条垂线位于立体(假定是凸立体)所在的半空间内时，这是可行的。

如果将平面看成是曲率为零与其切面重合的曲面，则直立圆柱在底圆的任何一点处的曲面和底面之间的夹角都是90°；对圆锥来说，这个角是仰角。无棱曲面的例子有球面、椭球面和圆环面。

一个立体的**曲面面积**在原则上是由各个边界曲面的面积之和来确

定。对部分面积求和的过程可能是非常烦琐的，但通过导出的某些公式有时可以避开这些过程。

一个立体的体积可借助如下的立方容积和容量表来确定。

立方容积	符　　号	关　　　系
立方千米	km^3	$1km^3=10^9m^3=10^{12}dm^3$
立 方 米	m^3	$1m^3=1m^3=10^3dm^3$
立方分米	dm^3	$1dm^3=10^{-3}m^3=1dm^3$
立方厘米	cm^3	$1cm^3=10^{-6}m^3=10^{-3}dm^3$
立方毫米	mm^3	$1mm^3=10^{-9}m^3=10^{-6}dm^3$

测量单位

立方容积　立方米（记为 m^3）是边长为1米的立方体的体积。较大和较小的立方容积单位都是由立方米导出的。

在航运事业中要用到各种不同的测度容积的单位。测度重量用英吨，1英吨等于2240磅。**排水吨位**（根据阿基米德原理）等于船舶排开水的重量。**轻排水吨位**相应于船体、机器、设备的重量加上全体船员和他们的用品的重量；**全排水吨位**是燃料和货物加足后的最大总重量，两者之差是**载重吨位**。

入港航运税是按**体积吨**计算的，体积吨是用来量度密闭空间容积的，1个体积吨等于100立方英尺，或2.83米^3。最后，用于计算货船货物运费的**运费吨**仅相当于40立方英尺，或1.13米^3。

容积　鉴于在科学测量中容积是由立方容积的单位来确定的，所以在日常生活中容积以**升**为单位。升记为l，其定义是

$$1l=1dm^3。$$

比升大的单位有

$$1hl=100l,$$

比升小的常用单位有

$$1cl=0.01l$$

及

$$1ml=0.001l。$$

在盎格鲁撒克逊人的国家中仍以立方码为立方容量和容积的基本单位（见下表）。

	1 立方码	英尺³	英寸³	加仑(英)	加仑(美)	1 分米³	1 米³
1 立方码	1	27	46656	168.2	140.17	764.553	0.765
1 立方英尺	0.037	1	1728	6.229	5.191	28.32	0.028
1 立方英寸	0.00002	0.00058	1	0.0036	0.004329	0.0164	0.00016
1 加仑(英)	0.05945	0.1605	277.42	1	6/5	4.546	0.00455
1 加仑(美)	0.04954	0.1337	231	5/6	1	3.788	0.00379
$1l=1\,dm^3$	0.00131	0.0353	61.02	0.22	0.183	1	0.001
$1\,m^3$	1.308	35.314	61020	220	183	1000	1

8.2 立方体和长方体

立方体和长方体都是多面体。**立方体**有八个成直角的立体角，十二条等长的棱，有六个相同的正方形侧面。

长方体和立方体一样有八个成直角的立体角，十二条棱，其中相等且平行的有三组，每组四条。它由三对全等且平行的矩形侧面组成。

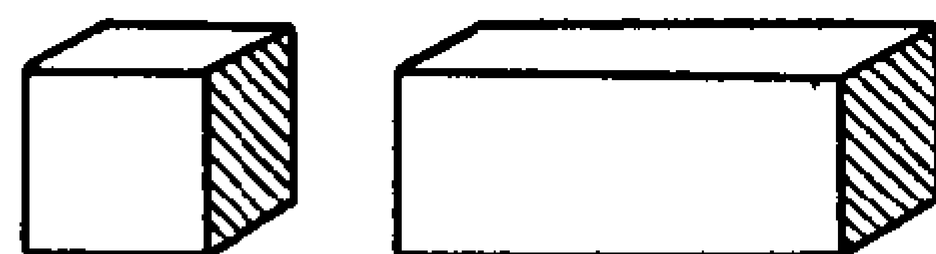


图8.2-1 立方体是长方体的一个特例

立方体是长方体的一个特例(见图 8.2-1)。

表面积

如果将一个多面体模型的表面沿足够多的棱切开，可以将它们放在一个平面里组成界面的一个连通系统。这叫多面体的**网格**。

反过来，多面体的网格可以沿某些边弯起来，并粘在一起构成多面体的模型。

立方体的网格是一个包括六个相等的正方形的连通系统(见图 8.2-2)。对这些正方形的安排有不同的方法，图中列出了其中的两种。

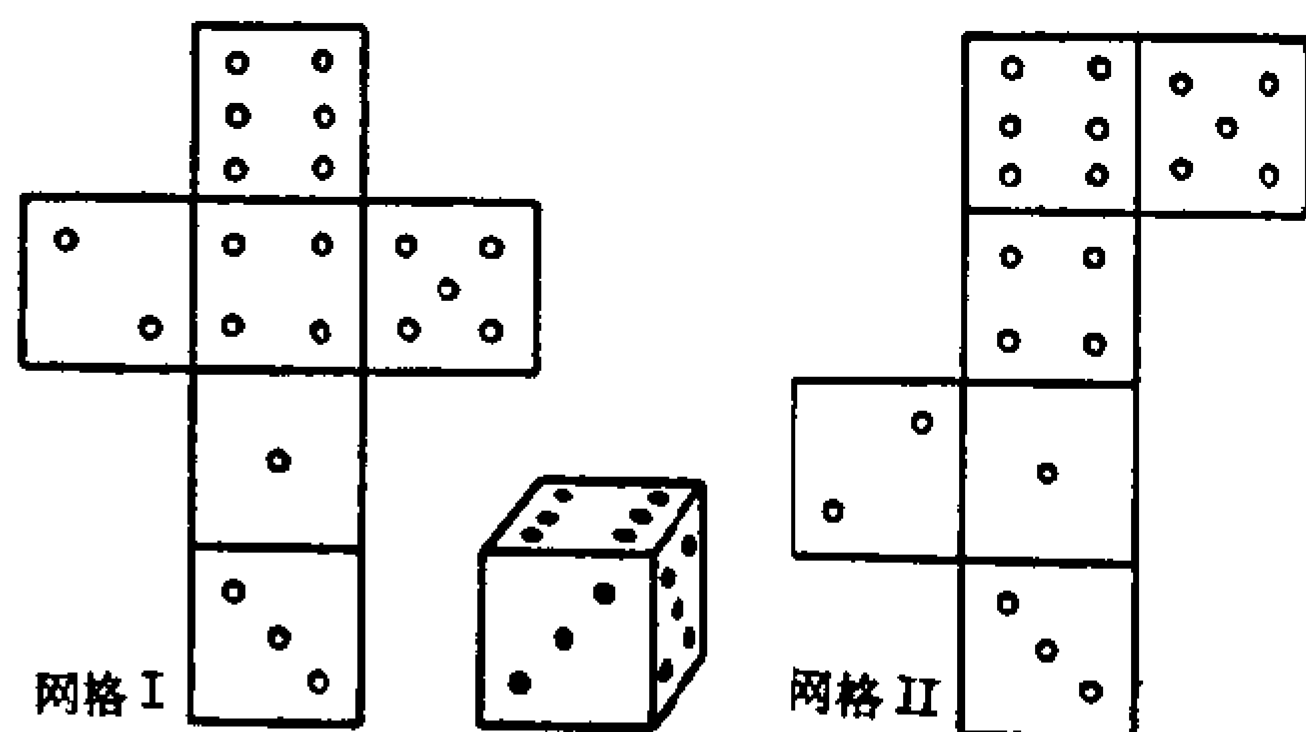


图 8.2-2 一个立方体的两种网格

长方体的网格是一个包括三对全等矩形的连通系统，对它们的安排

也有不同的方法。图中画出了两个长方体，右边的一个有一对正方形面；其余的四个面都是全等的矩形。

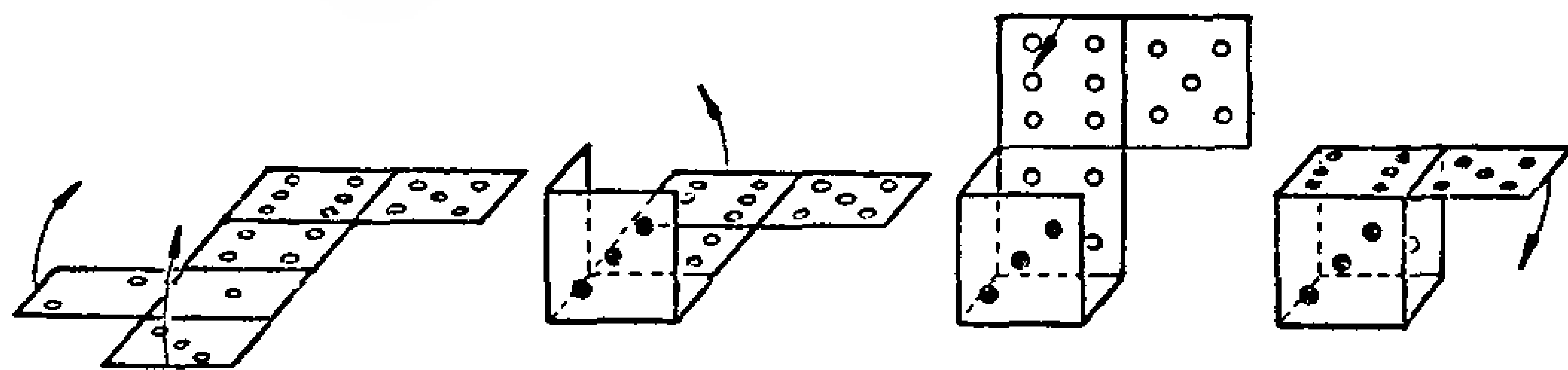


图 8.2-3　由网格构筑立方体的模型

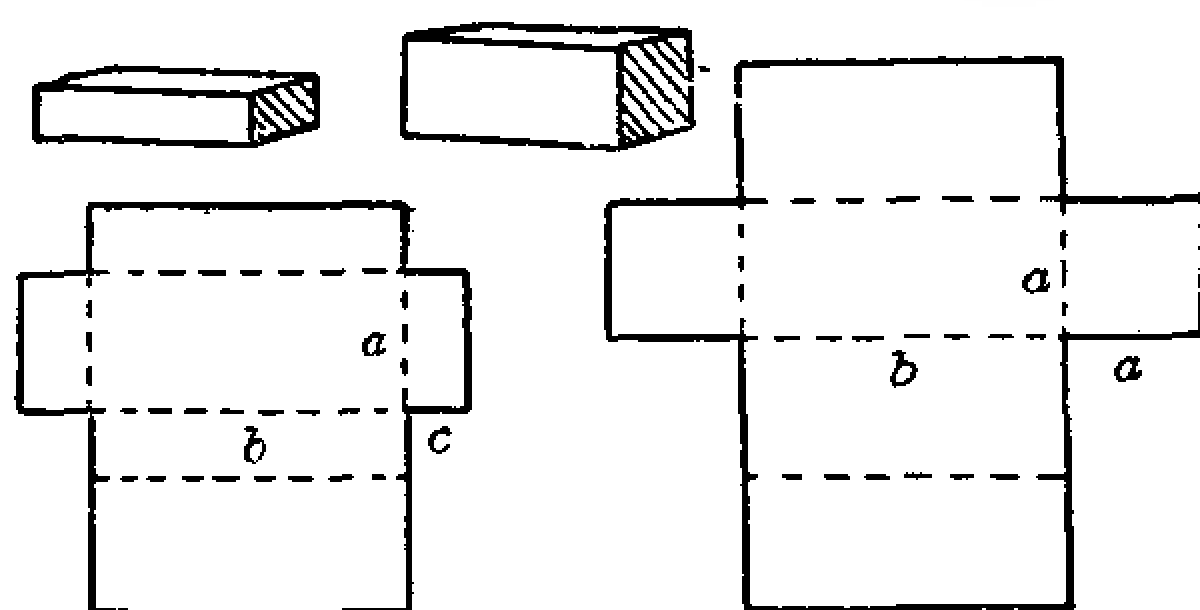


图 8.2 4　长方体的两个网格

如果长方体的三条棱为 a, b, c, 则三个长方形的面积是 ab, ac 和 bc, 因此长方体表面积 S 由下式给出:

$$S=2ab+2ac+2bc=2(ab+ac+bc)。$$

有一对正方形 $(a=c)$ 面的长方体的表面积 $S=2a^2+4ab$。最后，对于立方体，由于 $a=b=c$，其表面积为 $S=6a^2$。

长方体的表面积	$S=2(ab+ac+bc)$
立方体的表面积	$S=6a^2$

体积

在平面几何中测量一个图形的面积，比如说测量一个正方形或者长方形的面积，其定义就是用单位正方形去覆盖这个图形。同样，测量一个体积，比如一个立方体或长方体的体积，也可以定义为用单位立方体来填充这个空间。

一个边长为 a（比如说 10 个单位）的立方体的体积完全可以用此法来填充（见图 8.2-5）。

立方体的体积	$V=a^3$

有 a（$=10$）层，每层有 a（$=10$）行，每行有 a（$=10$）个单位立方体，所以总共有

$$a\cdot a\cdot a=a^3(=10\times10\times10=1000)$$

个单位立方体。

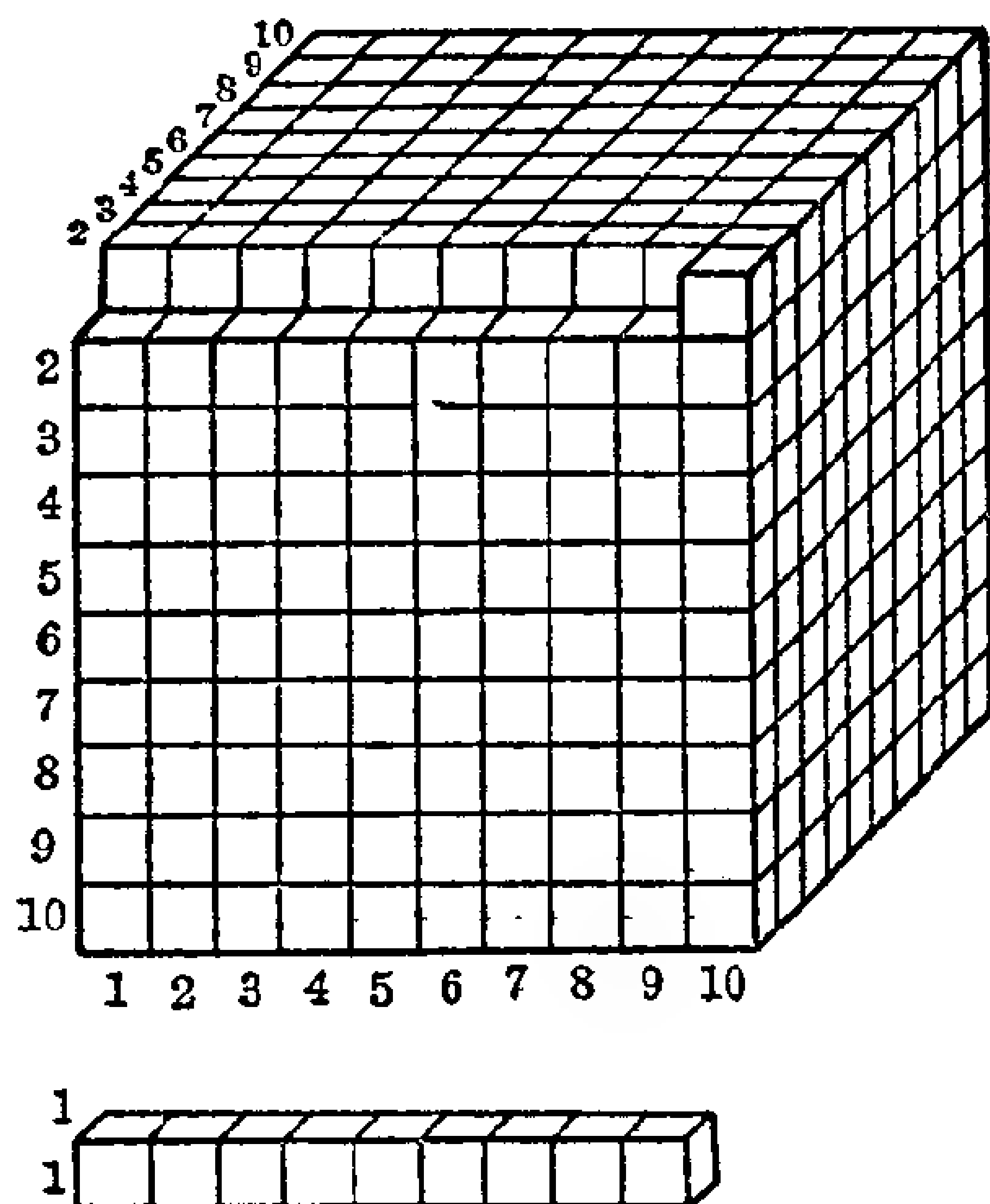


图 8.2-5 边长为一分米的立方体的体积

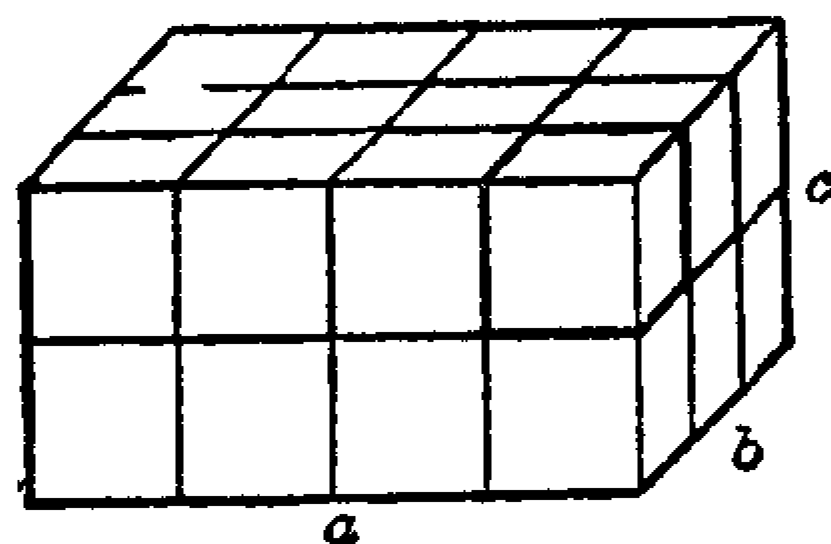


图 8.2-6 长方体的体积

边长为 a, b, c 的长方体的体积可以填入 c 层，每层有 b 行，每行有 a 个单位立方体。因此这个体积为 $a\cdot b\cdot c$ 个单位立方体（见图 8.2-6）。

在具有一对正方形面的长方体的特殊情况下，$V=a^2b$。

长方体的体积	$V=abc$

【例】 平均大小为 $22.0\times11.6\times7.0\,\text{cm}^3$ 的砖头的体积是多大？——这里 $a=22.0\,\text{cm}$, $b=11.6\,\text{cm}$, $c=7.0\,\text{cm}$, 因此

$$V=abc=22.0\,\text{cm}\times11.6\,\text{cm}\times7.0\,\text{cm}=1786.4\,\text{cm}^3。$$

如果有一条或几条棱的棱长不是单位立方体棱长 e 的整数倍，这些公式也适用。如果棱长 a, b, c 是 e 的有理数倍，例如，$a=(p_1/q_1)e$, $b=(p_2/q_2)e$, $c=(p_3/q_3)e$, 这一论证适用于一个较小的单位立方体，这个立方体的棱长 e' 是 e 的 k 分之一，k 是 q_1, q_2, q_3 的最小公倍数。e 的无理倍数可用一有理数列无限接近（见 I. 第 3 章）。一般说来，界面可用数学方法定义的立体体积计算是积分学的课题。

特殊关系

长方体的对角线 根据对角线连接的两个非相邻的顶点是否在立方体的一个面上，将对角线分为面对角线和空间对角线。长方体有12条面对角线，每四条等长；有四条空间对角线，全部等长。

所有对角线的长度都可以用毕达哥拉斯定理计算直角三角形斜边的方法算出(见图8.2-7)。如果a, b, c是三条棱长，则面对角线的长度f_1, f_2, f_3由下式给出

$$f_1=\sqrt{a^2+b^2},\qquad f_2=\sqrt{a^2+c^2},\qquad f_3=\sqrt{b^2+c^2}。$$

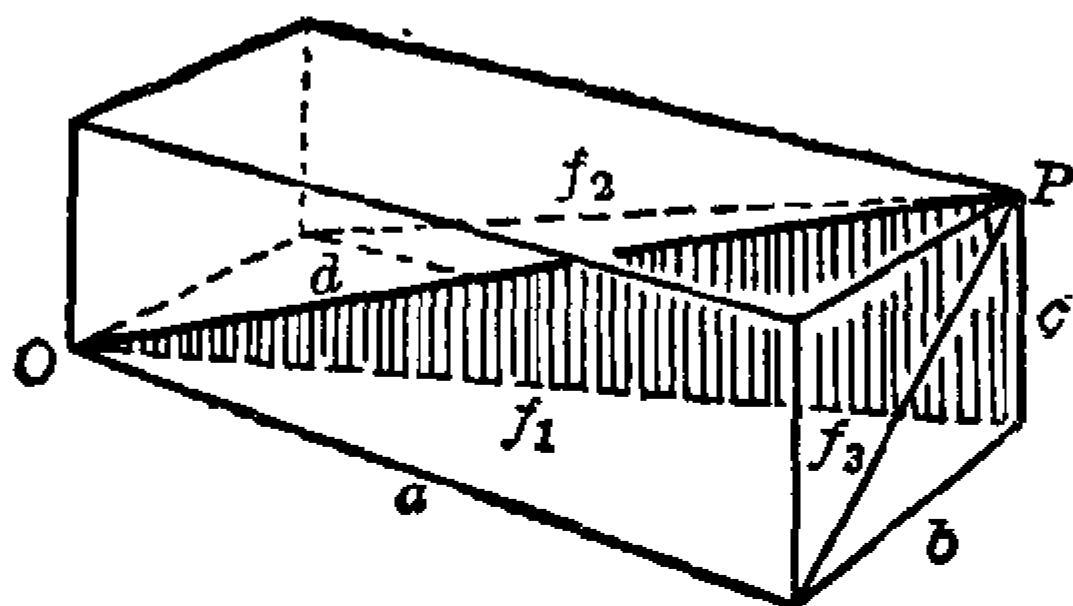


图8.2-7 长方体空间对角线的长

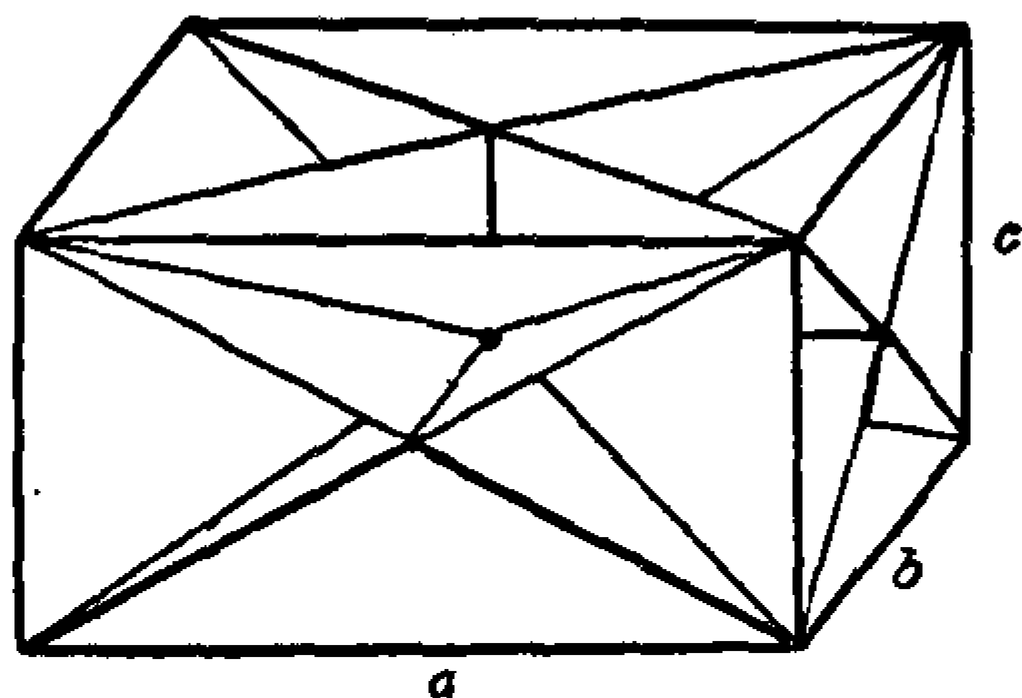


图8.2-8 长方体的三对对角面

空间对角线的长度d可以按直角三角形的斜边来算，三角形的两条直角边是一个面对角线和第三边:

$$d=\sqrt{f_1^2+c^2}=\sqrt{f_2^2+b^2}=\sqrt{f_3^2+a^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}。$$

长方体的四条空间对角线构成六个对角面，这些对角面截长方体成长方形(见图8.2-8)。这些长方形成对全等并以长方体的面对角线和棱为界。它们的面积D_1, D_2, D_3由下式给出:

$$D_1=cf_1=c\sqrt{a^2+b^2};\quad D_2=bf_2=b\sqrt{a^2+c^2};$$

$$D_3=af_3=a\sqrt{b^2+c^2}。$$

长方体	
	面对角线 $f_1=\sqrt{a^2+b^2}$, $f_2=\sqrt{a^2+c^2}$, $f_3=\sqrt{b^2+c^2}$
	空间对角线 $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

立方体的对角线 由于$a=b=c$，面对角线、空间对角线和对角截面的面积分别如下:

$$f_1=f_2=f_3=f=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2};\quad d=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$$

及
$$D_1=D_2=D_3=D=af=a\sqrt{a^2+a^2}=a^2\sqrt{2}。$$

棱长 a，面对角线 f 和空间对角线 d 有如下比例关系：

$$a:f:d=a:a\sqrt{2}:a\sqrt{3}=\sqrt{1}:\sqrt{2}:\sqrt{3}。$$

立方体	面对角线 $f=a\sqrt{2}$
	空间对角线 $d=a\sqrt{3}$

中心 立方体和长方体都具有这样的性质，即所有空间对角线交于一点 C，并为此点平分。C 叫作立体的**中心**，也就是相应类型的匀质立体的重心。C 还是立方体和外接球与内切球的公共中心。外接球的半径是空间对角线长度的一半，即

$$r=\frac{1}{2}a\sqrt{3};$$

内切球的半径等于棱长的一半，即

$$\rho=\frac{a}{2}。$$

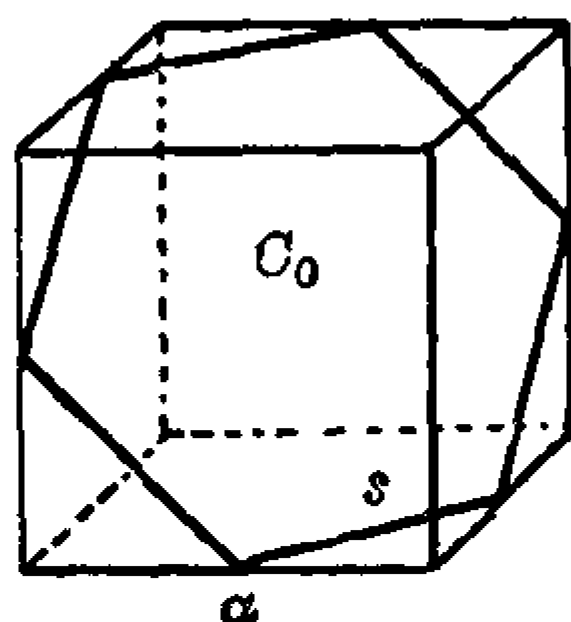


图8.2-9 正六边形可以看成是立方体的一个平面截面

立方体的截面。对立方体可以作一适当的平面截面，使其成正六边形。立方体的中心与此六边形的中心重合，六边形的顶点是立方体六条棱的中点，这些点可以描述成一个回路，但没有三个点是在一个面上的(见图 8.2-9)。

这个正六边形是由六个相同的等边三角形组成，三角形的边长 $s=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$(即为立方体面对角线的一半)，面积 $A=\frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$。

六边形的面积 S 为

$$S=6A=6\times\frac{1}{4}s^2\sqrt{3}=\frac{3}{2}s^2\sqrt{3}=\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}。$$

8.3 棱柱和圆柱

概述

棱柱 如果一直线不改变其方向，在空间沿着一平面 n 边形($n=$

3, 4, …)的周长运动，它将描绘出一个**棱柱曲面**，当它经过n边形的一个顶点时，就得到这个曲面的一个**棱**。

n边形可以看成是一平面与棱柱曲面的所有棱相交时切出的一个截面。如果有第二个面平行于第一个面去切这个棱柱曲面，则得出的第二个截面是与第一个全等的n边形；这两个截面和棱柱曲面构成一个完全闭合的空间。这个立体叫棱柱，这两个n边形是它的**底面**，或一个叫**底面**一个叫**顶面**，属于棱柱体的这部分棱柱曲面叫做它的**曲面**。连接两底的相应顶点的棱柱曲面的棱叫**侧棱**，以与**底棱**相区别，底棱相当于底面的边。一个**n边棱柱**有n个侧棱和$2n$个底棱，因此共有$3n$条棱。所有侧棱均等长，两个相应的底棱平行且长度相等。在侧面上与棱平行的直线叫做棱柱体的**母线**。棱柱体的**高**是底和顶的两个平面之间的距离。

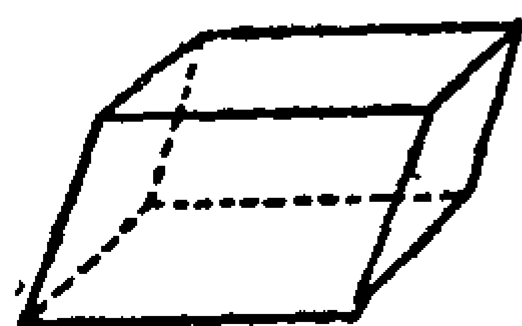


图8.3-1 斜平行六面体

如果有一条侧棱与一底面垂直，则所有侧棱均与两底面垂直。这样的棱柱叫**直**棱柱，其他的就叫**斜**棱柱。

直棱柱的侧面是长方形。如果直棱柱的底是正n边形，就叫**正棱柱**。这种棱柱体的侧面是全等的长方形。正棱柱两底边中心(底边的中垂线相交的点)的连线叫作**轴**(转动轴)，通过轴的棱柱的截面叫**轴向截面**。以平行四边形为底的斜四边棱柱叫作**平行六面体**(见图8.3-1)。

圆柱 如果一直线(称为**母线**)不改变其方向沿着一根曲线(叫**导向曲线**)在空间运动，它便描绘出一个**圆柱面**。**圆柱**是由具有闭合导向曲线的圆柱面和两个彼此平行但不平行于母线的平面构成的立体。在两平行平面之间的圆柱面的母线段也叫圆柱的**母线**，它们长度相等。在两平行平面之间的这部分圆柱面就叫圆柱的**曲面**。两平行平面在圆柱面上截出的**底面**和**顶面**是全等的。底面和顶面的垂直距离是圆柱的**高**。从广义上说，每个圆柱至少有两个边，即底面和顶面的边缘。如果在边上任意一点处，底面或顶面和曲面之间的夹角为90°，这就叫**直立**圆柱，否则是**斜**圆柱。

根据底面的类型有不同类型的圆柱。特别是，如果底面是个圆，就叫**正圆柱**。正直立圆柱也叫**旋转圆柱**。

如果将圆柱看成是实心的，就可以挖出一个小圆柱，并使大小圆柱的底为同心圆，则剩余部分叫**空心圆柱**。空心圆柱在技术上常有应用，如

贮气罐、锅炉、储油箱、柏油桶等。管子是长空心圆柱，它们的用途有运输气体(天然气或蒸气)或液体(水或石油)等。

表面积

棱柱 正如长方体和立方体一样，从棱柱的曲面模型可以得出它的网格(或反过来，由网格建立起模型)。图 8.3-2 为正六棱柱的网格。

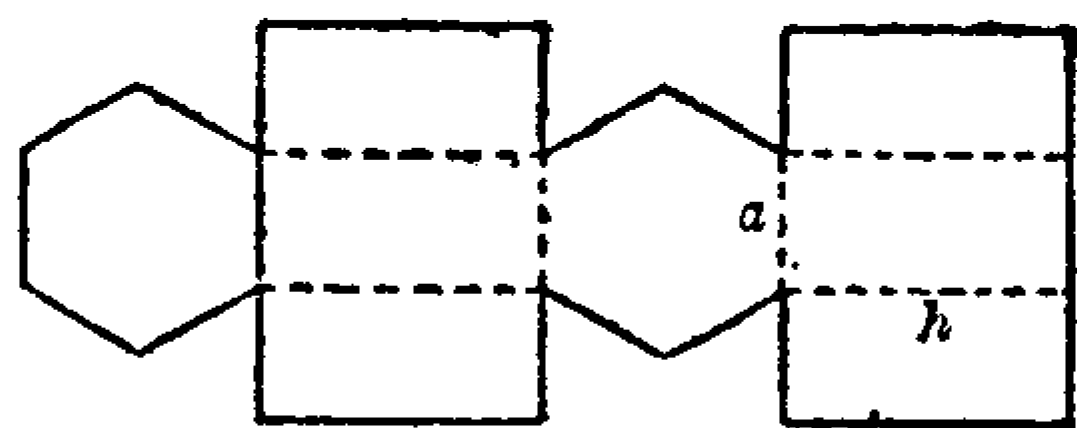


图 8.3-2 正六棱柱的网格

圆柱 可将圆柱的曲面模型沿母线和两个底面剪开。以直立正圆柱为例，其曲面可以展成平面，如图 8.3-3 所示可按三步进行。它的网格包括一个长方形和两个圆底面，长方形的高 h 是母线 s，而底的周长 $2\pi r$ 是它的边(见图8.3-4)。由两个平行平面截成的斜圆柱的展开曲面是以两条平行直线和两条同位相同振幅的正弦曲线围成的曲面(见图 8.3-5)。在原则上，每个圆柱曲面都可展开。实际上，直立正圆柱的均匀展开看作对圆周的矫正。柯琴斯基

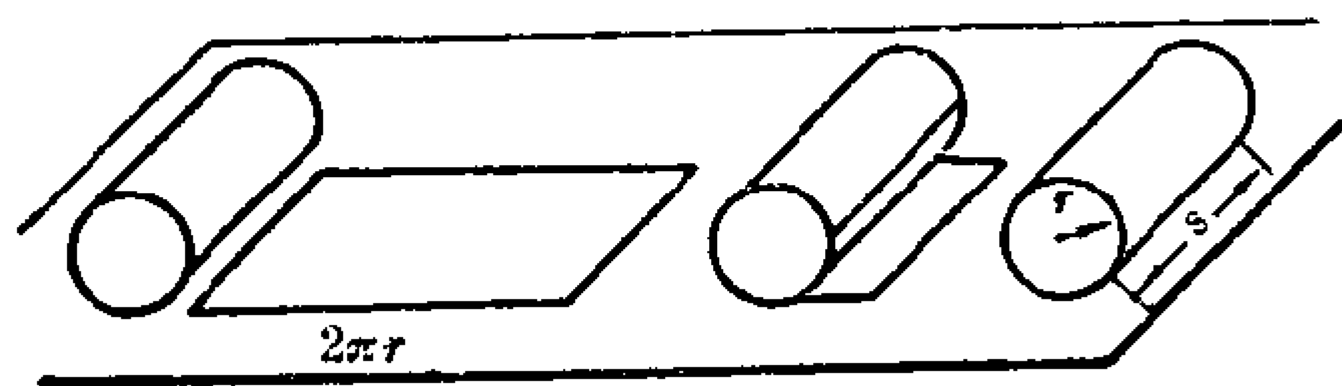


图 8.3-3 直立正圆柱的曲面

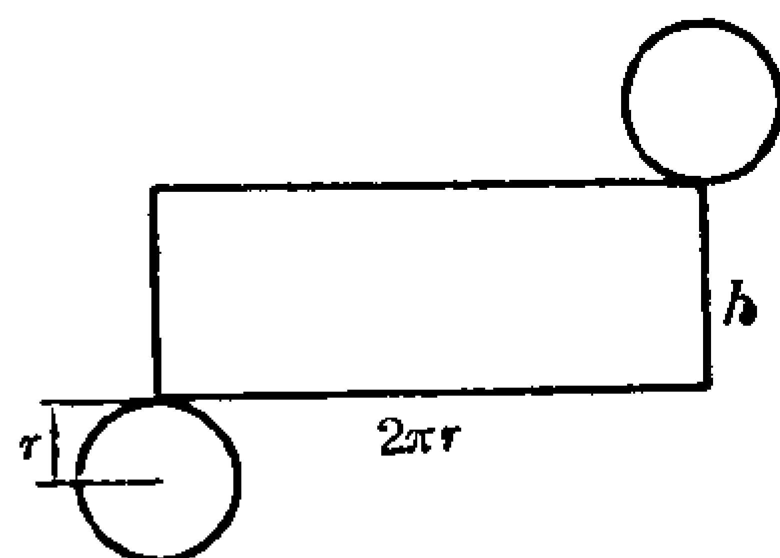


图 8.3-4 直立正圆柱的网格

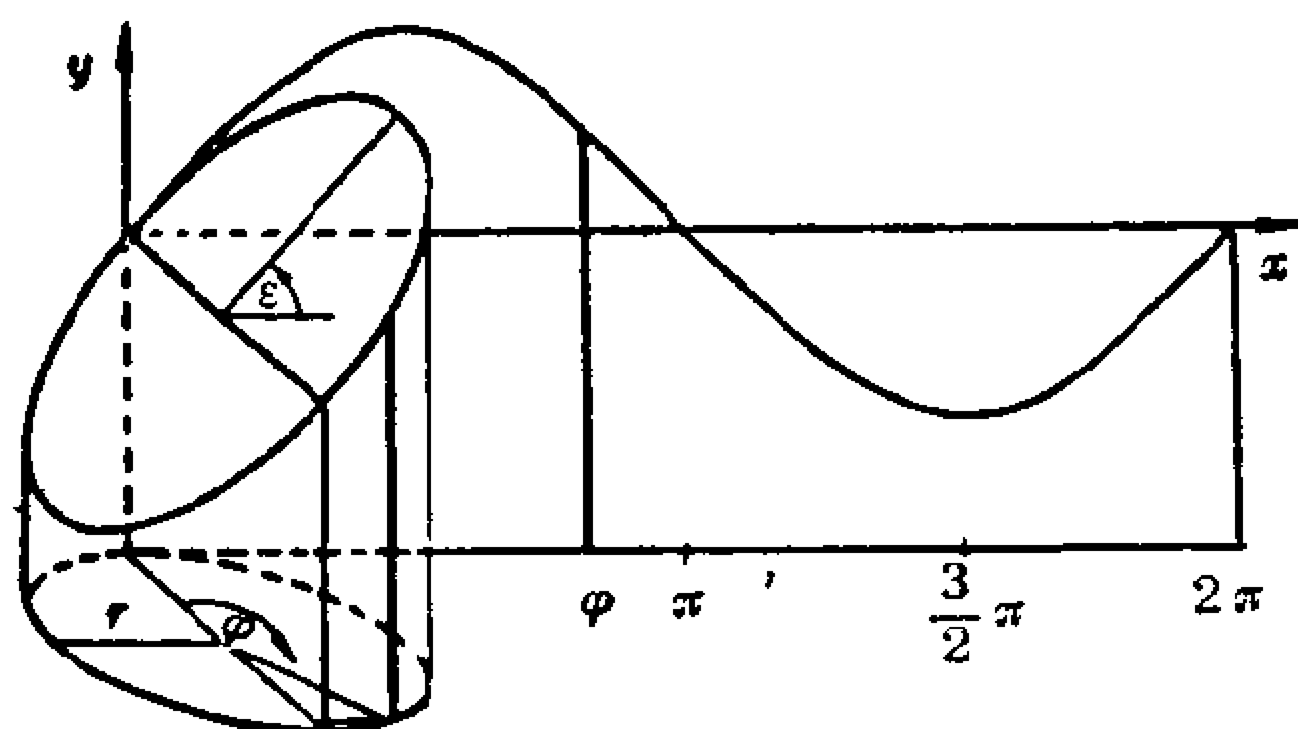


图 8.3-5 直立正圆柱的斜截面

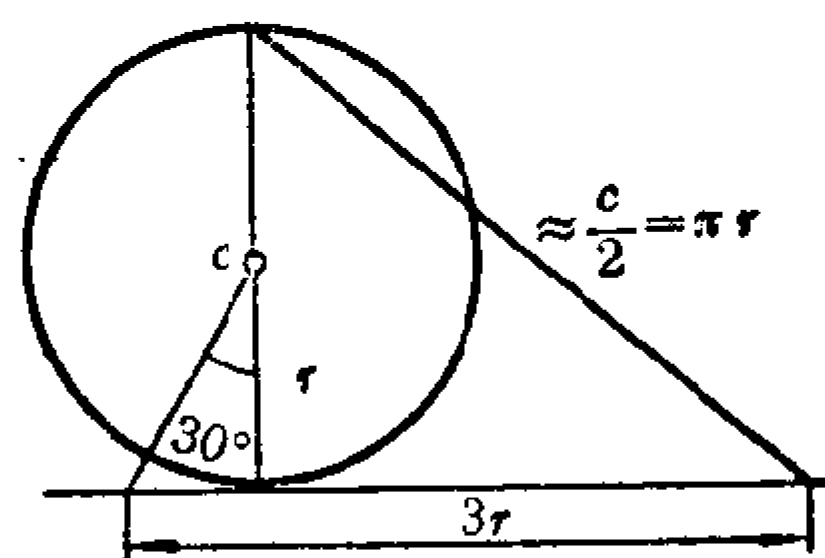


图 8.3-6 计算圆周长的柯琴斯基近似方法

(A. Kochansky, 1685年) 的方法给出的近似值精确到0.002%，这个方法很容易用直尺和圆规作出；由此得到 $\pi \approx \sqrt{13\frac{1}{3}-2\sqrt{3}}$(见图8.3-6)。

棱柱和圆柱的表面积	$S=2B+C$

棱柱或圆柱的表面积可由侧面或曲面的面积 C 加上两底面的面积(每个底面面积为 B)求得。根据需要可将公式具体化。

【例1】 已知一正六棱柱的底边 $a=3u$，高 $h=4u$，u 为单位长度，试求此棱柱的表面积。

解：　∵　$B=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$，$c=6ah$，

所以　$$S=2\times\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}+6ah=3a^2\sqrt{3}+6ah$$
$$=3a(a\sqrt{3}+2h)。$$

将已知数值代入，即得 $S\approx119u^2$ (平方单位，比如平方英寸)。

【例2】 计算一钢螺栓的面积，已知钢螺栓的圆形截面的直径 $d=50u$，高 $h=60u$，我们得到 $B=\pi d^2/4$ 和 $C=\pi dh$，因此 $S=2\pi d^2/4+\pi dh=\pi d(d/2+h)$，代入数值即得 $S=4250\pi u^2\approx13352u^2$。

卡瓦列利原理

计算棱柱和圆柱的体积时，要用到伽利略的学生卡瓦列利(Cavalieri)在1629年发表的原理。

卡瓦列利原理：高度相同，横截面相等的立体具有相等的体积；特别是，等底和等高的棱柱或圆柱的体积相等。

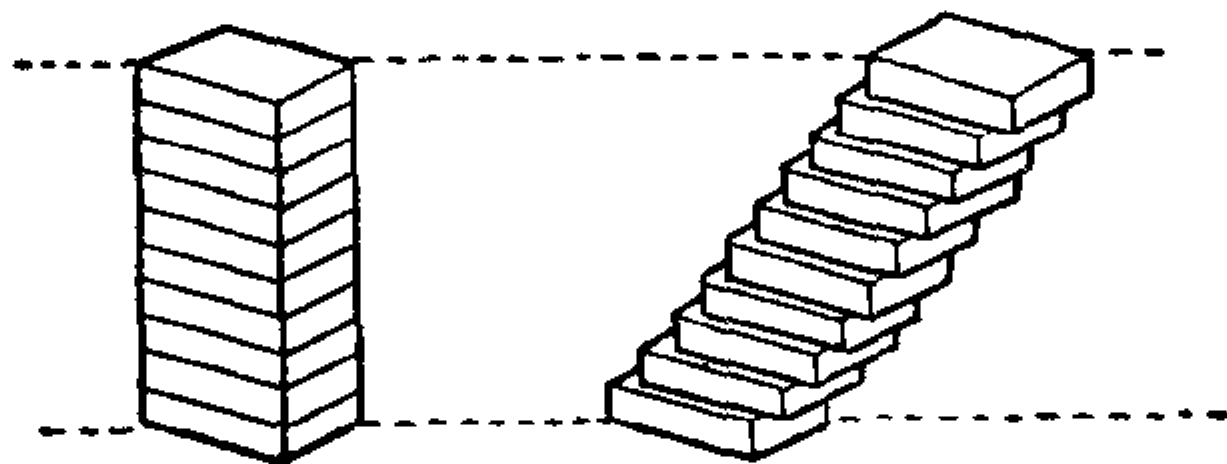


图8.3-7　卡瓦列利原理示意图

这个原理似可以用一个简单的方法来证明，即用几块棱柱形薄板堆成一个立方体，然后将各薄板错开，使其得到另一不同的形状，显然两者体积不变(见图8.3-7)。薄板的底面就是横截面，因此也是同一高度的面积。薄板的高度越小，阶梯的曲面越接近用连续函数描述的形式；例如，非常薄的同样大小的圆纸片迭起来可以非常接近一个斜圆柱 (见图8.3-8)。根据极限理论，此定理可用

8.4　棱锥和圆锥

概述

棱锥　如果一射线从空间的一固定点 Z 发出沿着一平面 n 边形的周边运动($n=3, 4, \cdots$)，此平面不经过 Z 点，则此射线描绘出一个棱锥面，经过 n 边形顶点的射线是棱锥面的**棱**。这个 n 边形和它与点 Z 之间的这部分棱锥面构成一个完全闭合的空间，这个几何体就叫棱锥(见图 8.4-1)。

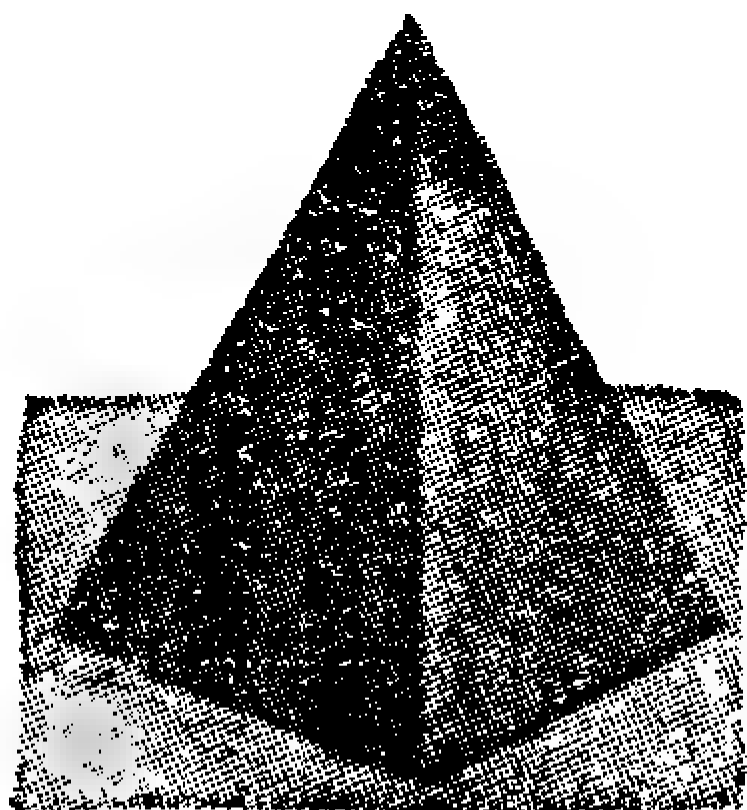


图 8.4-1　棱锥

这个 n 边形叫**底面**，点 Z 叫**顶点**，属于此立体的这部分棱锥面叫棱锥的面。介于底面的各顶点和棱锥顶点 Z 之间的这段棱锥面上的棱叫棱锥的**侧棱**，以和**底棱**相区别，底棱相当于底面的边。n **边的棱锥体**有 n 条侧棱和 n 条底棱，因此共有 $2n$ 条棱，还有 n 个**侧面**三角形。在侧面上连接底棱上任意一点和顶点的线段叫棱锥的**母线**。

棱锥的高是指顶点到底平面的垂直距离，这条垂线与底平面交于顶垂线的末端 Z'。这个点以及顶垂线可以落在棱锥底的外面(图 8.4-2)。

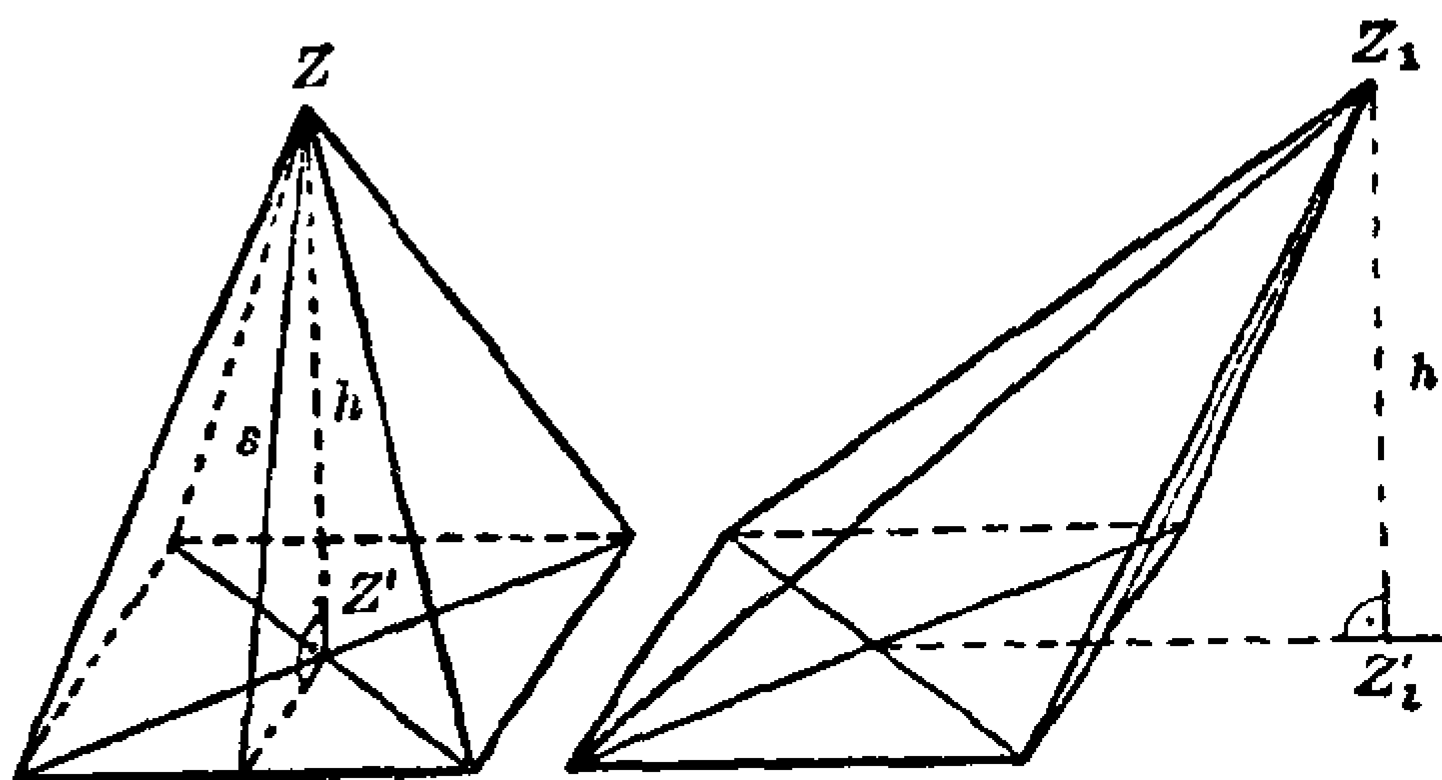


图 8.4-2　直立和斜方棱锥

正棱锥的底面是个**正 n 边形**，如果顶垂线的末端与底的中心重合，这就叫**直立**棱锥，否则就是**斜**棱锥。直立正棱锥的侧面是全等等腰三角形。直立棱锥的高就是它的**轴**，通过轴的任何截面都叫**轴向截面**。(正)**四面体**是个底和侧面都是等边三角形的棱锥。

著名的古代埃及国王的坟墓是直立正方棱锥，最著名的是开罗南郊

吉萨附近的金字塔。最大的金字塔底边约长 227 米，高约为 137 米。

圆锥 通过空间一个固定点 Z 的直线(**母线**)沿一曲线(**导向曲线**)运动，便描绘出一个**圆锥面**(见图 8.4-3)。**圆锥**是由具有闭合导向曲线的圆锥面与一不通过 Z 点的平面组成的立体。圆锥面截平面成圆锥的**底面**，Z 点称为圆锥的**顶点**，顶点到底面的距离叫**高**。**圆锥的曲面**是指顶点 Z 和底面之间的这部分圆锥面，在圆锥面上属于该圆锥的这部分母线叫圆锥的**母线**。如果一带有闭合导向曲线的圆锥面被位于 Z 点两边的两个平行平面所截，我们就称之为**对顶锥**。这两个底相似，而高的和就是这两个平行平面之间的距离。圆锥按照底面的类型分为**正圆锥**、**椭圆锥**和其他类型的圆锥。如果底中心为 Z'，而且线段 ZZ' 垂直于底，这就叫**直立**圆锥，否则是**斜**圆锥。通过 ZZ' 的所有平面截面都全等的直立圆锥可以看成是个旋转立体；例如，直立正圆锥可由一直角三角形绕一个直角边旋转得到(见图 8.4-4)。

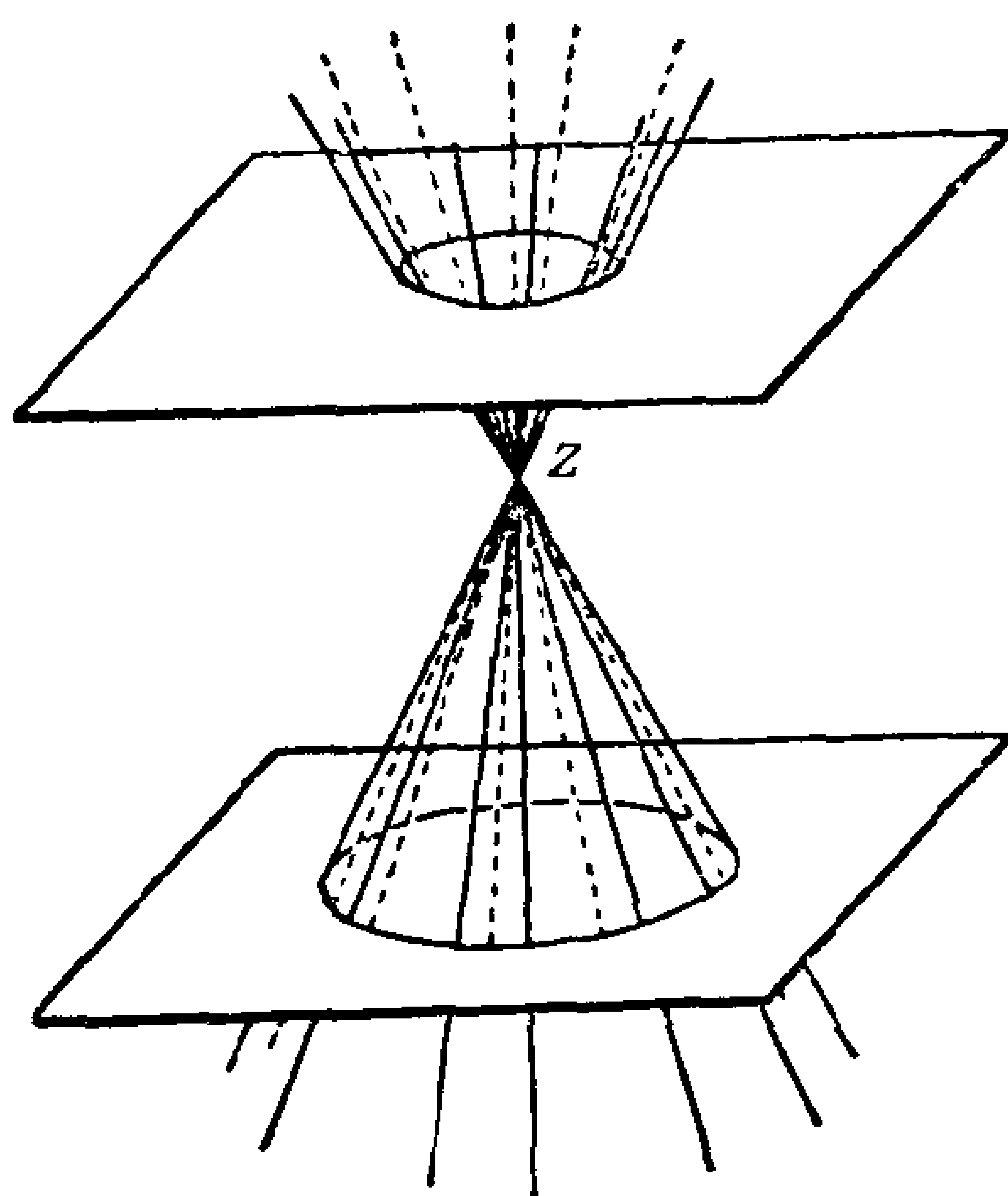
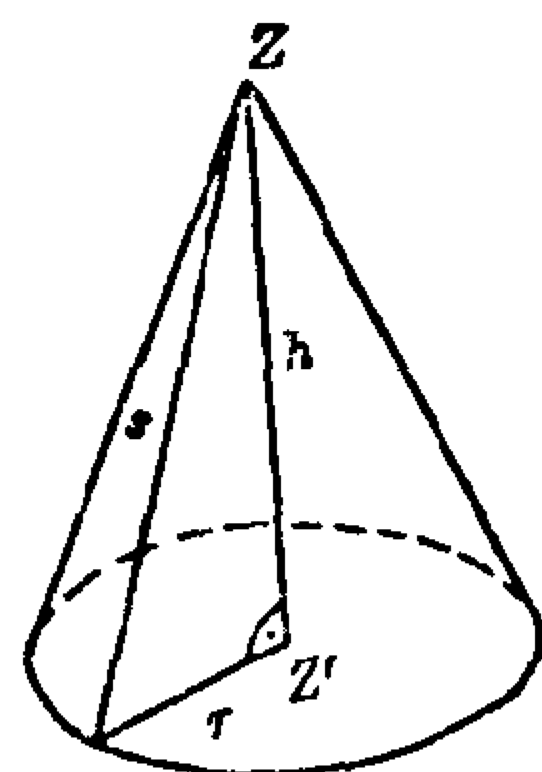


图 8.4-3 圆锥面和对顶锥



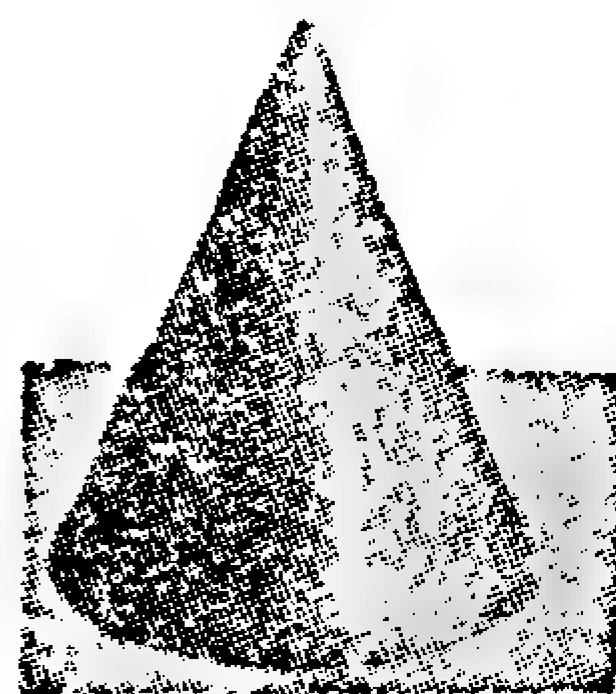


图 8.4-4 直立正圆锥

技术上的圆锥状例子有塔顶、容器的某些部分(如水泥桶的下部)、机器部件、机动车辆中的圆锥状阀和圆锥状连接器。圆锥状在自然界中也

是常有的：许多火山爆发形成的山，以及缓慢流动的沙土堆积成的土堆都呈圆锥状。

表面积

若将棱锥曲面的模型沿一侧棱和所有底棱（留一条不剪）剪开，或沿所有侧棱剪开，再将侧面在底平面上铺开，这样就可以得到棱锥体的网格。图 8.4-5 是正方棱锥的网格。

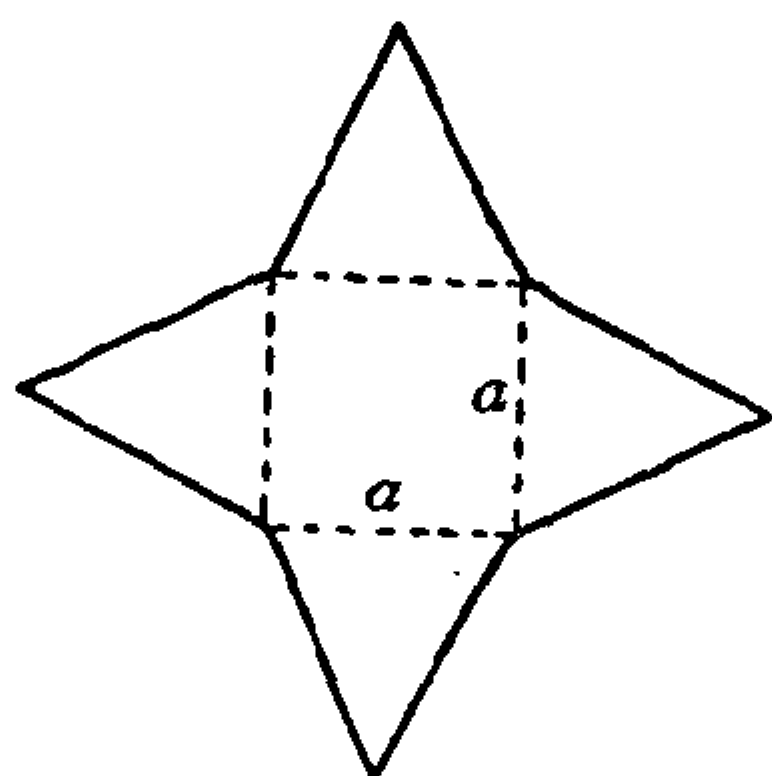


图 8.4-5　正方棱锥的网格

圆锥的曲面模型要沿一条母线和底棱剪开。例如，直立正圆锥和直立正圆柱一样，可以在平面上展开。它包含一个扇形（见图 8.4-6）。直立正圆锥的网格是由一个扇形和圆锥的圆底组成，扇形的半径 ρ 就是母线长 s，扇形的弧 b 就是底的圆周长 $2\pi r$。设 C 为曲面的面积，则

$$C:\pi\rho^2=b:2\pi\rho,$$

$$C=(b\rho^2)/(2\rho)=(2\pi r\cdot s)/2=\pi rs。$$

如果 h 是圆锥的高，则 $s=\sqrt{(r^2+h^2)}$。

圆锥的锥面面积	$C=\pi rs$

如果用 S 表示棱锥或圆锥的表面面积，B 表示底面面积，C 表示棱锥的侧面或圆锥的锥面面积，则 $S=B+C$。

按照立体的类型，这些公式可以具体化。例如，边长为 a 的正四面体的表面面积，因为 $C=3B$，$B=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$，所以 $S=4B=\frac{1}{4}\cdot 4a^2\sqrt{3}=a^2\sqrt{3}$。

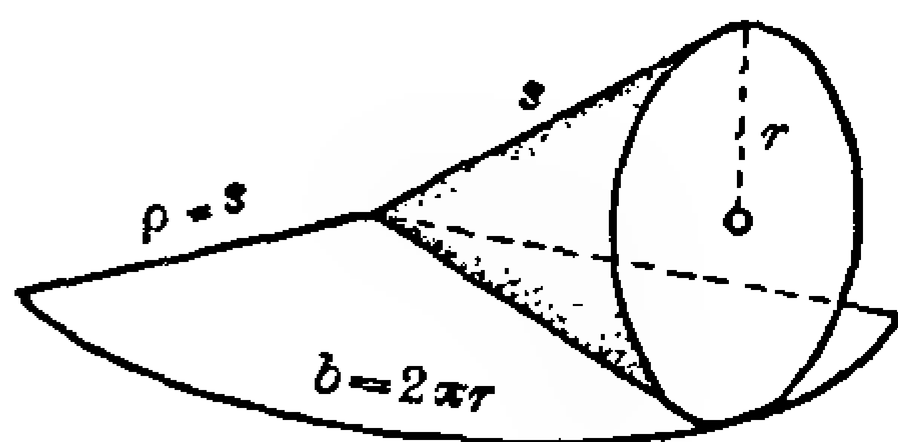


图 8.4-6　展开直立正圆锥的曲面

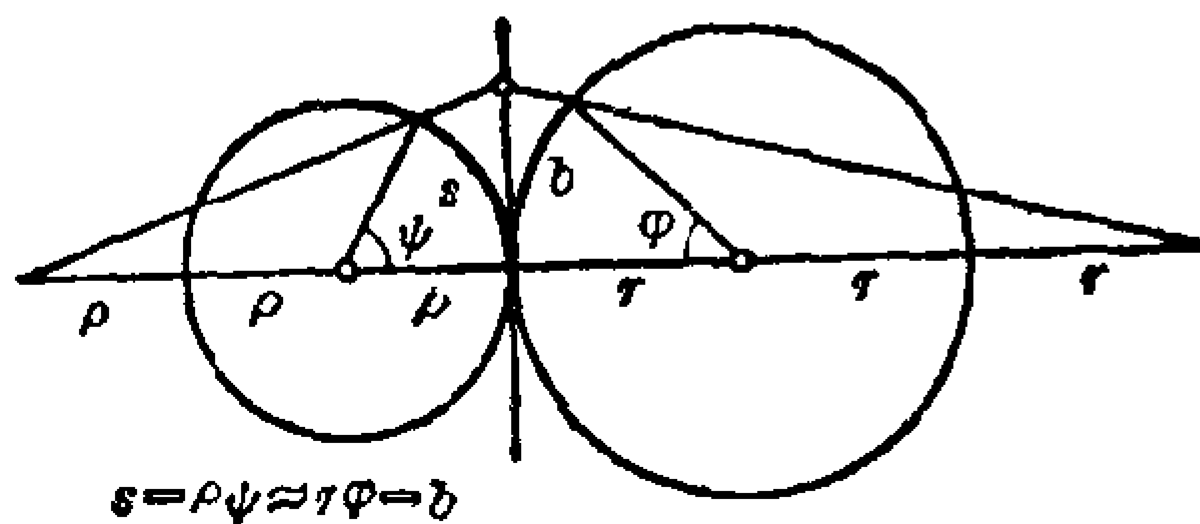


图 8.4-7　对应圆弧的库沙努斯作图法

关于将半径为 r，在中心的张角为 φ 的圆弧 s 对应到半径为 ρ 的圆上的问题，如果两个弧的张角 φ 和 ψ 小于45°，尼古劳斯·库沙努斯(Nicolaus Cusanus, 1401～1464年)作图法给出了很好的近似解法(见图8.4-7)。

体积

为了对棱锥应用卡瓦列利原理，对棱锥取一平行于底面的平面截面，此截面与底面相似。它到顶点的距离 h' 小于棱锥的高 h。这个截面和底面上的所有对应的平行线段都与高成比例：$S':S=h':h$，而面积 A' 和 A 的比为 $A':A=h'^2:h^2$。

棱锥底面的面积和平行于底面的任一截面的面积与这两个面到顶点的相应距离(高)的平方成比例。

根据卡瓦列利原理，这意味着：

等底等高的棱锥具有相等的体积。

由于底面可以变换成等面积的三角形，或分割成几个三角形，因此只要会算三棱锥的体积就够了。

三棱锥的体积是同底同高的棱柱体积的三分之一。

如图 8.4-8 所示，三棱柱可以用两个平面截面分成体积相等的三个棱锥 V_1, V_2, V_3。V_1 和 V_2 分别以棱柱的底和顶为其底，$\triangle DEF=\triangle ABC$，以棱柱的高为高，$|BE|=|CF|$。又由于 $\triangle ACF=\triangle AFD$，所以 V_2 和 V_3 具有相等的底面，而且侧面 $ACFD$ 到 B 点的距离都是它们的高。因此，如果以 B 表示棱锥的底面，h 表示它的高，则其体积为

$$V=Bh/3。$$

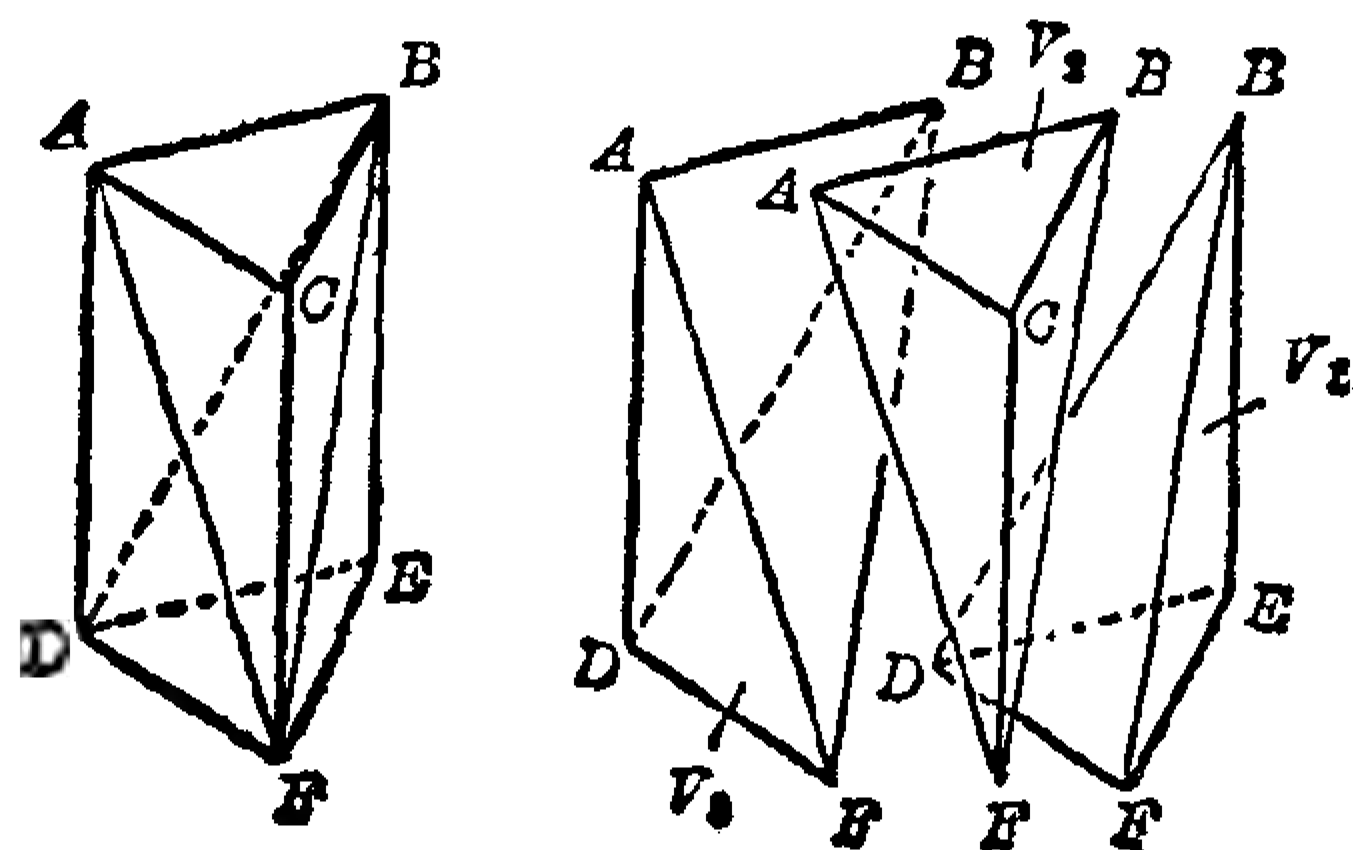


图 8.4-8 将一个三棱柱分割成三个三棱锥

棱锥的体积	$V=Bh/3$

卡瓦列利原理只要求平行截面的面积相等，不要求这些截面的形状相同。圆锥可以看成是底为 $B=\pi r^2$ 的特殊的棱锥，因此：

等底等高的圆锥有相等的体积。

圆锥的体积是等底等高的圆柱体积的三分之一。

圆锥体的体积	$V=\pi r^2h/3=\pi d^2h/12$

平截头棱锥体（棱台）和平截头圆锥体（圆台）

平截头棱锥体是以两个平面为界的立体，此立体的底面和顶面互相平行，其侧棱相交于立体以外的一点（见图 8.4-9）。平截头棱锥体通常可以成为一个棱锥，只要在它的顶面上加上另一个小棱锥。

平截头棱锥体的面积	$S=B_1+B_2+C$

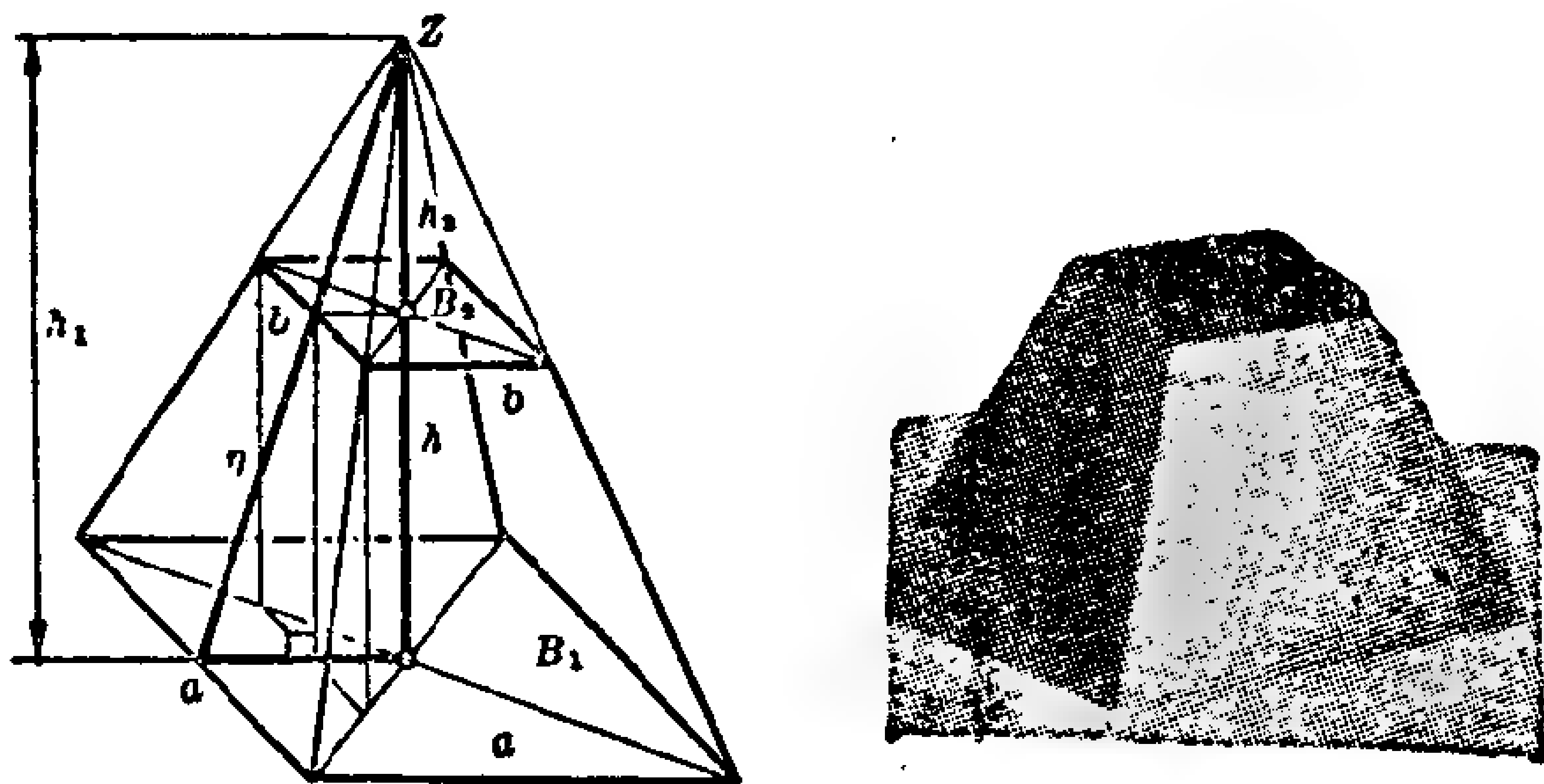
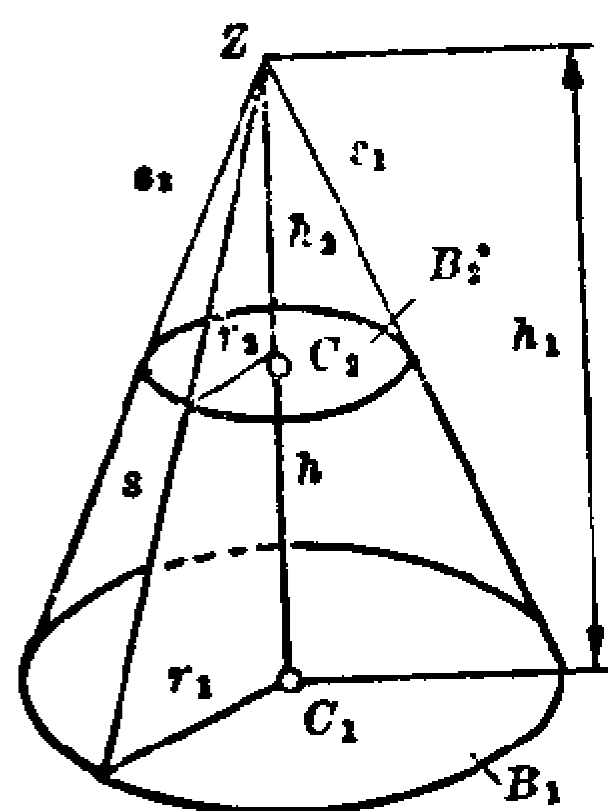


图 8.4-9　平截头棱锥体

如果以 B_1 表示完全棱锥的底，h_1 表示它的高，B_2 和 h_2 表示加上去的棱锥的底和高，则 $h=h_1-h_2$ 是平截头棱锥体的高，B_1 和 B_2 是它的底面和顶面的面积。根据加上去的棱锥是斜的、直立的或正的，平截头棱锥体就叫**斜的、直立的或正的**。它的表面积 S 是由底 B_1 和 B_2 及侧面 C 组成，如果 B_1 是 n 边形，侧面就包括 n 个梯形。平截头棱锥体有 $2n$ 个底棱和 n 个侧棱。底棱为 a 和 b 的直立方平截头棱锥体的侧面是等腰梯

形，其高为 $\eta=\sqrt{h^2+(a-b)^2/4}$，因此，其表面积为

$$S=4[(a+b)/2]\eta+a^2+b^2=a^2+b^2+2\eta(a+b)。$$



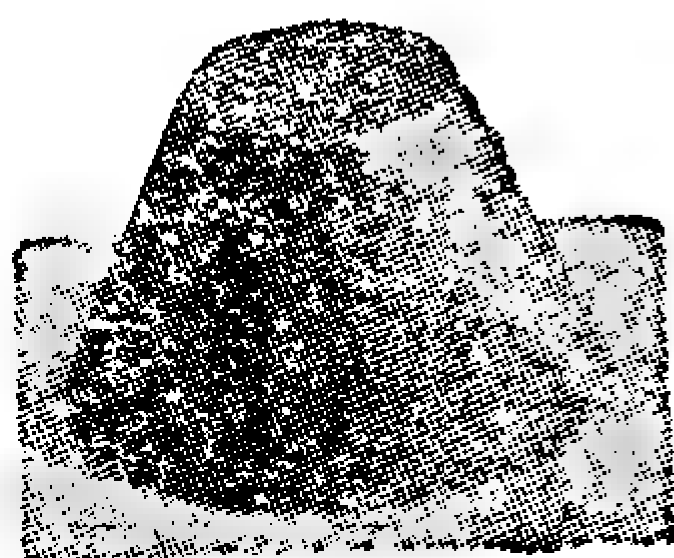


图 8.4-10 平截头圆截体

同样，平截头圆锥体可以由圆锥体被一平行于底面的平面截得(见图 8.4-9)，其侧面 C 可以展开。如 r_1, h_1 和 s_1 分别表示一直立正圆锥的底圆半径、高和母线的长度，r_2, h_2 和 s_2 表示被截下的圆锥的相应部分长度，则对剩下的平截头圆锥体来说高是 $h=h_1-h_2$，母线长是 $s=s_1-s_2$。在轴向切面上，有 $r_1:r_2=s_1:s_2$，并有 $(r_1-r_2):r_1=s:s_1$ 和 $(r_1-r_2):r_2=s:s_2$。因此，有 $s_1=sr_1/(r_1-r_2)$ 和 $s_2=sr_2/(r_1-r_2)$，因此 $C=\pi s_1r_1-\pi s_2r_2=\pi s(r_1+r_2)$ 及 $S=\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi s(r_1+r_2)$，$S$ 为直立平截头圆锥体的表面积。

平截头直立正圆锥体的侧面积 C 和表面积 S	$C=\pi s(r_1+r_2)$ $S=\pi[(r_1^2+r_2^2)+s(r_1+r_2)]$ $=\frac{1}{4}\pi[d_1^2+d_2^2+2s(d_1+d_2)]$

日常用的许多物品呈平截头棱锥形，例如洗衣篮、焙锅和手推小车；平截头圆锥形的例子有灯罩、花瓶和酒杯。

体积 如果用 B_1 和 h_1 表示完全棱锥的底和高，B_2 和 h_2 表示加上去的棱锥的底和高，则平截头棱锥体的体积为 $V=\frac{1}{3}(B_1h_1-B_2h_2)$。由于平行截面的面积与它们到顶点的距离的平方成正比，即

$$h_1:h_2=\sqrt{B_1}:\sqrt{B_2}, \qquad \text{所以 } h_1=h\sqrt{B_1}/(\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2})$$

及

$$h_2=h\sqrt{B_2}/(\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2})。$$

因此平截头棱锥体的体积是

$$V=\frac{h}{3}\cdot\frac{B_1\sqrt{B_1}-B_2\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}$$

$$=\frac{h}{3}\cdot\frac{B_1^2-B_2\sqrt{B_1B_2}-B_1\sqrt{B_1B_2}-B_2^2}{B_1-B_2}$$

$$=\frac{h}{3}(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2)。$$

相应的关系对平截头圆锥体也成立，这时 $B_1=\pi r_1^2$ 和 $B_2=\pi r_2^2$。

	体　　积	近 似 公 式
平截头棱锥体	$V=\frac{h}{3}(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2)$	$V\approx\frac{B_1+B_2}{2}h$
平截头圆锥体	$V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$	$V\approx\frac{\pi h}{2}(r_1^2+r_2^2)$ 或 $V\approx\frac{\pi h}{4}(r_1+r_2)^2$

实际上，从近似公式常常能得出相当精确的结果。当平截头棱锥体的形状越接近棱柱 ($B_1\approx B_2$)，或平截头圆锥体越接近圆柱 ($r_1\approx r_2$) 时，这些结果越精确。头两个近似公式给出的结果总是偏大，另一个给出的结果则偏小。

8.5　多面体

欧拉多面体定理

如果一个立体仅由几个平面组成，这就叫*平面立体*或*多面体*；立方体、长方体、棱柱、棱锥和平截头棱锥体都是多面体。

如果连接多面体上任意两点的线段仅包含多面体内的点，这就叫*凸多面体*或叫*欧拉多面体*。阿基米德可能早已知道了欧拉多面体定理，而笛卡尔则肯定知道。

欧拉多面体定理：如果一个凸多面体有 v 个顶点、f 个面和 e 条棱，则 $v+f-e=2$。

为了确定欧拉定理中的数 $E=v+f-e$, 我们设想一个用橡皮膜包起来的多面体模型，橡皮膜有一个面被剪掉。剩下的面的数目 φ 是 $f-1$, 所以 $E=v+\varphi+1-e$。如果将此剩下的曲面在一个平面上摊开，则棱长和角度都发生了变化，但 v, φ 和 e 不变。在这样得到的*许莱格尔多面体图*中(见图 8.5-1)，每一个 φ 面都可以用对角线分成三角形。每条对角线使 e 和 φ 都增加 1, 也就是说，E 保持不变。如果从边界上将只属于一个三角形的一条边去掉，则 e 和 φ 都减少 1, E 仍然不变。如果一条边和一个顶点不再属于某一个面，把它们去掉，这样 v 和 e 都减少 1, 而 E 保持不变。反复利用这些步骤，最后仅剩下一个三角形，这时 $v=3$, $e=3$ 和 $\varphi=1$, 所以

$$E=v+\varphi+1-e=2。$$

因此 $v+f-e=2$ 是普遍成立的。

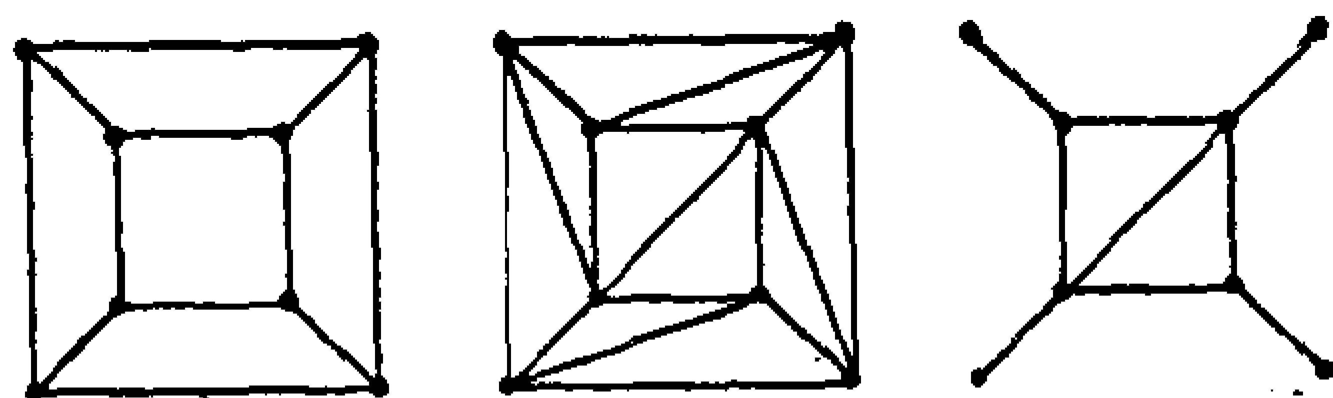


图 8.5-1 证明欧拉多面体定理的立方体平面网格

正多面体

五种正多面体 如果一个凸多面体由几个全等的多边形构成，而且有相同数目的棱在每个顶点相交，这就叫*正凸多面体*。有五种属于这种类型的立体(见图 8.5-2)，也叫*柏拉图立体*，这是为了纪念柏拉图的。

在一个顶点的棱角之和小于 360°，根据这个定理，只可能有五种正多面体。1. 如果多面体是由*等边三角形*构成，由于每个棱角是 60°，因此只可能有三个、四个或五个面相交于一个顶点；如果有六个面，棱角之和应为 6·60°=360°。2. 如果多面体是由*正方形*(每个棱角是 90°)或 3. 由*正五边形*(每个棱角是 108°)构成，则只能有三个面相交于一个顶点。

正六边形(每个棱角是 120°)不可能组成多面体，因 3·120° 不小于 360°。

通过这些论证说明正多面体只可能有五种类型，现将顶点数 v、面数 f 和棱数 e 列表如下，表中 n 表示在同一顶点处的面数：

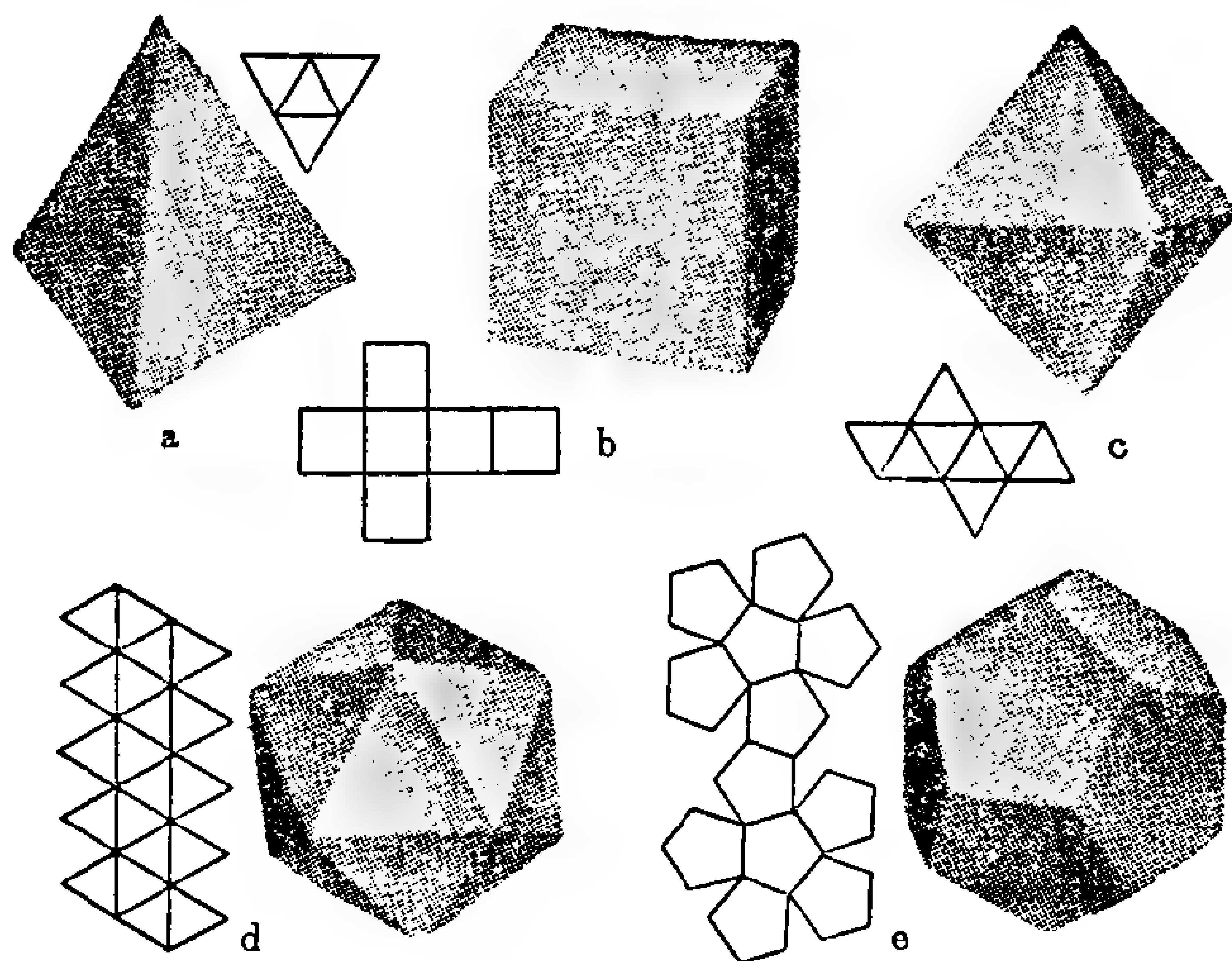


图8.5-2 五种正多面体和它们的网格：*a*）四面体；*b*）六面体（立方体）；*c*）八面体；*d*）二十面体；*e*）十二面体

边界面	n	v	f	e	正多面体
全等三角形	3	4	4	6	四面体
全等三角形	4	6	8	12	八面体
全等三角形	5	12	20	30	二十面体
正方形	3	8	6	12	六面体或立方体
正五边形	3	20	12	30	十二面体

内切球和外接球是这类立体的一个重要特征，因为正多面体的中心也是这些球体的公共中心。外接球的曲面经过多面体的各个顶点，内切球的曲面与多面体各面的中心相接触。因此穿过各面中心的垂线相交于多面体的中心。

如果用 n 表示一个面的边数，m 表示交于同一顶点的棱数，v 表示多面体的顶点数，f 表示面数及 e 表示棱数，那么如果 a 为棱长，S 为表面积及 V 为体积，就可得到如下结果：

正多面体	n	m	v	f	e	S	V
四面体	3	3	4	4	6	$a^2\sqrt{3}$	$^1/_{12}a^3\sqrt{2}$
六面体	4	3	8	6	12	$6a^2$	a^3
八面体	3	4	6	8	12	$2a^2\sqrt{3}$	$^1/_3a^3\sqrt{2}$
十二面体	5	3	20	12	30	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$^1/_3a^3(15+7\sqrt{5})$
二十面体	3	5	12	20	30	$5a^2\sqrt{3}$	$^5/_{12}a^3(3+\sqrt{5})$

对偶性 表中的交叉线表示有关的一对立体是对偶的，顶点数和面数可以互换，图 8.5-3 表示立方体和八面体的例子。边数保持不变，根据欧拉定理:

$v_1+f_1=f_2+v_2=e+z$，四面体是自对偶的。

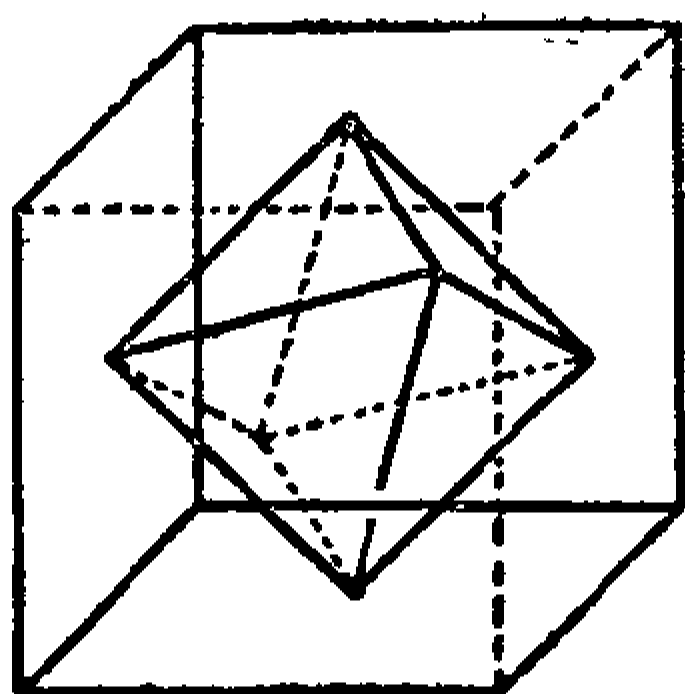


图 8.5-3 立方体和八面体之间的对偶性

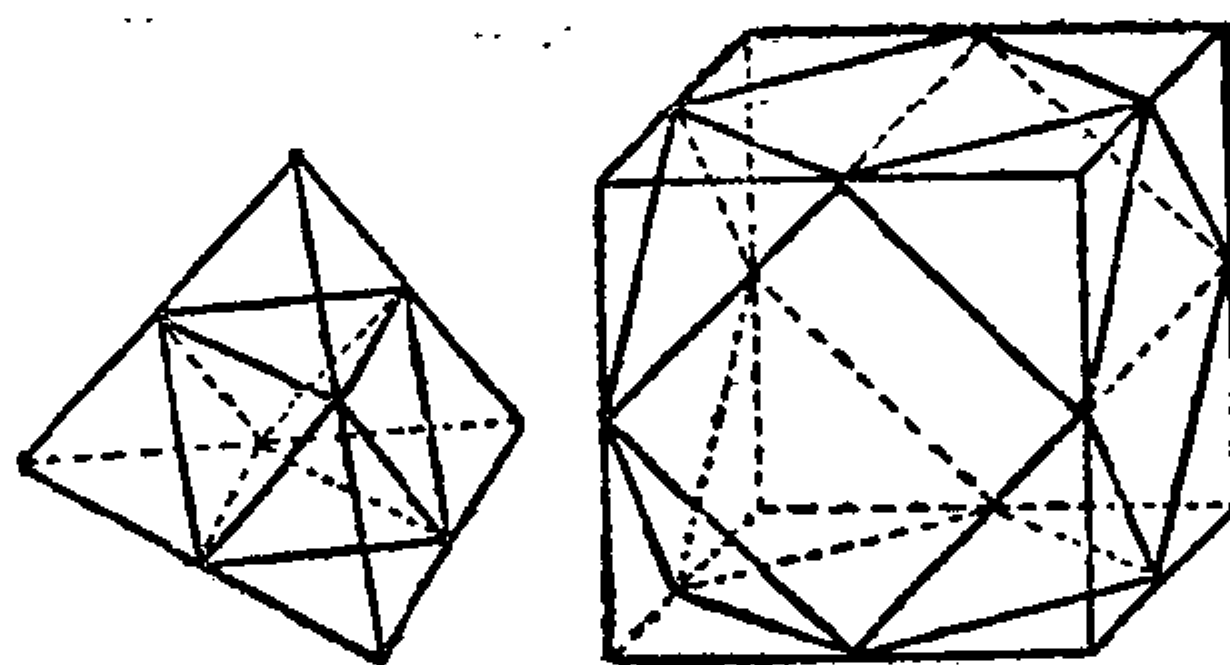


图 8.5-4 截多面体，四面体变成八面体(左)立方体给出了一个中央结晶体(右)

截多面体 如果将一正多面体的各个顶角切掉，使所截平面截面都成为正则并且全等，截下的立体的所有面都全等或在立体的每个顶角相交的几个正 n 边形有不同的边数，因此根据上述不同情况将剩下的立体仍叫正多面体或叫半正则(阿基米德)立体(见图 8.5-4)。图中所示的截立方体叫**中央晶体**，因为它同样可以由通过八面体各棱的中点作截面得到。然而，还可以这样切立方体，使所得各面为正八边形。

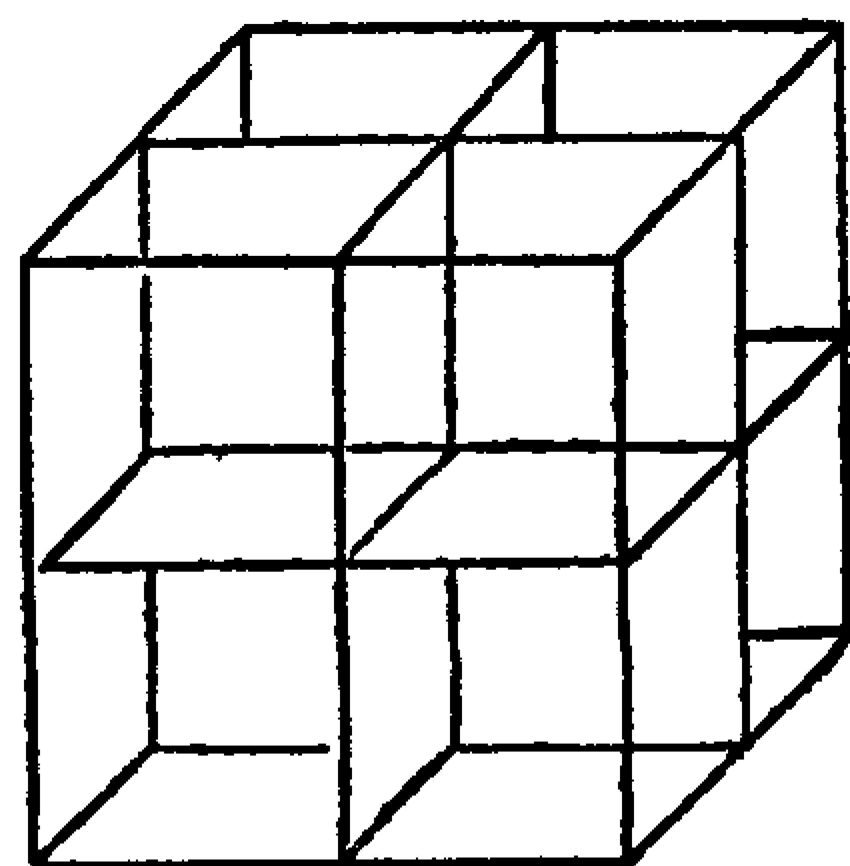


图 8.5-5 立方体的主对称面

晶体

尽管自然界中绝大多数立体是无规则的，然而晶体则直接作为数学立体而出现。

尼尔斯·斯坦生(Niels Stensen, 1638～1686 年)根据同种物体所有晶体的相应面之间的夹角都具有相同数值，发现了**面角守恒定律**。要描述晶体的对称性质，需要有**对称中心**、**对称轴**和**对称平面**的概念。立方体有连接对立面中心的三个对称轴和九个对称面。三个**主对称面**或简称**主平面**是通过立方体中心并分别与三对对立面平行的平面。与每一对对立面垂直的有两个对称面，每个这样的对称面都包含有两条立方体的空间对角线(图 8.5-5)。

8.6 球

概述

如果一个半圆绕其直径旋转，则圆周就描绘出一个**球面**。被球面完全封闭的这部分空间叫**球**。球面是距某一固定点等距离的空间各点的轨迹，这固定点叫球心。球面形在日常生活中起着很重要的作用，我们可以联想到滚珠轴承、球窝关节、玩具球以及天体。

一直线或平面和球的相对位置　一直线和球面有 0,1 或 2 个公共点。

割线，弦。割线与球相交于两点，弦是割线上不包含球外点的这段线段。最长的弦是球的**直径**，它为球心 C 平分。从球心到球面上任何一点的线段都叫**半径**。

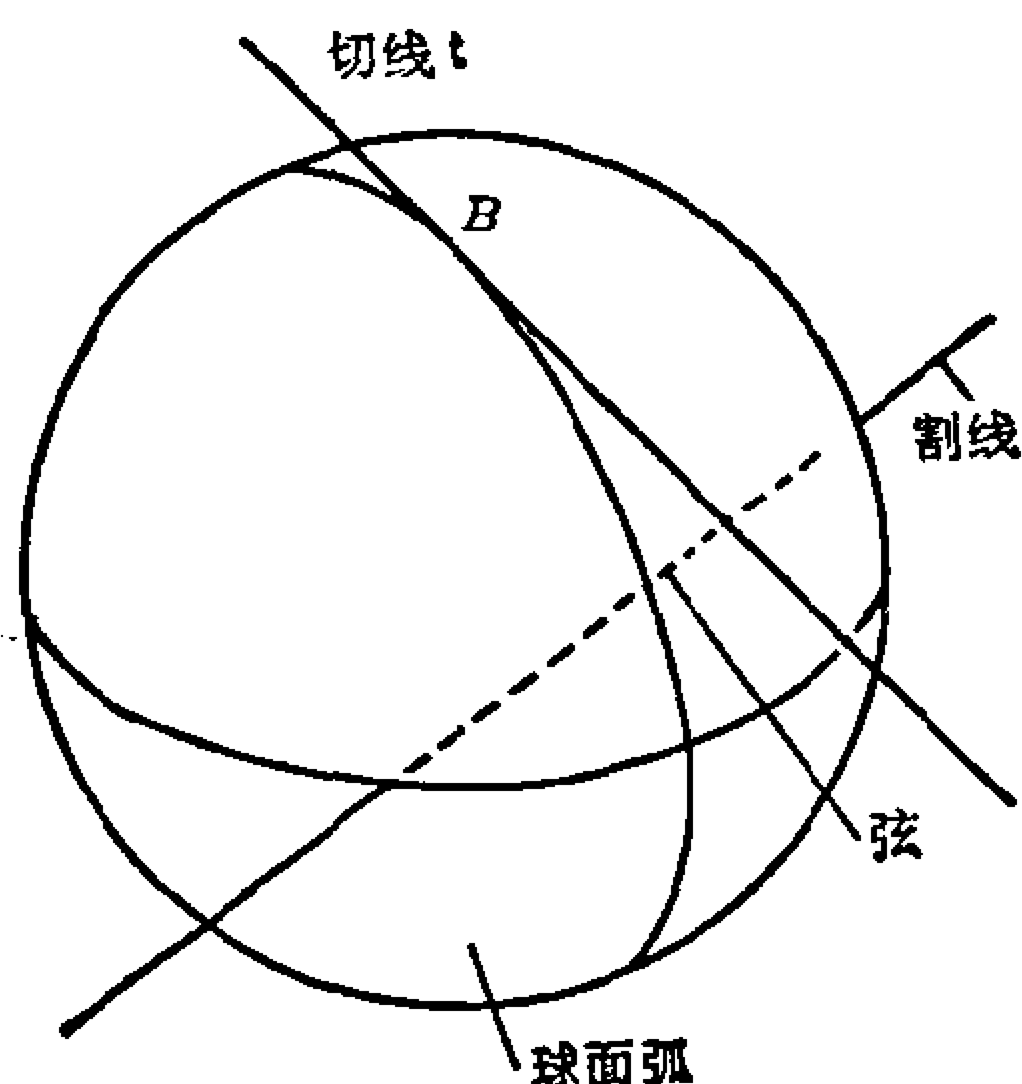


图 8.6-1　球和直线

切线，切面。球面的切线 t 和球只有一个公共点，即 t 的接触点 B (图 8.6-1)。过 t 的平面束都截球成圆形，这些圆都和 t 接触于 B 点。过球心的平面截球得最大圆。这束平面中与过球心的面垂直，与球接触于 B 点的平面叫球的**切面**。

除了切面之外，其他面不是与球不接触，就是切球成圆，一般切出的圆较小(见图 8.6-2)，只有通过圆心 C 的平面切出**大圆**。

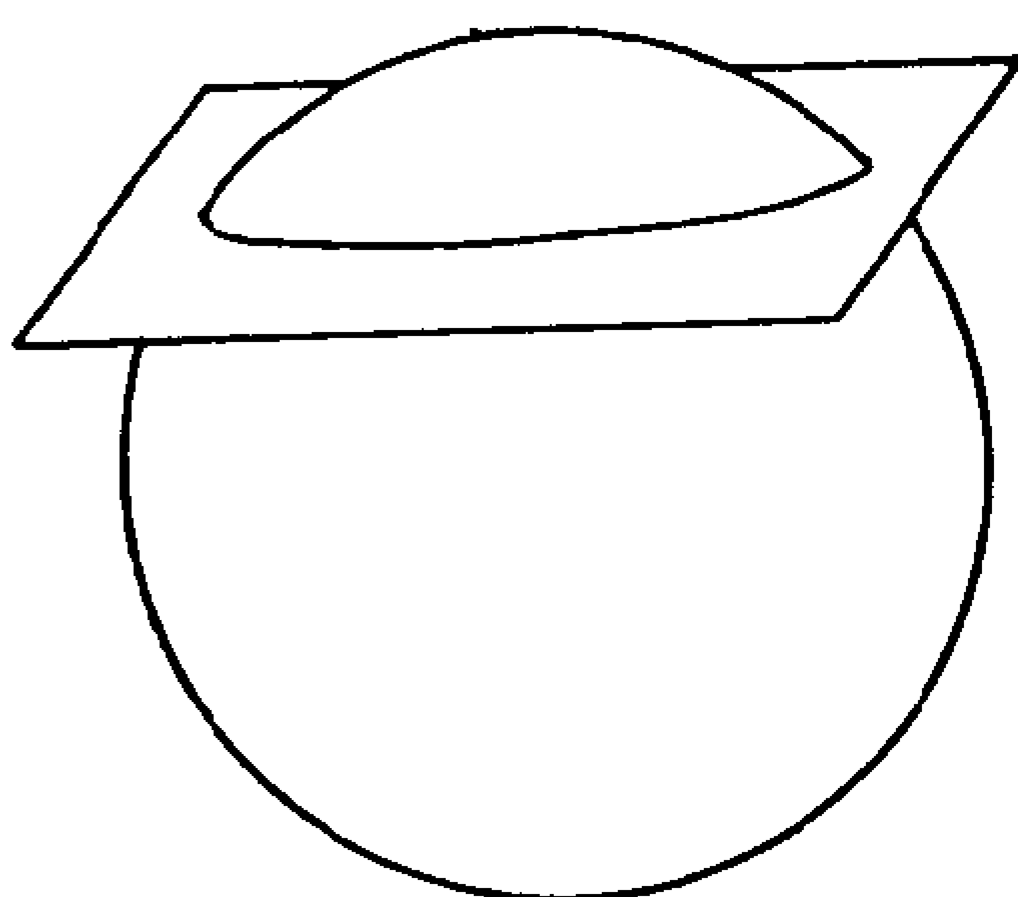


图 8.6-2 球面和平面相交成圆

球冠、球缺。一平面与球相交，分球成两个**球缺**，分球面成两个**球冠**，如果截面是大圆，则两球冠相等(见图 8.6-3)。

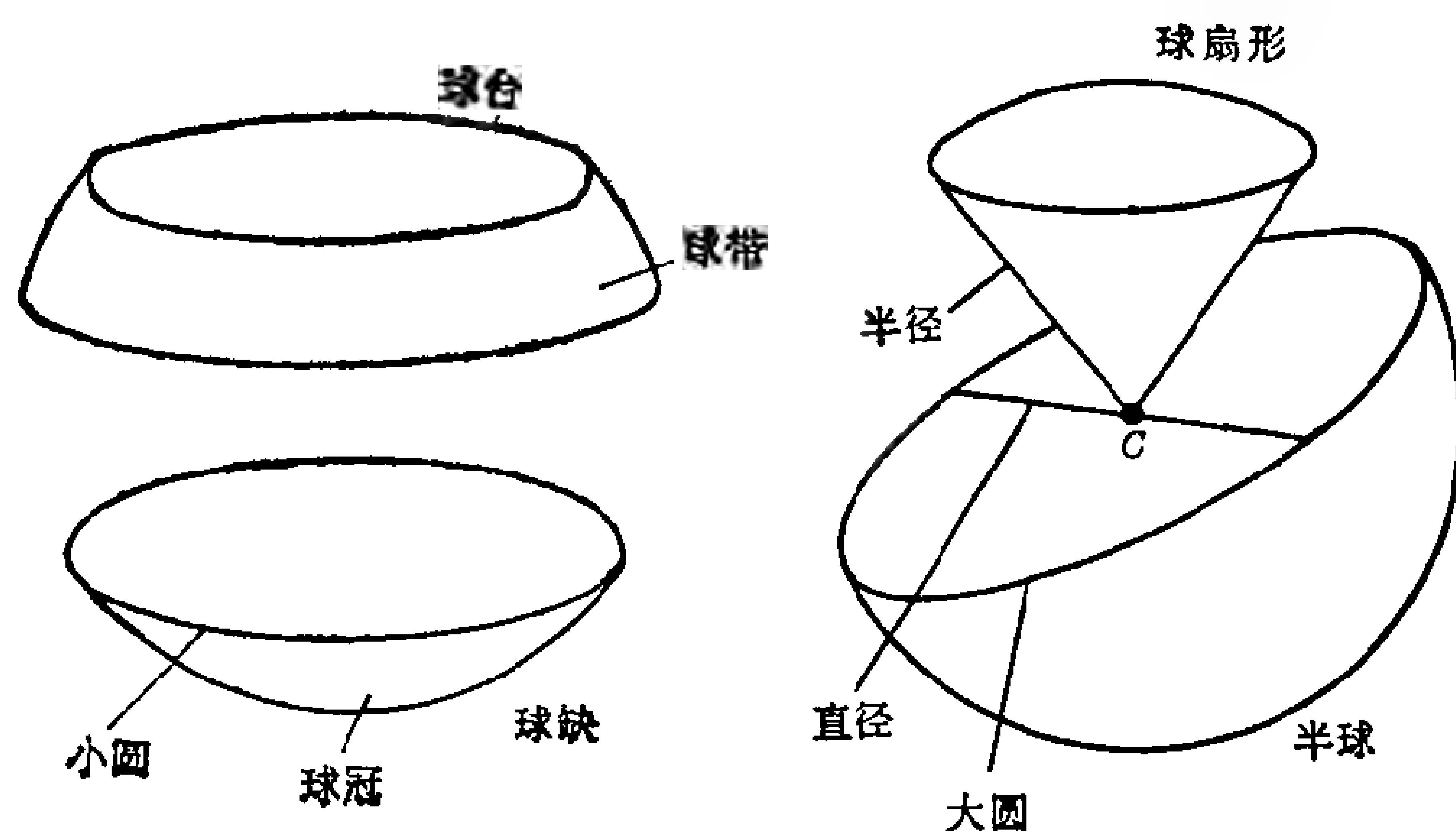


图 8.6-3 球及球的各个部分

球带、球台。两平行平面与球相交，截球成**球台**，截球面成**球带**，其中有一截面可以是大圆。过同一直径的两个平面分球成四个**球楔**，分球面成四个**球面弧**。两个相对的楔或弧是全等的。

球扇形。如果球的一半径以球上的一个小圆为导向曲线运动，它就描绘出一个圆锥曲面，并分球成两个**球扇形**。如果导向曲线是个大圆，则分两球扇形的曲面就退化成过大圆的平面，而球扇形成了半球。

体积

球的体积 根据卡瓦列利原理，半径为 r 的半球和一半径为 r 且高也为 r 的直立正圆柱在挖去一个底半径为 r 高也为 r 的直立正圆锥之后的体积相等(见图 8.6-4)。

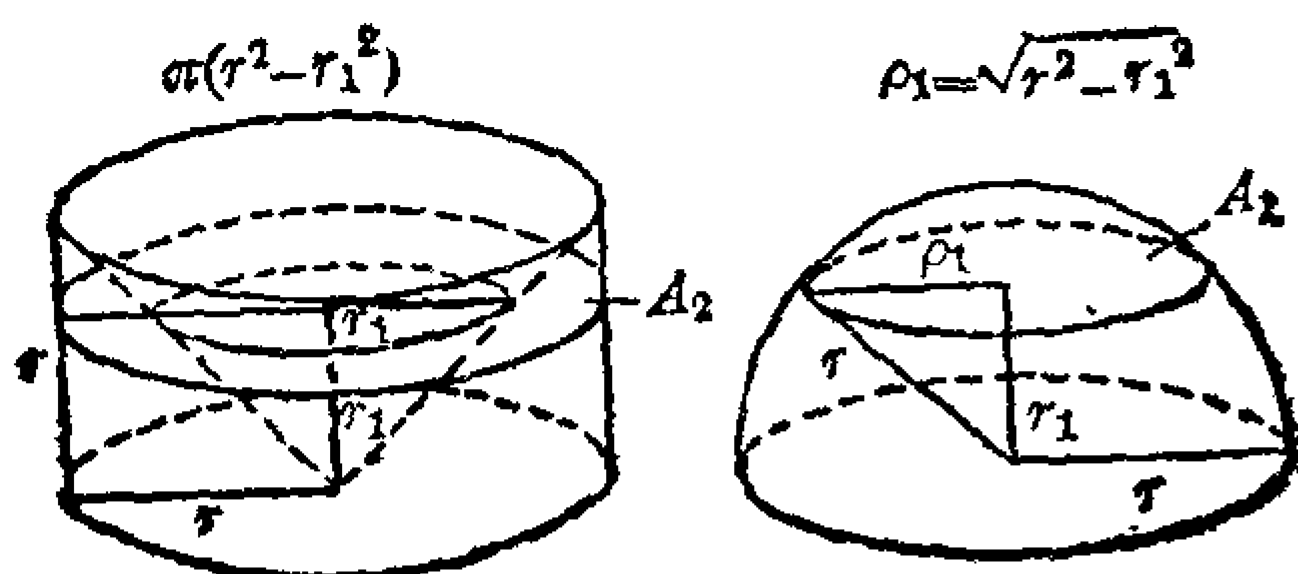


图 8.6-4 球的体积公式的推导

离底面的一距离为 $r_1(r_1<r)$ 且平行于底面的平面截半球成一个半径为 $\rho_1=\sqrt{r^2-r_1^2}$ 的圆，同时截挖去一圆锥后的圆柱成一圆环，圆环的外径和内径分别为 r 和 r_1。因此这两个截面面积分别为 $A_1=\pi\rho_1^2=\pi(r^2-r_1^2)$ 和 $A_2=\pi r^2-\pi r_1^2$，即此两截面面积相等。这就证明了半球体积为 $V_H=\pi r^3-\pi r^3/3=2\pi r^3/3$ (见图 8.6-4)。

球的体积	$V=4\pi r^3/3$

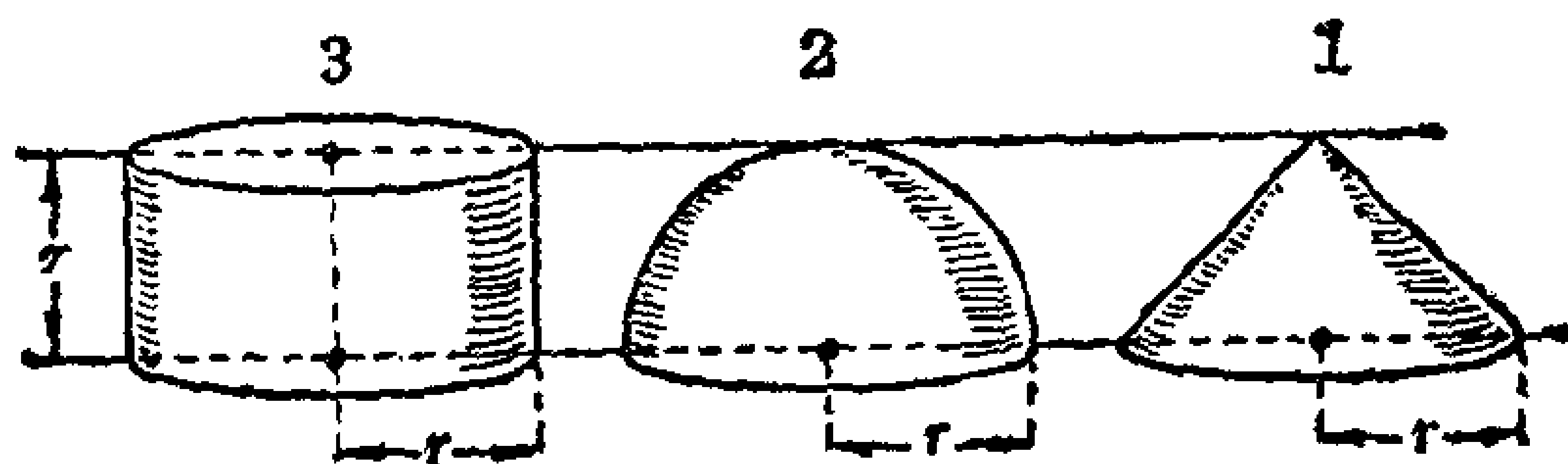


图 8.6-5 这三个立体的体积之比 3:2:1

部分球体的体积 球缺。球缺体积公式可用同样原则导出(即比较半球和圆柱体的体积，见图 8.6-5, 8.6-6)。在这里用平截头圆锥体代替圆锥：

$$V=\pi r^2h_1-\frac{1}{3}\pi h_1[r^2+(r-h_1)r+(r-h_1)^2]$$

$$=\frac{1}{3}\pi h_1(3rh_1-h_1^2)=\frac{1}{3}\pi h_1^2(3r-h_1)。$$

由于 $\rho^2=r^2-(r-h_1)^2=2rh_1-h_1^2$ 或 $6rh_1-2h_1^2=3\rho^2+h_1^2$，所以

$$V=\pi h_1(3\rho^2+h_1^2)/6,$$

式中 r 是球的半径，h_1 是球缺的高，ρ 是底圆半径。

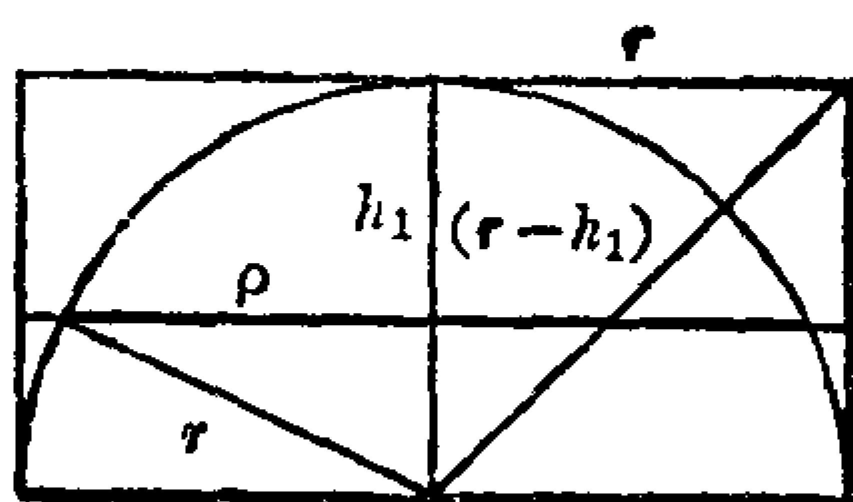


图 8.6-6 球缺体积公式的推导

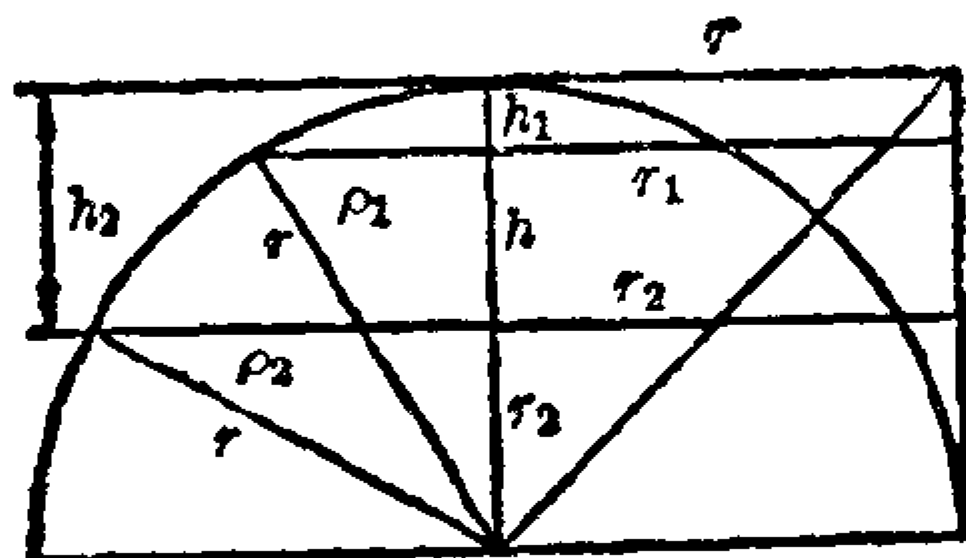


图 8.6-7 球台体积公式的推导

球缺体积	$V=\pi h_1^2(3r-h_1)/3=\pi h_1(3\rho^2+h_1^2)/6$

球台。如果球台介于半径为 ρ_1 和 ρ_2 的两个圆形截面之间，高为 h，则根据卡瓦列利原理，其体积是圆柱(πr^2h)和底面半径分别为 $r_1=r_2+h$ 和 r_2 的平截头圆锥体之间的体积差(见图 8.6-7)。体积由下式给出:

$$V=\pi r^2h-\pi h[(r_2+h)^2+(r_2+h)r_2+r_2^2]/3$$
$$=\pi h(6r^2-6r_2^2-6r_2h-2h^2)/6。$$

因为

$$\rho_1^2=r^2-(r_2+h)^2,\quad \rho_2^2=r^2-r_2^2,$$
$$\rho_1^2+\rho_2^2=2r^2-2r_2h-2r_2^2-h^2,$$
$$3\rho_1^2+3\rho_2^2+h^2=6r^2-6r_2^2-6r_2h-2h^2,$$

体积为
$$V=\pi h(3\rho_1^2+3\rho_2^2+h^2)/6。$$

球台体积	$V=\pi h(3\rho_1^2+3\rho_2^2+h^2)/6$

球扇形。球扇形的体积是球缺和圆锥的体积之和:

$$V_{球扇形}=\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)+\frac{1}{3}\pi\rho^2(r-h),$$

式中 h 是球缺的高，$r-h$ 是圆锥的高，ρ 为导向圆的半径。由于 $\rho^2=h(2r-h)$，所以 $V_{球扇形}=2\pi r^2h/3$。

球扇形的体积	$V=2\pi r^2h/3$

空心球。空心球是半径为 r_1 的球挖去一半径为 r_2($r_2<r_1$)的同心球后剩下的部分。空心球的体积是这两球的体积之差:

$$V_{空心球}=\frac{4}{3}\pi r_1^3-\frac{4}{3}\pi r_2^3。$$

空心球的体积	$V=\frac{4}{3}\pi(r_1^3-r_2^3)$

表面积

球的表面积。与圆锥或圆柱的曲面不同，球的曲面不能在平面上展开。推导球面积的公式必须用到极限论证。

如果设想将球面分成 n 个小多边形，则过这些多边形顶点的半径分球面空间成 n 个底为 B_i 和高为 h_i 的棱锥状子空间。n 越大，底 B_i 越小，高 h_i 和球的半径 r 之间的差别越小，底 B_i 的面积之和和球面面积 S 之间的差别越小，子空间的体积 $B_ih_i/3$ 之和与球的体积 V 之间的差别也就越小。由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}B_i=S$，$\lim\limits_{n\to\infty}h_i=r$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}B_ih_i/3=V$ 得 $V=rS/3$ 或 $S=(3V)/r=4\pi r^2$。

球的表面积是球的大圆面积的四倍。

球的表面积	$S=4\pi r^2$

与圆类似，表面积相等的所有立体中以球的体积为最大，或在体积相同的所有立体中以球的表面积为最小(见 II. 第 25 章的等周问题)。球的这个性质具有十分重要的意义，对于液滴和星体来说，因为它们呈球状，所以蒸发率和热传导比取其他形式来得小。同样，由于这个性质和它具有大容量，所以气体与液体的容器常做成球形。

部分球面的表面积　推导球冠表面积 S 的公式进行的过程与推导球的表面积一样，也就是先求出 $V_{球扇形}=2\pi r^2h/3$ 和 $2\pi r^2h/3=\frac{1}{3}rS_{球冠}$ (见图 8.6-3)，因此 $S_{球冠}=2\pi rh$，式中 h 是相应球截形的高。球带的表面积可以看成是两个球冠的面积之差。如果以 h 表示相应球台的高，h_1 和 h_2 表示较小和较大球冠的高，则 $S_{球带}=S_{球冠2}-S_{球冠1}=2\pi rh_2-2\pi rh_1=2\pi r(h_2-h_1)$；又由于 $h_2-h_1=h$，所以 $S_{球带}=2\pi rh$。请注意，$S_{球冠}$ 和 $S_{球带}$ 的两个公式在形式上是相同的，尽管 h 在此两例中含义不同。

球扇形的表面积是球冠和圆锥锥面的面积之和：

环形圆纹曲面是由一半径为 r 的圆绕一轴旋转得来的，轴和圆在同一平面内，轴到圆心的距离 $a \geqslant r$ (图 8.7-2)。 环形圆纹曲面是一**管形曲面**。

伪球面是由曳物线绕其渐近线旋转得来的。如果取笛卡尔坐标系的 x 轴为渐近线，a 为歧点 A 在 y 轴上的距离，则 $V=2\pi a^3/3$ 就是此伪球面的体积。在每一个正则点处，曲面都具有相同的负高斯曲率。 由于这个性质，伪球面被用作双曲型非欧几何学的模型，就象球被用作椭圆型非欧几何学的模型一样。

曳物线的曲率中心在一条**悬链线**上，因此悬链线是曳物线的渐屈线(见 **II**. 图 6.5-11)。悬链线绕其准线旋转就得到**悬链面**，这是唯一的最小旋转曲面。

帕普斯法则 为了计算旋转体的体积和表面积，亚历山大的帕普斯(Pappus，公元三世纪末)给出一个法则，此法则现已由积分导出。

帕普斯表面积计算法则。如果一平面曲线 C 绕一直线 l 旋转，l 和 C 在同一平面内，C 在 l 的一侧，则所得旋转曲面的面积 S 等于母曲线 C 的长度和 C 的重心在旋转时所走路程长度的乘积。

帕普斯体积计算法则。如果部分平面 A 绕同一平面内的一条直线旋转，此直线最多只能与 A 共边界点，则所得旋转体的体积 V 等于 A 的面积和 A 的重心在旋转时所走路程长度的乘积。

【例 1】 对于环形圆纹曲面 (见图 8.7-2)，其表面积 S 为 $S=2\pi a\cdot 2\pi r=4\pi^2 ar$，其体积为 $V=2\pi a\cdot\pi r^2=2\pi^2 ar^2$。

【例 2】 将一半圆绕其直径旋转，所得球的表面积和体积是众所周知的，因此可以求出半圆弧和半圆盘的重心到转轴的距离 ρ_O 和 ρ_A。由 $S=4\pi r^2=S\cdot 2\pi\rho_O$，$S=\pi r$，因此得 $4\pi r^2=2\pi^2 r\rho_O$ 和 $\rho_O=2r/\pi$。 由 $V=4\pi r^3/3=2\pi\rho_A\cdot A$，$A=\pi r^2/2$，所以有 $4\pi r^3/3=\pi^2 r^2\rho_A$ 和 $\rho_A=4r/(3\pi)$。

开普勒(Kepler)法则，辛普森(Simpson)法则 有些计算立体体积的近似公式在实际计算中非常有用，在很多特例中这些公式能给出准确值。

在关于琵琶桶立体几何的一部巨著中，开普勒(1571～1630 年)给出了确定琵琶桶体积 V 的近似公式，式中 B_0, B_2, B_1 是桶的顶和底面及中间截面的面积，h 是琵琶桶的高。

这个公式对于下列情况给出**精确值**：平截头棱锥体、棱锥、球、椭圆抛物面、单叶双曲面、椭球及为垂直于轴的截面所截得的这些立体的部分。

开普勒法则	$V=h(B_0+4B_1+B_2)/6$

【例1】 平面 $z_0=c$, $z_2=-c$, $z_1=0$ 与单叶双曲面 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)-(z^2/c^2)=1$相交,所得截面的面积分别为 $B_0=B_2=2\pi ab$ 和 $B_1=\pi ab$。由 B_0, B_2 和双曲面组成的立体(见图 8.7-3) 高为 $2c$, 体积为 $V=\dfrac{8}{3}\pi abc$。

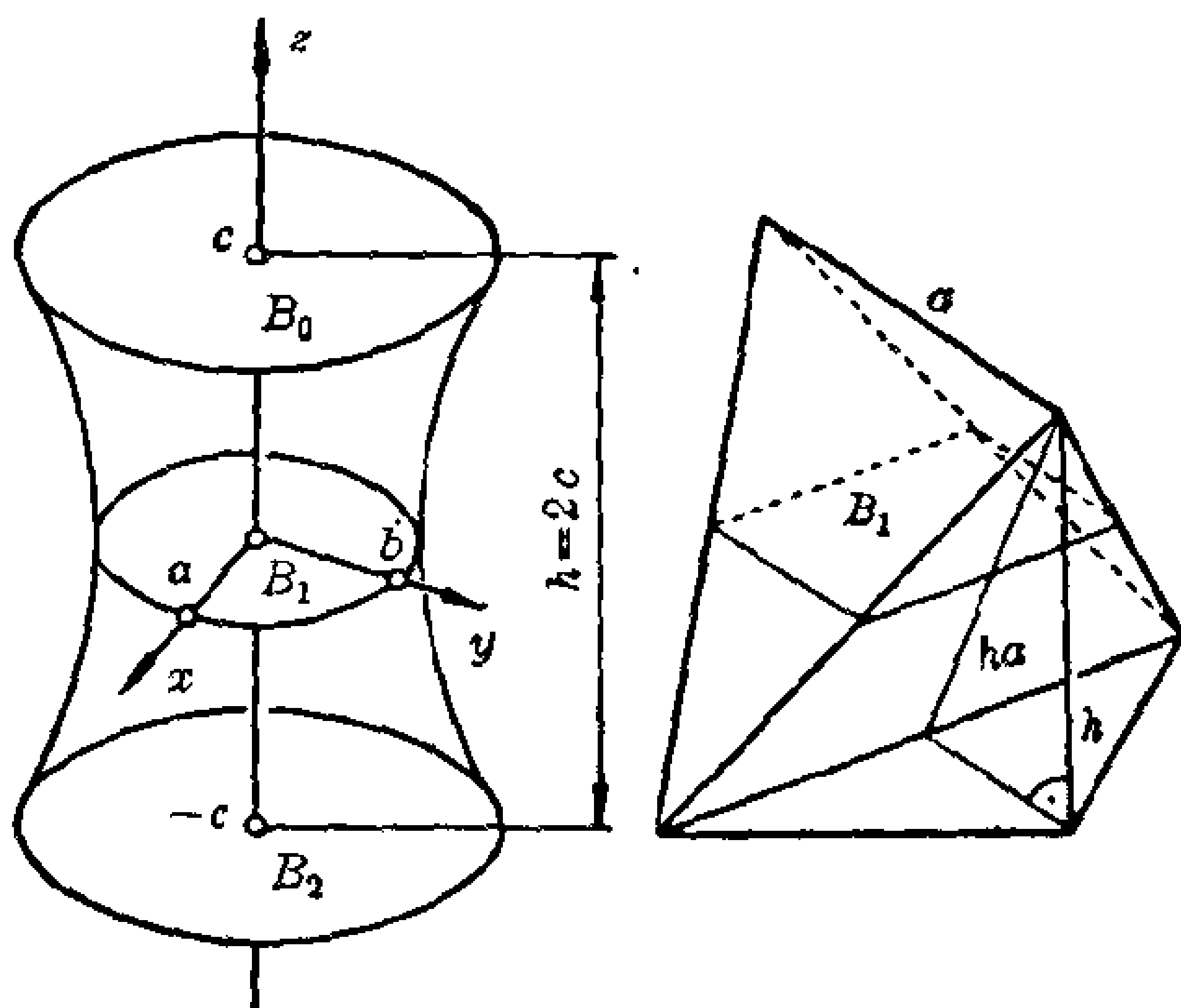


图 8.7-3 双曲面　　图 8.7-4 四面体

【例2】 平面 $z_0=1$ 与 $z_2=9$ 截旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 为一台状物体,这里 $B_0=\pi$, $B_2=9\pi$, $B_1=5\pi$, $h=8$, 所以体积 $V=40\pi$。

【例3】 对于边长为 a 的四面体(图 8.7-4), $B_0=B_2=0$, $B_1=a^2/4$ 及 $h^2=h_a^2-a^2/4$ 和 $h=a/\sqrt{2}$。根据开普勒法则,体积为 $V=a^3\sqrt{2/12}$。

既然开普勒法则对棱锥和四面体给出精确结果,所以它也能无误差地应用于平截头棱锥体。这就为琵琶桶、木桶形立体和不太长的树干提供了很好的近似计算法。对于经线沿切线方向不连续的旋转体和高度比平均直径大的立体可以分段处理。在必要的情况下,可将高 h 分成 $n=2k$ 个相等部分,对这样得出的 k 对台状体应用开普勒法则,以此可以得到较大的精确度。如果以 B_i 表示第 i 个截面的面积,则体积可由用辛普森(1710～1761 年)名字命名的法则求得。

辛普森法则	$V=\dfrac{h}{3n}\{B_0+4(B_1+B_3+\cdots+B_{n-1})+2(B_2+B_4+\cdots B_{n-2})+B_n\}$

劈锥曲面 在技术应用中,劈锥曲面具有很重要的实用价值。一般说来,劈锥曲面可由如下方法得到。给定一**导向曲线** C,一**导向直线** l 和一不平行于 l 的**方向平面**,平行于平面与 C 和 l 相交的直线集就构成了劈锥曲面。如果导向曲线是个圆,圆平面不包含导向直线,这就叫**圆劈锥曲面**。如果导向直线垂直于方向平面,且与圆平面外侧的圆轴线相交成

直角，这就叫**直立正圆劈锥曲面**。与圆平面平行的平面截圆劈锥曲面成一椭圆(图 8.7-5)。开普勒法则运用于直立正圆劈锥曲面时，所得体积是准确的。如果用 r 表示底圆半径，h 表示高，则 $B_0=\pi r^2$，$4B_1=2\pi r^2$，$B_2=0$，所以 $V=\pi r^2h/2$。

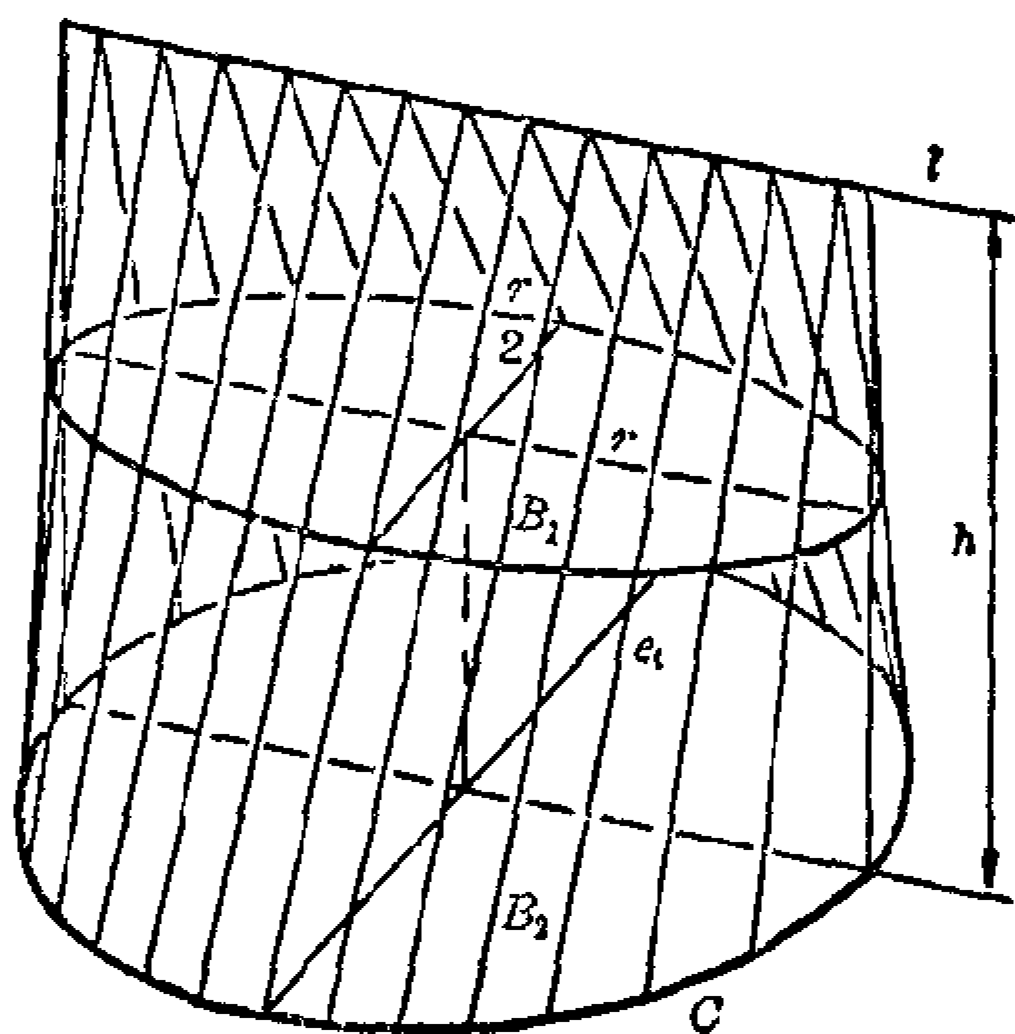


图 8.7-5　劈锥曲面

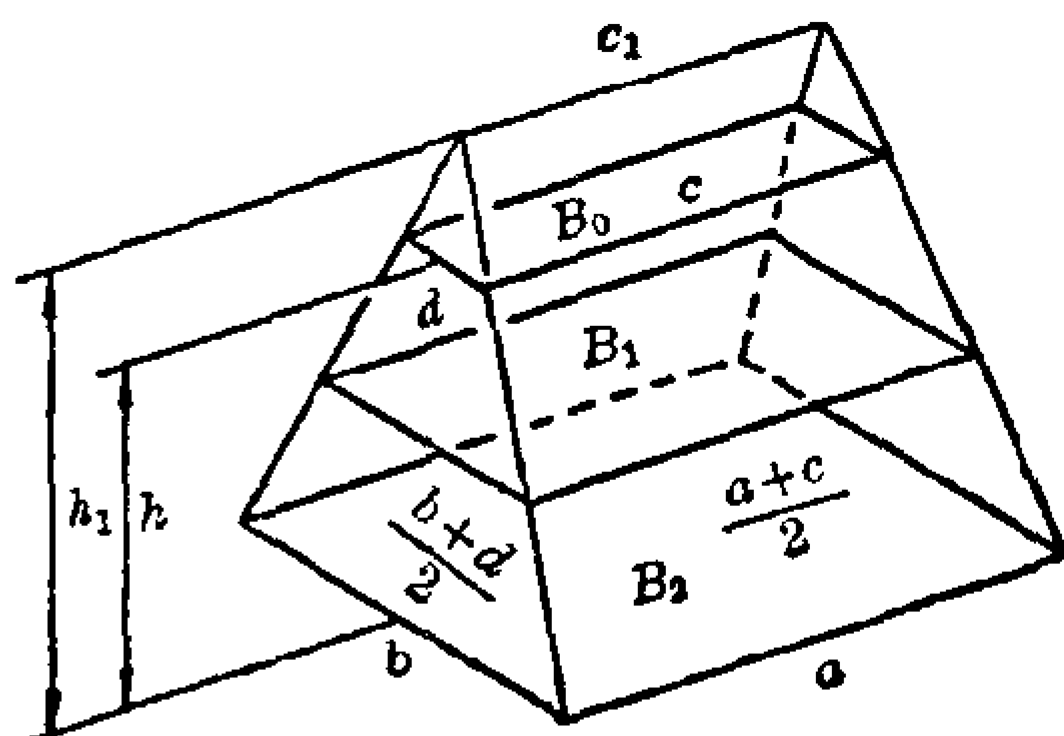


图 8.7-6　平截头棱锥体、浮船、劈

平截头棱锥体　平截头棱锥体是一个多面体，它的顶和底面是两个平行多边形，侧面是三角形或梯形。棱柱、棱锥和棱锥的平截头台是平截头棱锥体的特殊形式。

一种更为特殊的形式是**劈**，在这里顶面退化成平行于底面的一条直线，这条线叫刀棱。平行于直立劈底面的平面相切劈得另一个劈，剩下的部分叫**浮船**(见图 8.7-6)。浮船的侧面梯形成对全等。它的底面和顶面之间不存在相似性。如果浮船的高比底和顶的边长大得很多，这样的立体称为**方尖塔**。

对平截头棱锥体运用开普勒法则能得出准确值。如果一浮船底面的两边为 a 和 b，顶面的两边为 c 和 d，高为 h，则

$$B_0=cd,\quad 4B_1=(a+c)(b+d),\quad B_2=ab,$$

所以 $V=h[2(ab+cd)+ad+bc]/6$。若 $d=0$，则立体就是劈，棱长 $c=c_1$，而体积为 $V=h_1b(2a+c_1)/6$。在工业技术中，劈用作切削工具和机器组件，如制动器。浮船众所周知是可移动的桥的漂浮组件和浮船坞。方尖塔常见于石碑和宗教建筑物中，里程碑也常做成这些形状。最后，许许多多的屋顶可以看成一般平截头棱锥体的组合。

第9章 画法几何

9.1 画法几何中的成图方法 ……344
中心投影 ……344
平行投影 ……345
9.2 两面投影法 ……346
直线和平面的表示法 …348
透视仿射 ……352
侧面投影、旋转和立体的表示法 ……355
9.3 另外一些图示方法 ……359
标高投影——单投影面法 ……359
轴测投影 ……362
中心透视 ……366
立体图象对 ……371

画法几何是研究和应用把三维空间的东西如何在图板平面上的成图方法。为了要延用平面几何的构图方法，人们给予优先的地位来解决图板上与空间直线相对应的直线的成图方法。在选择成图方法时，有两点要求是应优先考虑的：清晰性和保持量度性。

例如，采用中心投影可以得到清楚的图象，因为绘图板上画出的这种图象就是眼睛所看到的图象的仿制。要保持尺度关系不变，最常用的方法是采用正投影。由于空间的物体画成图板面上的一视图后缺少了一向尺度，因此只有在某种条件下，才使空间物体可能保持比例关系不变。能保持常态的轴测投影图象，是一种对一空间物体通过新建立的三维间比例关系所提供的一种表达清楚的图象。其中，正面轴测图象因其简便而常被采用。

如果工程图和它的画法是作为一种增添的交流思想的工具如同语言、文字那样，那末它们一定要按照画法几何所引入的一些规定来制作。这些适用于实际需要的办法的制定主要归功于蒙惹（Monge，1746～1818年），由于他那本著名的《画法几何》，以及他在这方面的教学和研究工作，使他被誉为画法几何的创始人。

9.1 画法几何中的成图方法

中心投影

在中心投影中，图象是用发自一点的一束射线来实现的。这个中心点即**投影顶点** V，它不处在**投影平面** Π 上。对于任意点 P，它不等于 V，其**中心投影**或**透视图象** P^c 是射线 r_p 即 VP 和投影平面 Π 的交点，即 $P^c=r_p\frown\Pi$。在这种投影下，Π_V 是通过 V 点与 Π 面的平行面，Π_V 面上的所有点投射到 Π 面的虚点（即在无穷远处的点）上。这一平面 Π_V 称为**没影平面**或**灭面**（见图 9.1-1）。

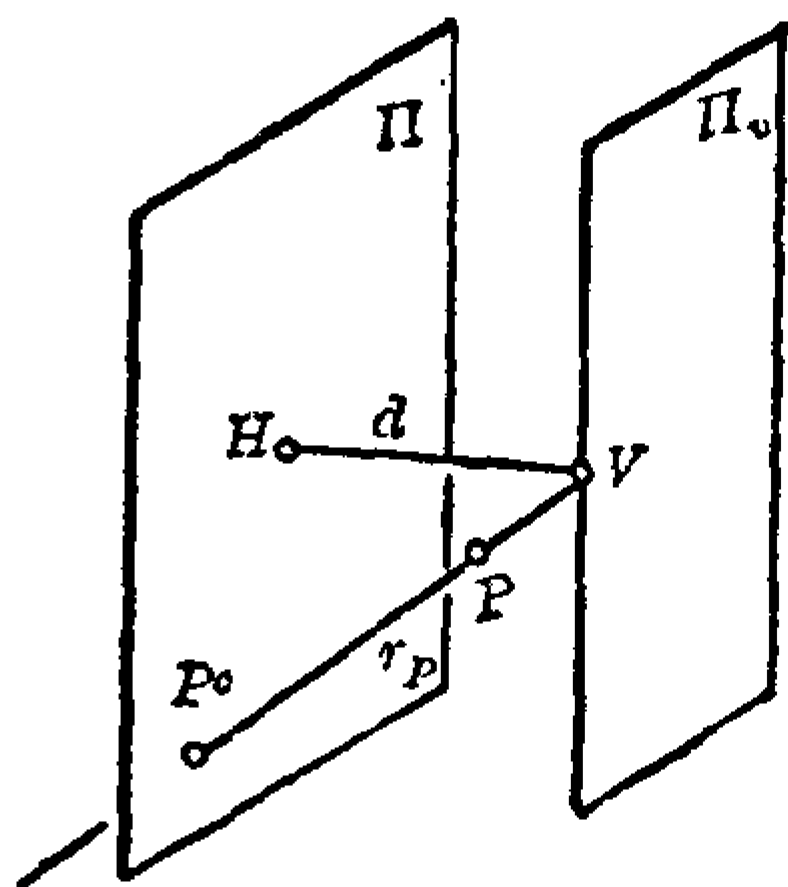


图 9.1-1　中心投影的投影平面和没影平面

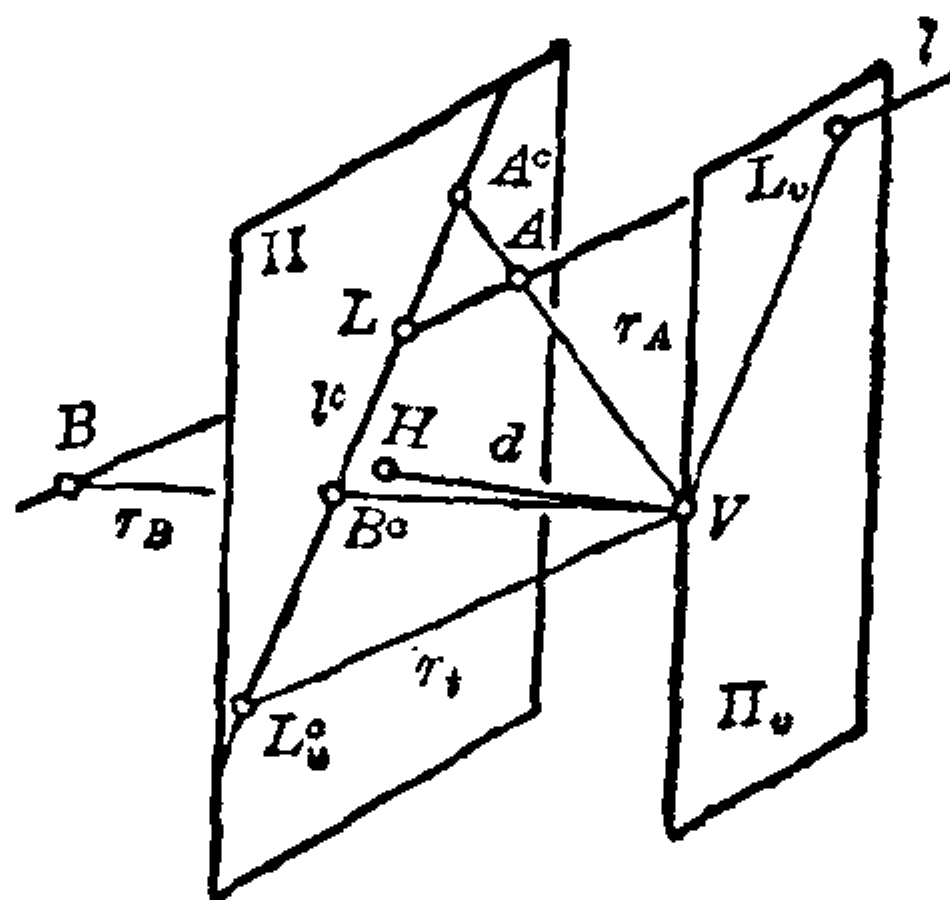


图 9.1-2　中心投影中一直线的成象

一条不通过 V 点而又不在 Π_V 平面内的直线 l，其中心投影 l^c 仍然是一条直线。由于将直线上的点进行投影的那些射线，诸如 r_A 即 VA 和 r_B 即 VB 组成了一平面，它和 Π 相交成一条直线 l^c（见图 9.1-2）。迹点 $L=(l\frown\Pi)$ 在 l^c 上。l 的中心投影 l^c 由它的两个点 A 和 B 的中心投影 A^c 和 B^c 唯一地确定。l 和 Π_V 的交点 L_V 称为 l 的**消失点**或**灭点**，该点是 l 的透视 l^c 的虚假灭点。l 的灭点的投影是 Π 平面与过 V 点并平行于 l 的射线 r_l 的交点 L_u^c。这个**消失点** L_u^c 是所有平行于 l 的直线在无穷远处诸点的公共投影点。所有与 Π 垂直的直线，其消失点是 V 点到 Π 的垂足，称为**主点**或**主消失点** H。线段 VH 的长度 d 称为视距。所有与 Π 成 45° 角的直线，它们的消失点都处在以 H 为圆心、以 d 为半径的那个圆周上。这圆称为视距圆。

平行投影

如果投射线束的顶点 V 处在无穷远处，这种投影是空间一些点 P 在 Π 面上的诸投影点 P' 的平行投影。由直线 p 以及通过该线上的诸点进行投影的射线形成一平面，它和 Π 面的交线 p' 就是 p 的投影，故一条直线的投影仍是一条直线。又，两条平行线 p' 和 q' 的投影仍保持平行。此外，一给定直线 l_0 和投影的射线平行时，那末它的投影成为一个点 $L_0=(l_0\frown\Pi)$。对于和投影射线不平行的直线，下面的定理成立：

在平行投影中，一直线上三点之间的线段比例投影后保持不变。例如 $|AB|:|BC|=|A'B'|:|B'C'|$（见图 9.1-3）。

平行直线上两线段之比在平行投影中保持不变。例如 $|AB|:|DE|=|A'B'|:|D'E'|$。

与 Π 平行的平面图形，其投影和原来的图形全等。例如 $\triangle PQR\cong\triangle P'Q'R'$（见图 9.1-4）。

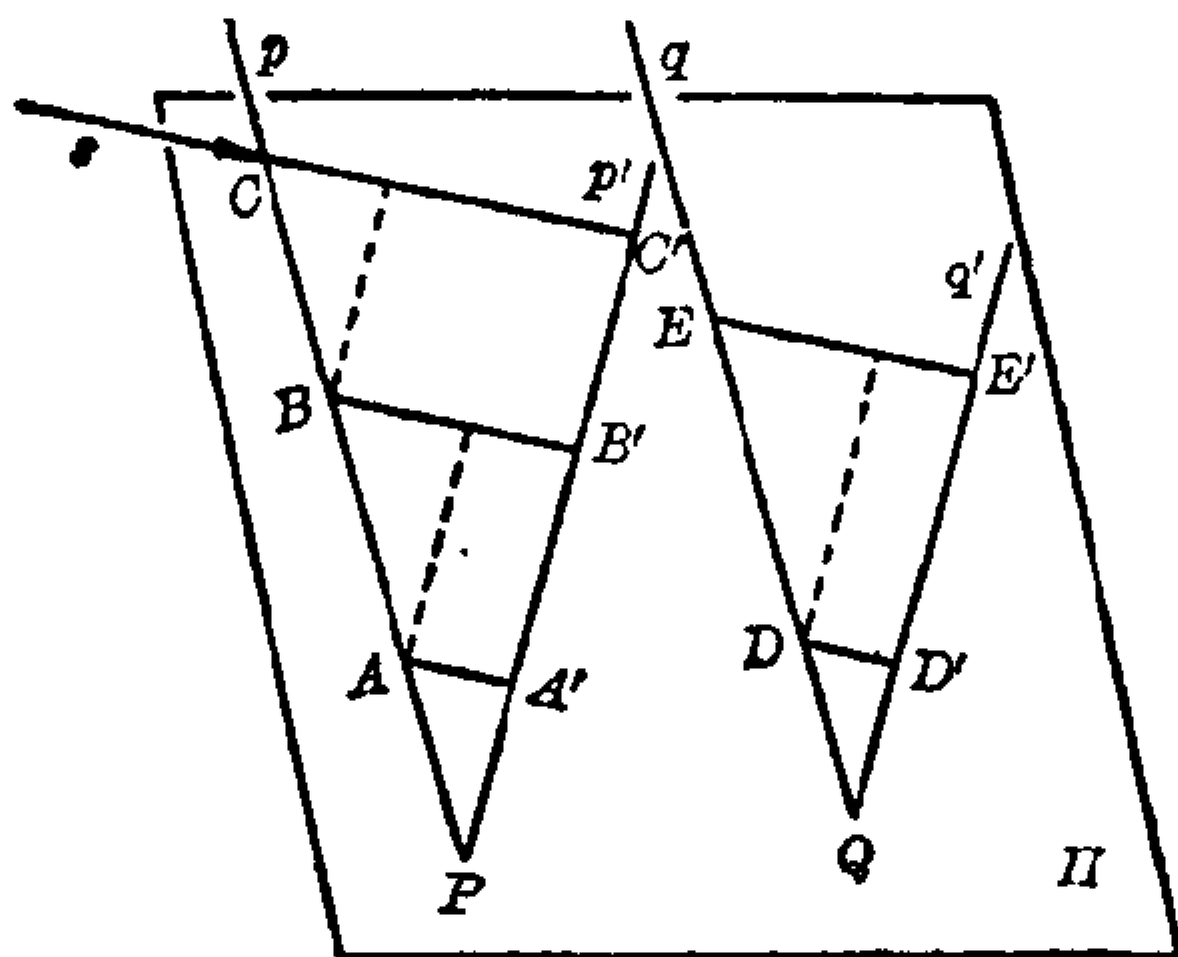


图 9.1-3 平行投影中线段的比例不变

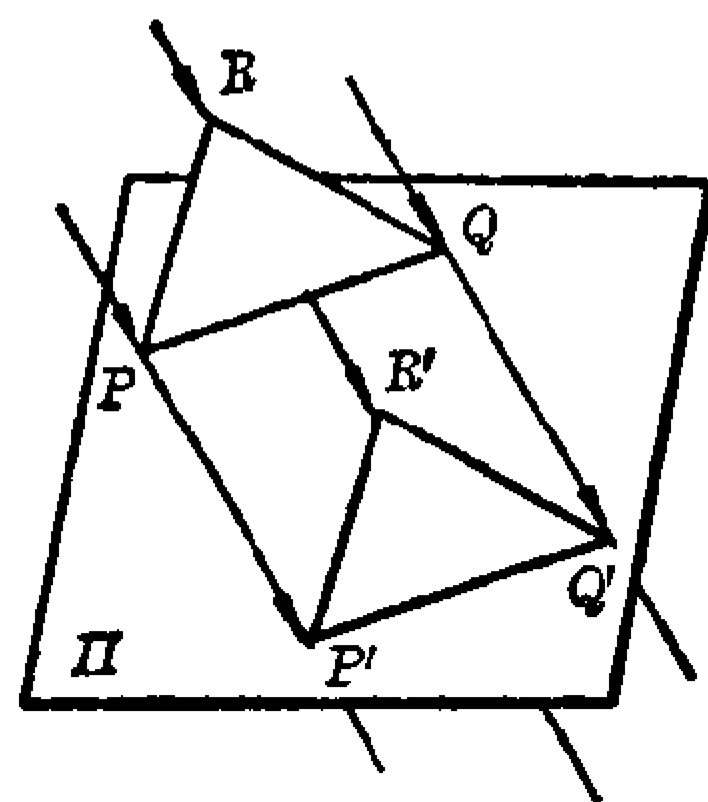


图 9.1-4 平行投影中与投影面平行的平面图形，其投影和原图形相等

斜投影（斜轴测投影） 如果要投影的立体具有三条互相垂直的边或对称轴 a, b, c，那末可以作出这个立体的斜投影（偏斜平行投影）。如果取竖直面为投影平面 Π，然后将立体置于“平常位置”，这样，三根轴中就有两根与 Π 平行，其中一根如 b 处于水平位置；另一根如 c 处于垂直位置（见图 9.1-5）。于是第三根轴 a 以及所有与它平行的直线都和 Π 垂直，称它们为深度线。它们的投影是互相平行的，并与 b 的投影形成了变

形角 $\varphi=(\bar{a}, b)$，这里 $\bar{a}$ 是 a 的投影。在深度线上，投影线段和原线段之比 $\lambda=\bar{a}:a$，称为变形系数。根据变形角 φ 和变形系数 λ，可以照图复制出空间物体的实形。为了作图方便，选 30°, 45°, 60° 或 120° 为 φ 角，因这些角很容易用三角板作出。同时选一些简单的有理数作为变形系数 λ，诸如1, 1:2, 2:3, 1:3 或 3:4。

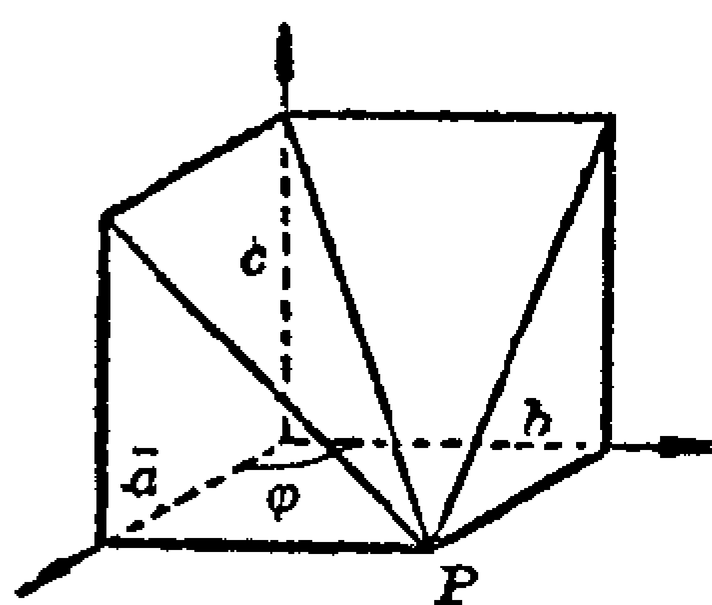


图 9.1-5 带切口立方体的斜投影

正投影或直角投影 在这种成图方法中，平行的投射线与投影平面 Π 垂直。用这种投影所引起的直观性方面的减弱可用两种方法来补偿。

1) 标出在物体上所选择的点和线相对于一基准水平面的高度。这就得出附有高度标记的一种单面投影图。这在绘制土方工程图和地形图时特别有用。

2) 在同一张图中，一个正投影与另一个正投影相对照。它是用这样的方式来实现的：用相互垂直而不同的投影方向和投影面，给出两个正投影。这里所简述的两面投影法，即为相对应的正投影，它常被用在机械制造和建筑工程方面。

9.2 两面投影法

在两面投影法中，用正投影的方法将空间物体投射到两个相互垂直的平面 Π_1 和 Π_2 上去（见图 9.2-1）。这两个平面将空间分割成四个标有数字的象限（见图 9.2-3）。用第一束平行投射线将一个空间物体投射到 Π_1 上，用第二束平行投射线将它投射到 Π_2 上。这样，就在两个互相垂直的投影面上出现同一物体的两个正投影。在 Π_1 上的称**水平投影**（平面图、俯视图），在 Π_2 上称**正面投影**（正视图、主视图），这是惯例。平面图指水平面上的投影，主视图指竖向面上的投影。用第一象限来绘制物体的投影图是较为**可取**的。为了便于制图员绘制一个物体的这两个图象，将正面投影就画在绘图板上，而将水平投影绕水平轴线 x_{12} 旋转到绘图板所在的平面内。这样旋转后，正面投影在水平轴线的上面，水平投影在它的下面。一个点 P 的水平投影和它的正面投影处在一条垂直于水平轴线的直线上，这条直线称为**柱（联系）线**，这时我们就说点 P 的水平投影 P' 和正面投影 P'' 处于蒙若位置。点 P'' 到水平轴线的距离称为 P 的

第一距离 d_1，P' 到水平轴线的距离称为 P 点的第二距离 d_2。与 P 点的水平投影 P' 相应的称第一投射线 r_1，与正面投影 P'' 相应的称第二投射线 r_2，两者都通过 P 点。

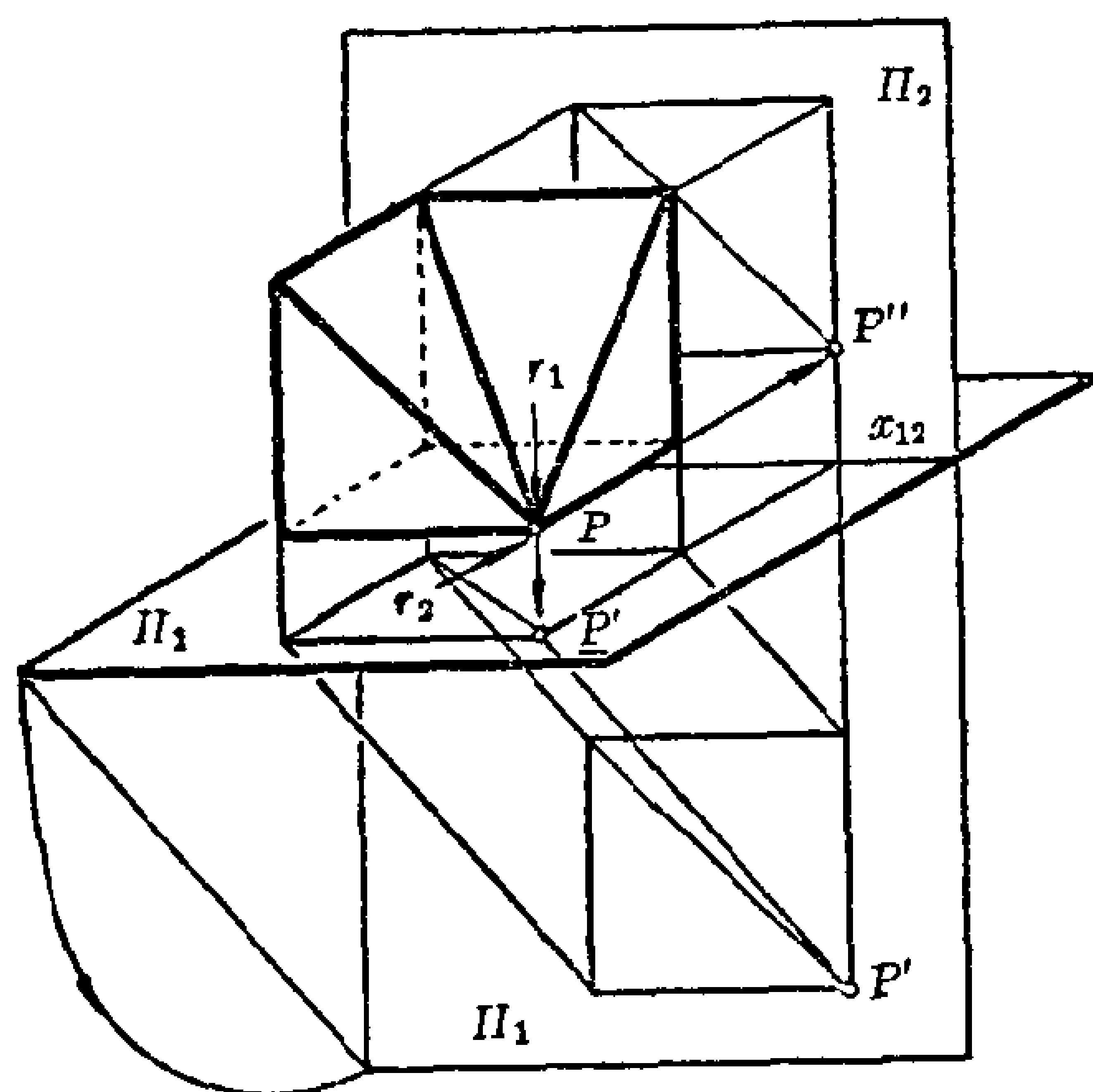


图 9.2-1 作为表达一空间物体在直角坐标系中的正投影的斜轴测图

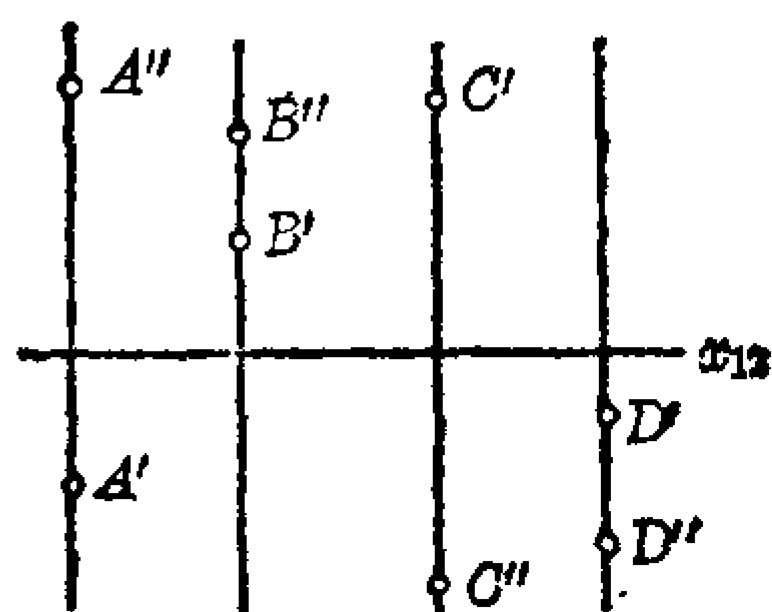


图 9.2-2 A, B, C, D 四点的水平、正面投影它们分别在 I, II, III, IV 象限

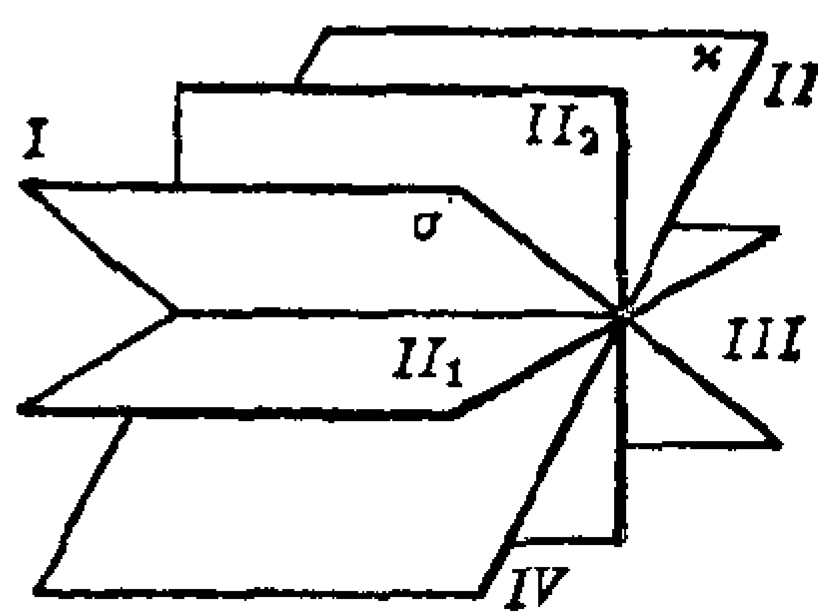


图 9.2-3 对称平面和迭合平面

如果物体全部处在第一象限内，那末正面投影总是在水平轴线的上面，而水平投影总是在水平轴线的下面。在空间关系的作图过程中，也许会碰到从其他象限来的一些点。例如点 A, B, C, D 分别在 I, II, III, IV 象限内(见图 9.2-2)。这些点对水平轴的距离满足下列不等式：对于 A 点：d_1, $d_2>0$；对于 B 点：$d_1>0$, $d_2<0$；对于 C 点：d_1, $d_2<0$；对于 D 点：$d_1<0$, $d_2>0$。对于其水平投影（或正面投影）处在水平轴线上的那些点，有 $d_2=0$（或 $d_1=0$）。对称平面 σ（或迭合平面 $\varkappa$）上所有的点满足

方程 $d_1=d_2$（或 $d_1=-d_2$）（见图9.2-3）①。两面投影法中的两个投影平面在绘图板上彼此重迭。通过一个适当的配合，把平面几何作图法运用到物体两面投影中去，就能解决空间物体的作图问题。不要将水平轴线 x_{12} 看成是水平投影和正面投影的分隔线。它表示在未旋转到绘图板面之前两个投影平面的交线位置。

直线和平面的表示法

直线的表示法　一条直线 l 的投影 l' 和 l'' 是由它上面两个点的投影唯一地确定。对于平行于 Π_1 的 h_1 线（称第一主直线），它的正面投影 h_1'' 和水平轴线 x_{12} 平行。对于平行于 Π_2 的 h_2 线（称第二主直线），它的水平投影 h_2' 也和 x_{12} 平行。不与水平轴线相交，并且又不是主直线的任意直线的位置是由它的迹点即它与 Π_1 和 Π_2 的交点所决定。这里 $L_1=(l\frown\Pi_1)$ 称为第一迹点，$L_2=(l\frown\Pi_2)$ 为第二迹点（见图9.2-4）；L_1'' 和 L_2' 都处在 x_{12} 上。该直线 l 的两个投影 l'' 和 l' 的交点 $K'=K''$，它是直线 l 和迭合平面的交点 K 的标记。对于垂直于 Π_1 的直线 l（称第一投射线），这时 $l'=L_1$；对于垂直于 Π_2 的直线 l（称第二投射线），这时 $l''=L_2$。我们说两条直线 p 和 q 如果在空中交于一点 S，就得当且仅当交点 $1'=(p'\frown q')$ 和 $2''=(p''\frown q'')$ 是处于蒙葱位置时，两线才是真的相交，这时 $S'=1'$，$S''=2''$。否则两直线 p 和 q 是交叉而不是相交的（见图9.2-5）。

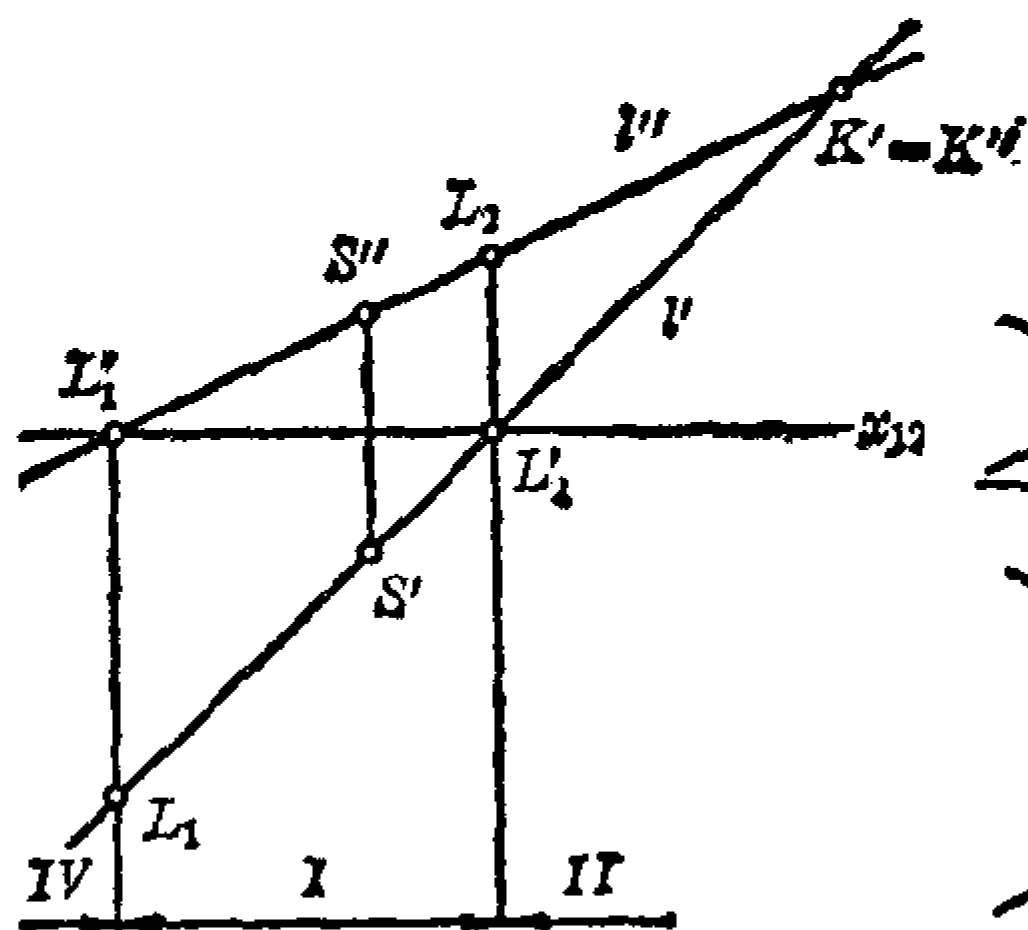


图9.2-4　直线 l 的二投影和它的两个迹点，当 $d_1=d_2$，$K'=K''$，则 K 点处在迭合平面上

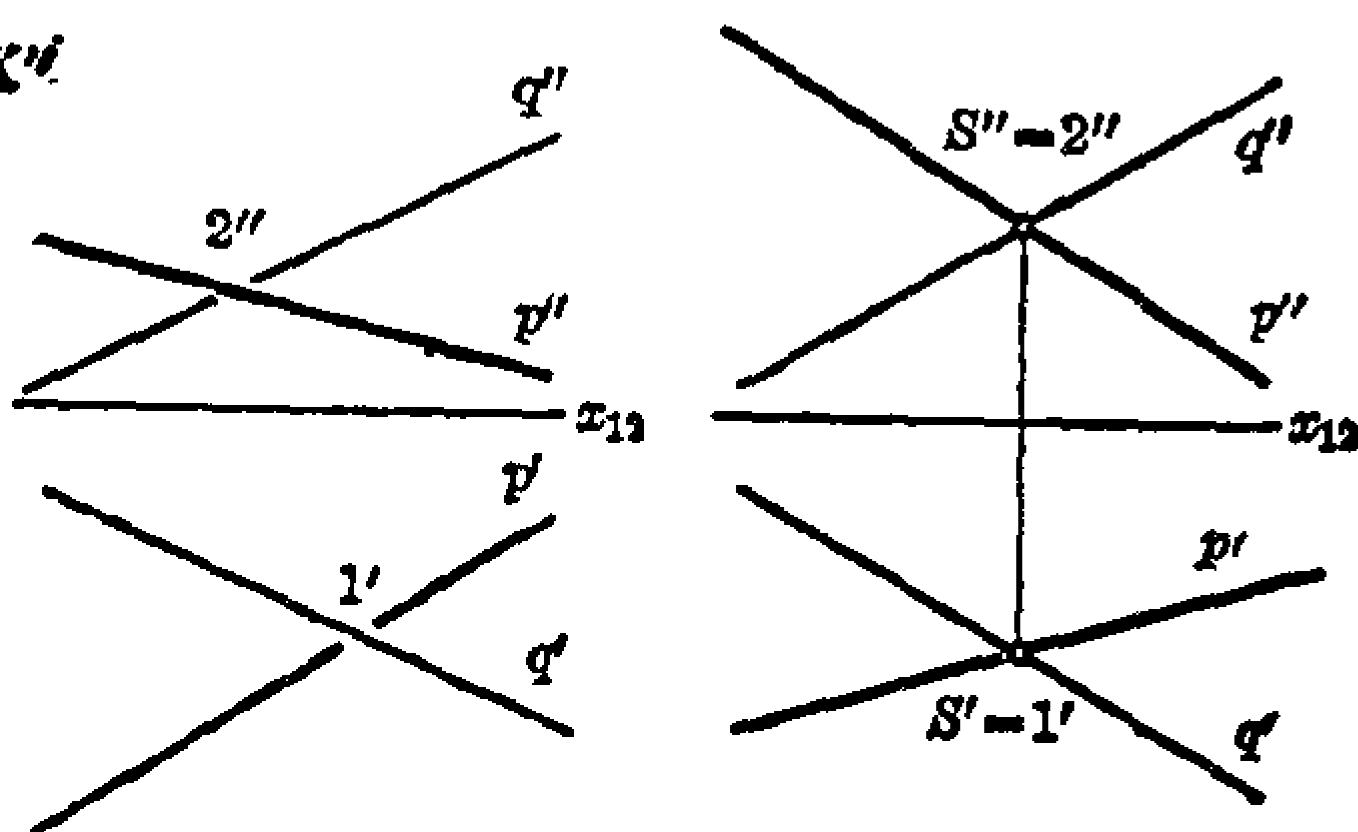


图9.2-5　一对交叉直线和一对相交直线

① σ、$\varkappa$ 与 $\Pi_1\Pi_2$ 斜交，交角均为45°。——译者注

平面的表示法 一平面E的位置可用两条相交直线来确定。例如直线p和q相交于P点(见图9.2-6)，P_1，P_2和Q_1，Q_2是它们在Π_1和Π_2

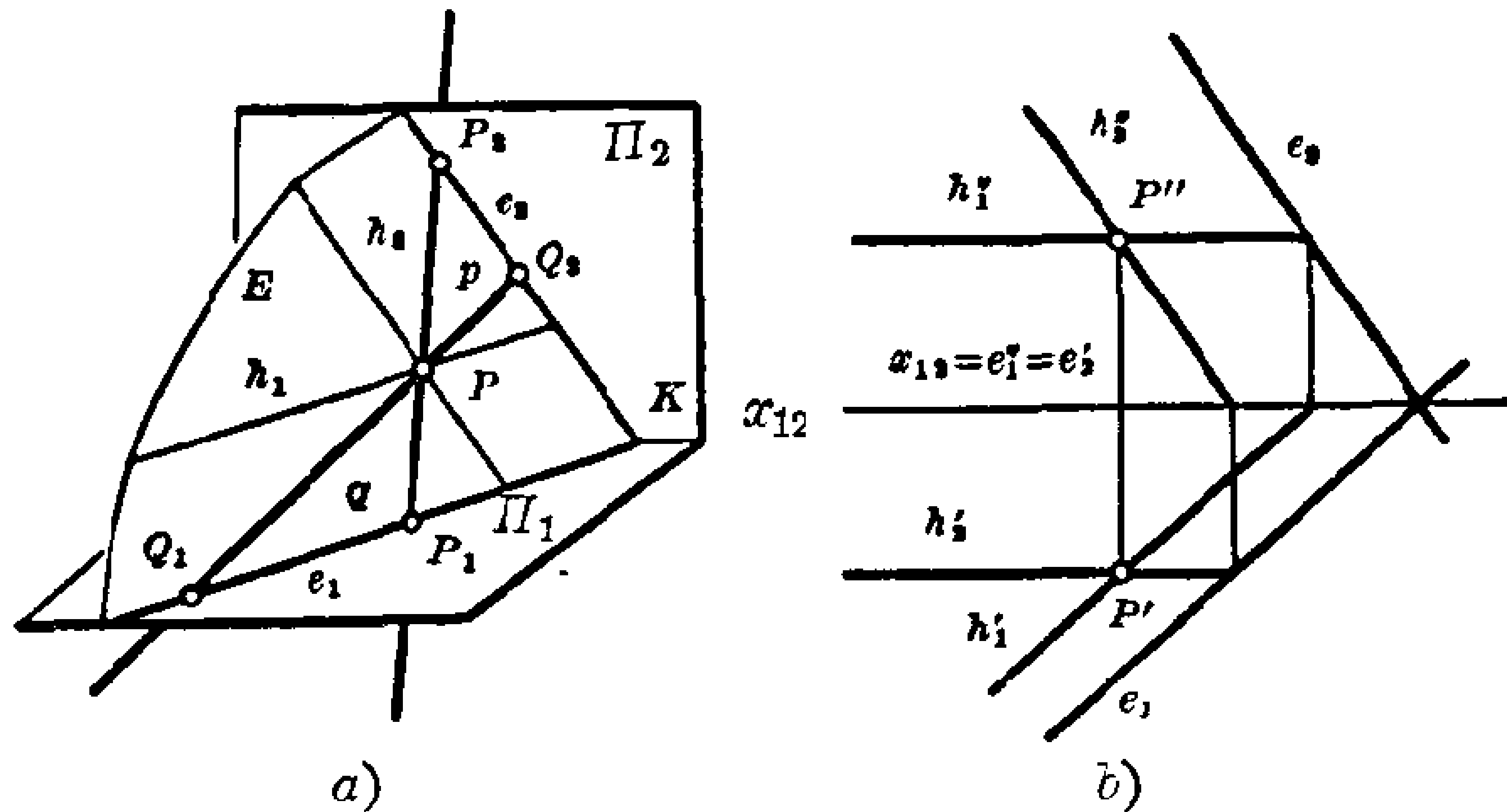


图9.2-6 平面表示法与P点阵：a) 斜轴测图；b) 直角坐标系投影

上的迹点，那末直线$e_1=P_1Q_1$和$e_2=P_2Q_2$在平面E内。同时，e_1在Π_1内，e_2在Π_2内。这两根直线e_1和e_2是该平面在Π_1和Π_2上的两迹线，它们能从p和q的相应迹点作出。迹线e_1和e_2在水平轴线x_{12}上相交于K点。

给定平面上的**主直线**或**迹线平行线**作为一种辅助工具，对作图是有用的。第一主直线，第一迹线平行线即**等高线**和e_1平行；第二主直线，第二迹线平行线即**正面平行线**和e_2平行。例如可以很容易确定由P'和P''决定的P点是否在由e_1和e_2所决定的平面E内。因为如果E的第一主直线h_1的正面投影h''_1通过P''，那末这一主直线的水平投影h'_1就能唯一地确定。如果P'在按照

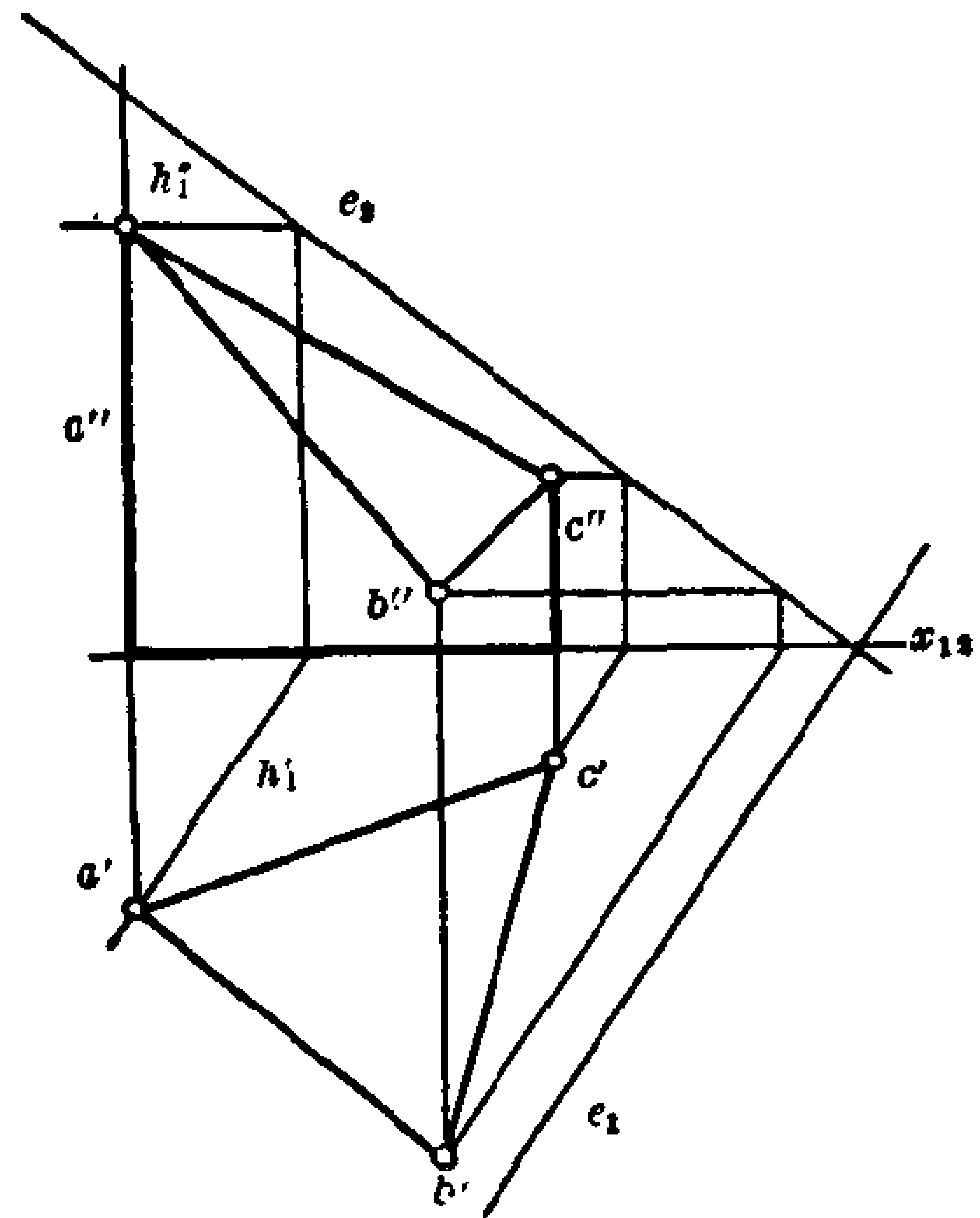


图9.2-7 用第一主直线的格解决棱柱与平面的截面

这样的方法画出的h'上，则P是E上的一点。否则P就不在这平面E上。这里所描述的模式称为P的点阵。这点阵也可能适用于E面上的任意直线。例如用点阵可以作出一垂直于Π_1的棱柱与一平面相交的截

面，交点 a, b, c 的水平投影和 a', b', c' 重合。用点阵和借助几条第一主直线，就可以找到交点的正面投影（见图 9.2-7）。平面的倾斜线与等高线相交成直角，并面向该平面与水平面所成夹角的最大倾斜方向。因此它们的平面（水平）投影和等高线的平面（水平）投影垂直。

平面 E 的具体位置可用迹线 e_1 和 e_2 的位置来表示。对于垂直于 Π_1 的**第一投射面**，呈 $e_2 \perp x_{12}$。对于垂直于 Π_2 的**第二投射面**，呈 $e_1 \perp x_{12}$。对于一个**第一又是第二的投射面**，则它的两条迹线都和 x_{12} 垂直。如把这一面作投影面，可得到物体的**侧面投影**，用来补充实物的水平和正面二投影。对于**乐谱架平面**（平行水平轴的斜面），e_1 和 e_2 与水平轴平行。如果它们和水平轴线重合，则此平面包含这条水平轴线，这时只能用该面上两条主直线的两对投影来表示该平面。

如果一平面中的三角形 ABC，它的水平投影和正面投影具有相同的转向意识，则称此平面是**顺向的**。如果三角形的两个投影的转向意识相反，则称此平面是**交替的**。

从相应的正投影来确定它的实形　A, B 两点之间的距离等于沿直线 $l=AB$ 量得线段 AB 的长度。如果 l 是相对投影面上的一条主直线，那末它的正投影反映了该线段的真实长度。例如 Π_1 中的 h_1 和 Π_2 中的 h_2。如果 A, B 是处于一条一般位置的直线 l 上，那末可以把第一或第二投射线为旋转轴，将直线旋转，使它对于相应的投影面处于上述的一种新位置。例如 l 可绕通过 A 点的第一投影线 a 旋转到第二主直线的位置（见图 9.2-8）。如果 C 是 B 点到 a 的垂足，那末直角三角形 ABC 可以绕边 $|AC|=|A''C''|$ 旋转。另一条边为 $|CB|=|A'B'|$。B 点在空间一条平行于 Π_1 的圆弧上移动，这是一条以 C 为圆心、$|A'B'|$ 为半径的圆弧。在 Π_2 中，B'' 点在过 B'' 且平行于水平轴线 x_{12} 的直线上向 $B^{*''}$ 点移动，这 $B^{*''}$ 点是由 $|B^{*''}C''|=|A'B'|$ 所决定（见图 9.2-9）。除了给出真长 $|AB|$ 外，此图还给出了直线 $l=AB$ 对于水平面 Π_1 的第一倾角 α_1，$\alpha_1=\measuredangle AL_1L_2'=\measuredangle ABC=\angle A''B^{*''}C''$。同样，$l$ 对于 Π_2 的第二倾角 α_2 也能用绕垂直于 Π_2 的第二投射线旋转来取得。

平面图形的实际形状　可将它旋转到平行于一个投影面的位置来决定。很自然，可采用图形平面的第一或第二主直线作为旋转轴。

【例】　一给定三角形 ABC 的实际形状可从它的水平投影和正面投影，以绕过 A 点的第一主直线 h_1 为轴把它旋转到平行于水平面的位置

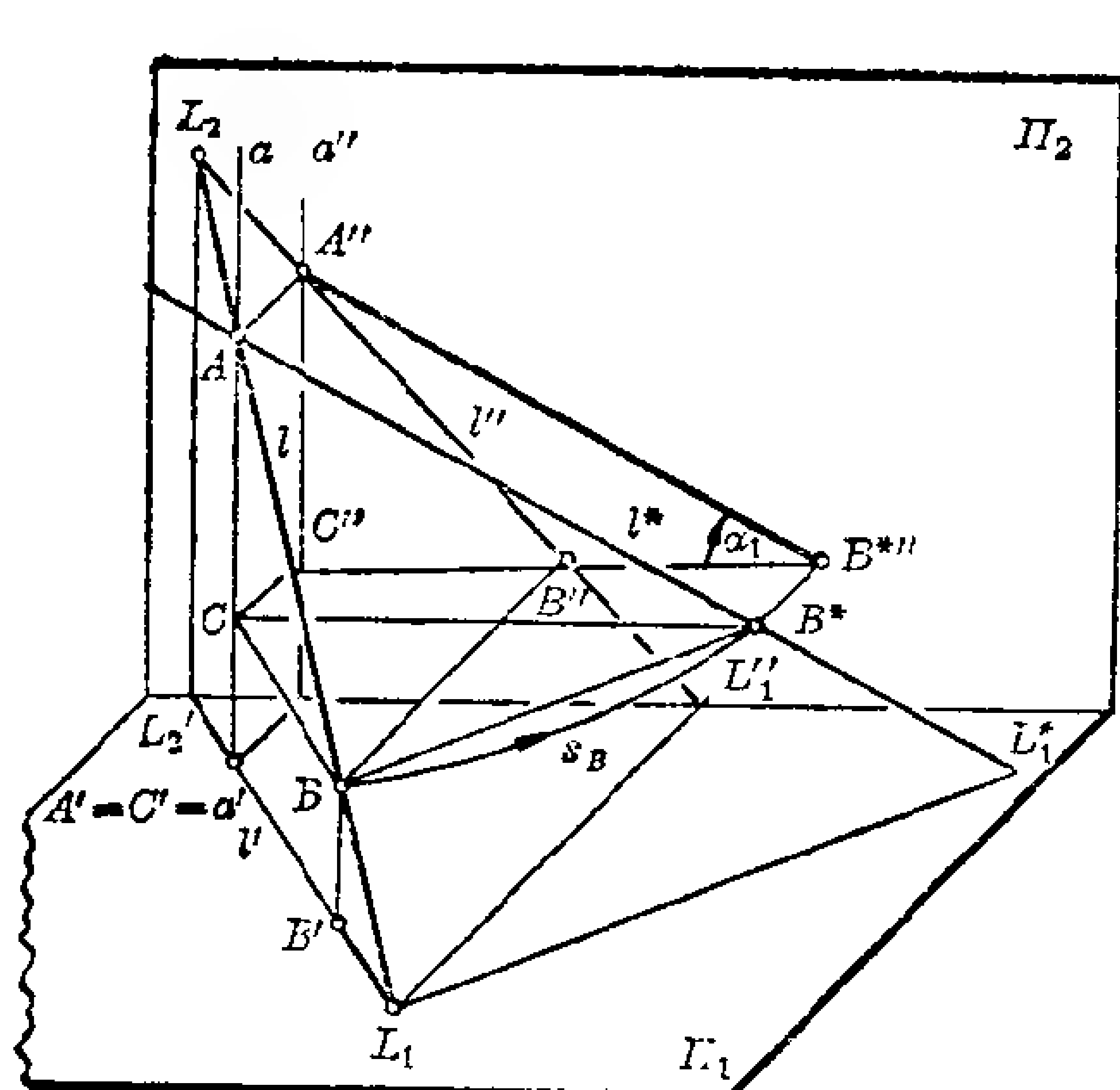


图 9.2-8 求空间两点之间距离的斜轴测图

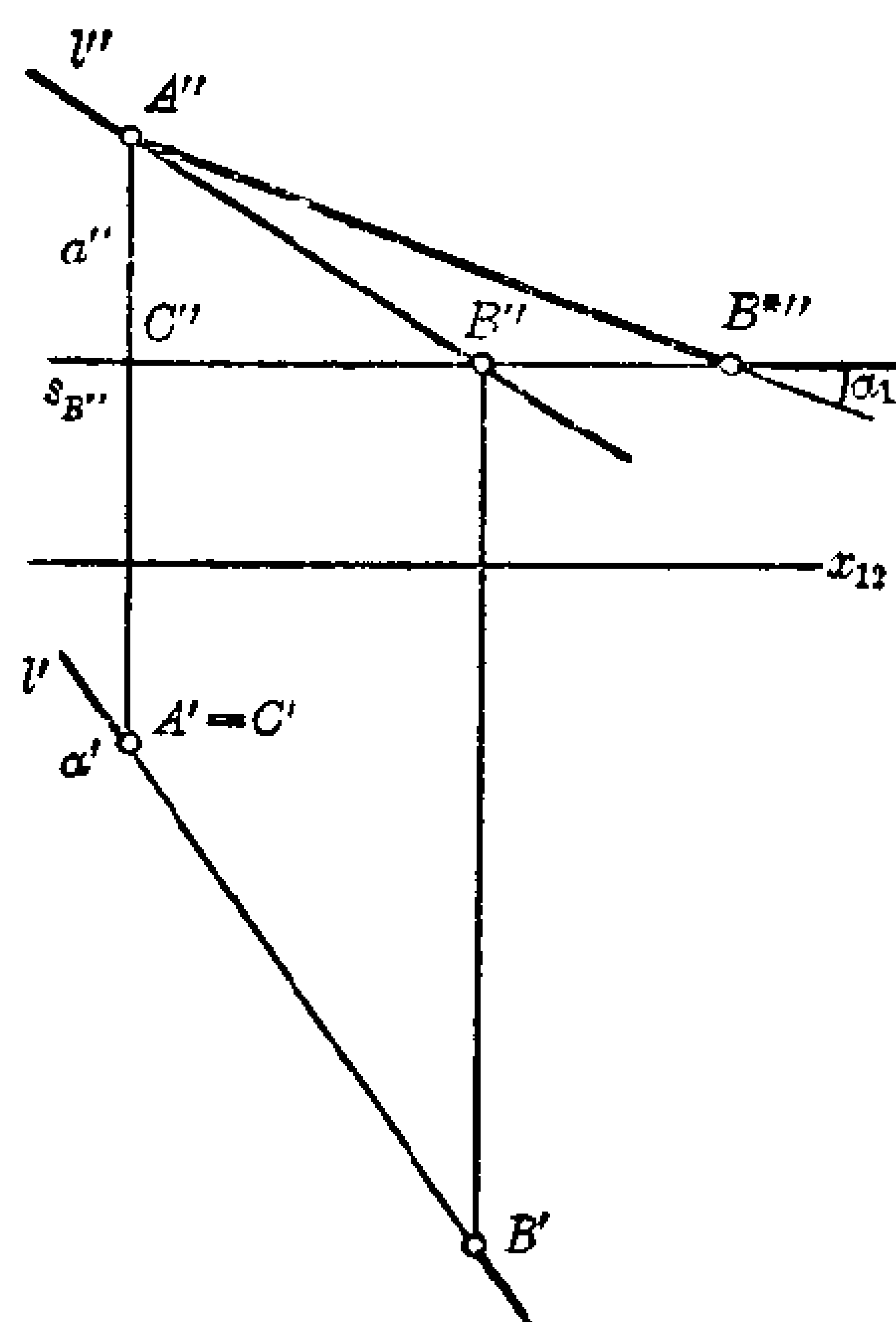


图 9.2-9 用平行旋转法求距离(示意)

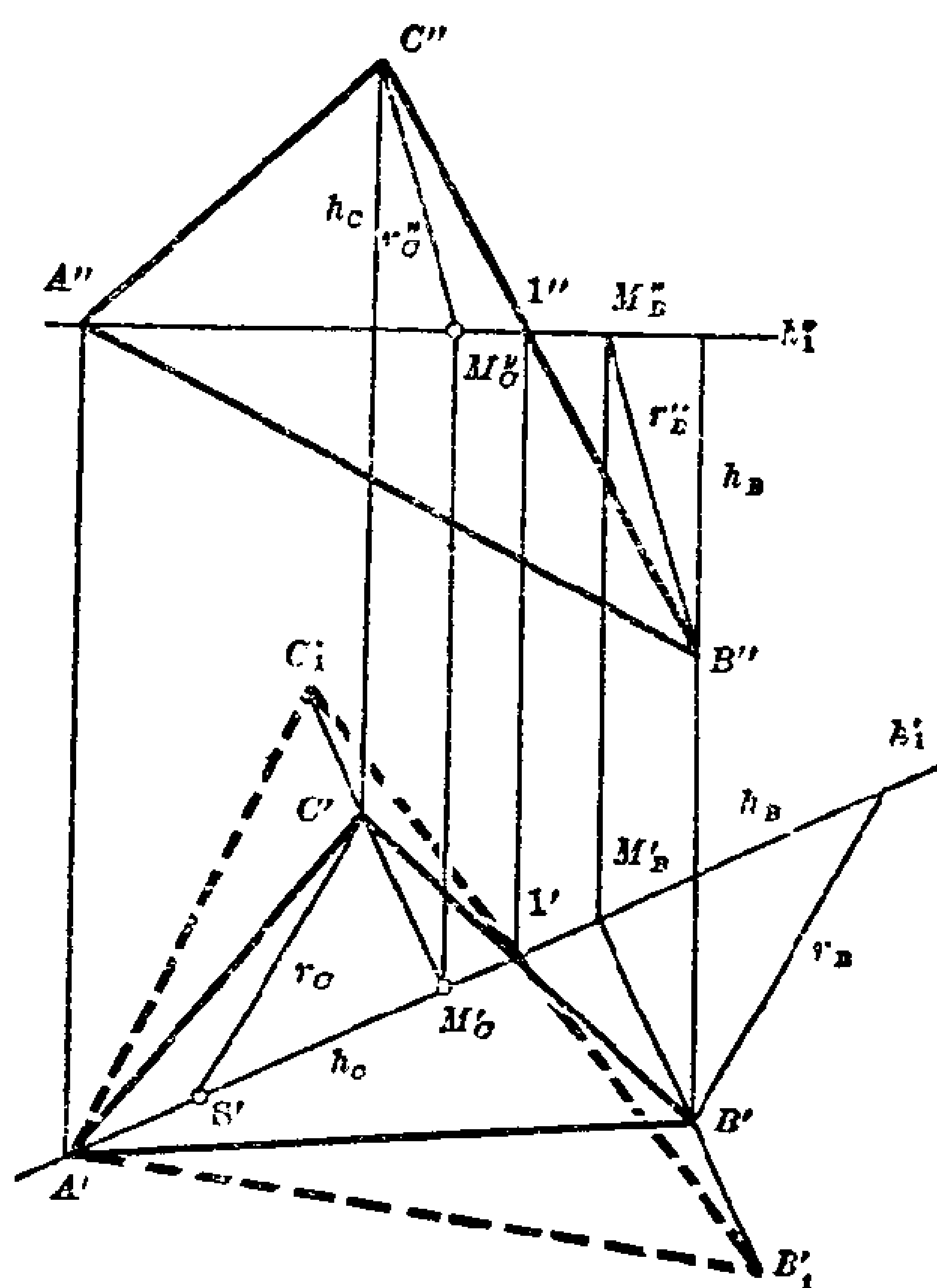


图 9.2-10 用重复圆规法来确定平面图形的实际形状

来确定。旋转时，A 点保持不动，而 B 点和 C 点在空中各画了一条圆弧，这两条圆弧所在的平面都以旋转轴 h_1 为公共法线（见图 9.2-10）。C 点画出的一条弧的半径 r_C 是一个直角三角形的斜边，该直角三角形的直角边为 $|C'M'_C|$ 和 h_C，这里 M'_C 是 C' 到 h'_1 的垂足。线段 h_C 是取自它的正面投影 r''_C。如果以 M'_C 为起点，沿着 h'_1 量 h_C 长就得到另一个端点 S'，那末 $|S'C'|=r_C$。在过 C' 点垂直于 h_1 的柱线上，以 M'_C 为起点量取这一线段长为 r_C 即得 C'_1 点，这就是 C 点绕 h_1 旋转后所得到的投影位置。对 B 点也可作同样的处理。

由于在这种方法中，经过将要旋转的点的柱线和主直线垂直外，还有两段距离必须用圆规量取，所以此法被称为重复圆规法。为了检查所画的图形是否正确，应该验证直线 $B'C'$ 和 $B'_1C'_1$ 是否交于旋转轴 h_1 上一点。这种确定平面图形实际形状的方法也可用来确定空间两相交直线之间的夹角。

透视仿射

如果将空间一任意平面图形绕它的一条迹线旋转到该迹线所在的投影平面上，那末所得到的图形与原形在同一投影平面上的正投影之间的关系是**正交透视仿射**关系。例如三角形 ABC（见图 9.2-11）给出的正投影 $A'B'C'$ 和它绕 e_1 旋转到 Π_1 上的三角形 $A_1B_1C_1$。在这种映射法中，迹

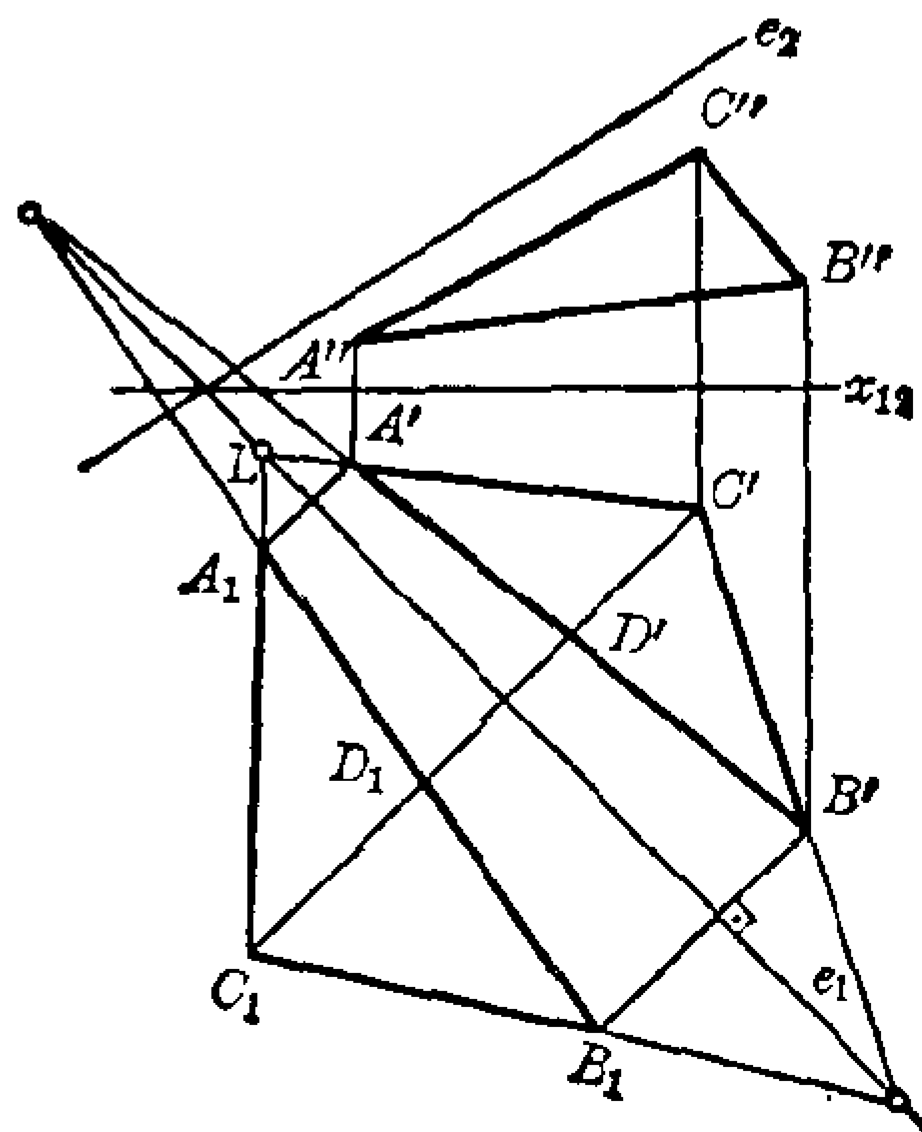


图 9.2-11　平面图形的水平投影和旋转所得图形之间的透视仿射关系

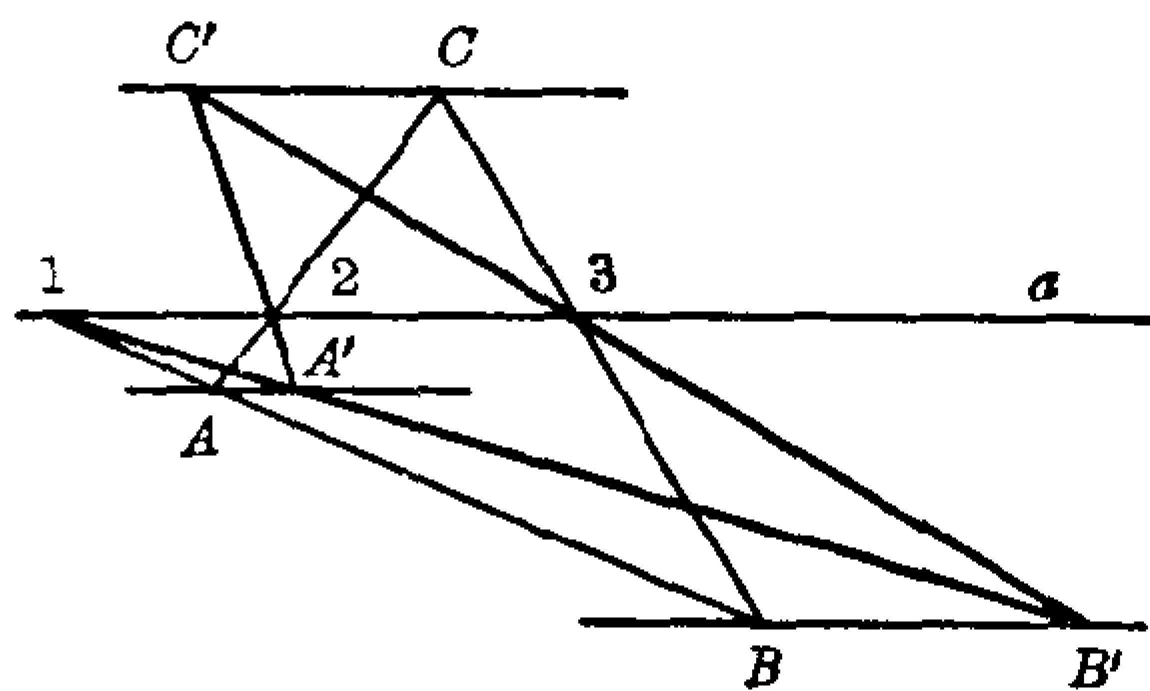


图 9.2-12　以 a 为仿射轴的切变或等价透视仿射

线 e_1 是仿射轴。从原始点到象点间各仿射射线如 $A'A_1$，都是互相平行的，仿射的方向垂直于仿射轴 e_1。在直线 l' 形成了直线 l_1 之下，原始点和象点之间的对应是一一对应的，并且是线性的。直线 l' 和 l_1 交于仿射轴的 L 点，轴上每一点映射到它的本身。平行的直线还是平行的直线，并且同一条直线上三个点间的分段也不变，例如 $|A'D'|:|D'B'|=|A_1D_1|:|D_1B_1|$。一对任意点的联线的比例是由仿射轴来分割的，这现象称为透视仿射的特性。

在偏斜或一般的透视仿射中，仿射方向可与仿射轴成任何一种角度。

在切变或等值透视仿射中，仿射射线与仿射轴平行(见图 9.2-12)。

平面内的透视仿射对应是由仿射轴以及一对处于对应的点唯一地确定。

在绘图板上，一平面图形的水平投影和正面投影之间有着一个透视仿射的关系。所有点的柱线，例如 $D'D''$ 给出了仿射的方向。平面图形中任何一条直线 l 的投影 l' 和 l'' 交于绘图板内一条直线 s 上的一点，这条直线就是透视仿射投影的仿射轴。迭合平面 $\varkappa$ 和图形平面 E 的交线 $k=(\varkappa\frown E)$ 的水平投影和正面投影与这条直线重合，即 $k'=k''=s$ (见图 9.2-13)。

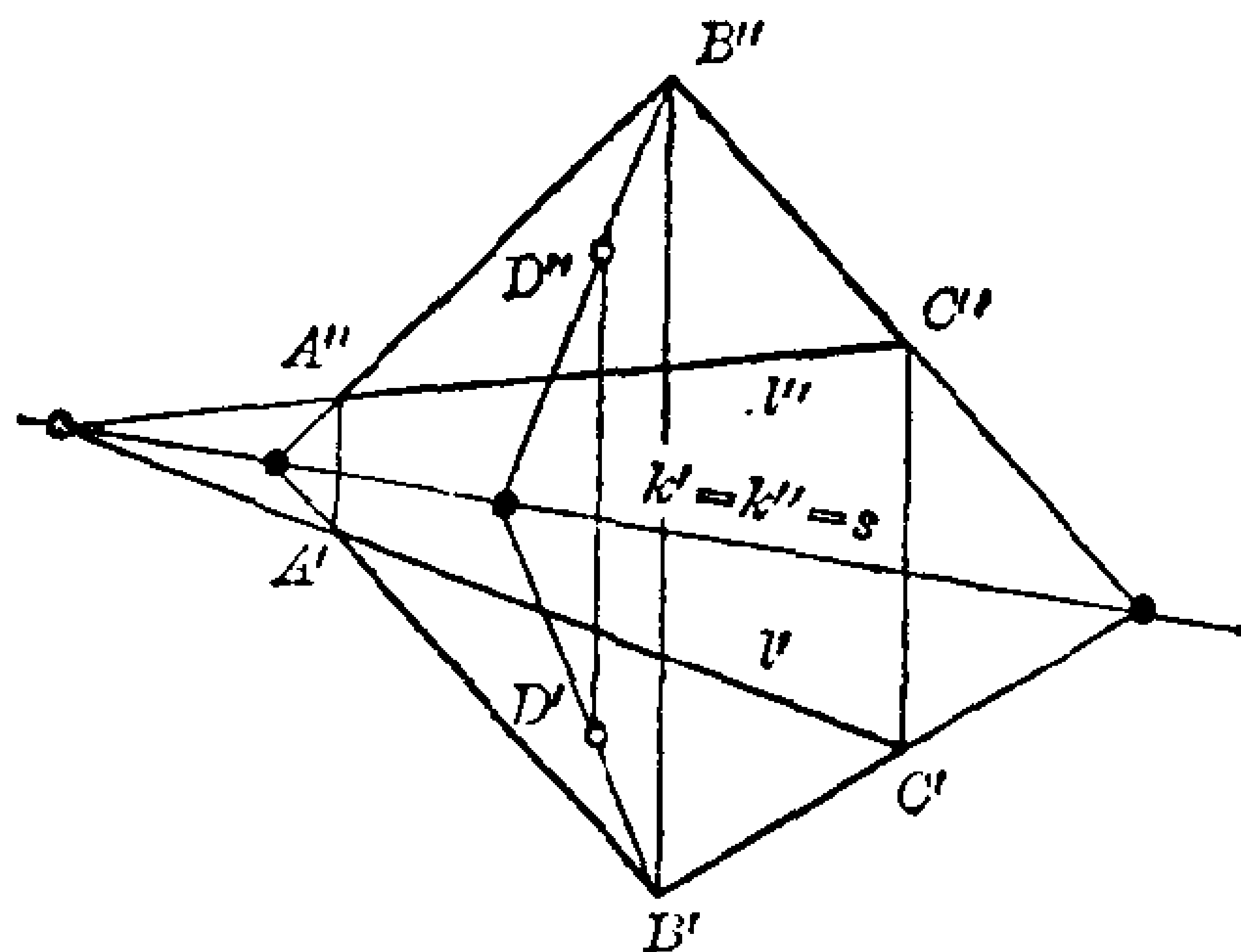


图 9.2-13 平面图形的水平投影和正面投影的透视仿射

在平面图形的水平投影和正面投影之间有一透视仿射点的联系。仿射射线和柱线重合，仿射轴 s 与绘图板内迭合线 k 的同一投影重合。

这一几何性质可用于作图，例如可画出平面内一点 D 的点阵。

椭圆可看成是圆的透视仿射图象 以 C 为圆心的一个圆的透视仿射由仿射轴 s 和圆心 C 的象 C' 所决定，仿射方向是 CC'。由于任何一条直线和它的象在仿射轴上相交，故任何一点 P 的象可用两条直线的交点来

作业。例如 P 的象 P' 可根据 $CC' \parallel PP'$ 及 $(CP\frown s)=(C'P'\frown s)$ 这两个条件来作出。

圆的两条互相垂直的直径，它们在对应的椭圆内构成一对共轭直径（参见 I.第7章和 II.第12章），如 $PR\perp QS$ 的象 $P'R'$ 和 $Q'S'$。由于平行线仿射后还是平行线，以及分割的线段比不变，因此在平行弦和平行切线之间存在着重要的关系。

椭圆的一条直径平分所有与它的共轭直径平行的弦。椭圆一直径两端点的切线与它的共轭直径平行。例如 $P'R'$ 平分平行于 $Q'S'$ 的弦，P' 和 R' 处的切线平行于 $Q'S'$。

在这些共轭直径中，只有一对是正交的。这就是椭圆的长径和短径（或长、短轴）。如果 K_1 和 K_2（见图 9.2-14）是它们与仿射轴 s 的交点，那末 C 和 C' 都在以 K_1K_2 为直径的圆上。它的中心 N 在线段 CC' 的垂直平分线和 s 的交点，半径是 $|NC|=|NC'|=|NK_1|=|NK_2|$。

有了仿射轴 s 和 C, C' 这一对点，就足以作出圆 $\varkappa$ 到椭圆 $\varkappa'$ 的仿射变换。轴 s 交 CC' 于 C_0，交 PP' 于 P_0。如再要作出任意一对点 X, X'，要使用仿射关系的特性（见图 9.2-14, 9.2-15）：$CC' \parallel PP' \parallel XX'$ 及

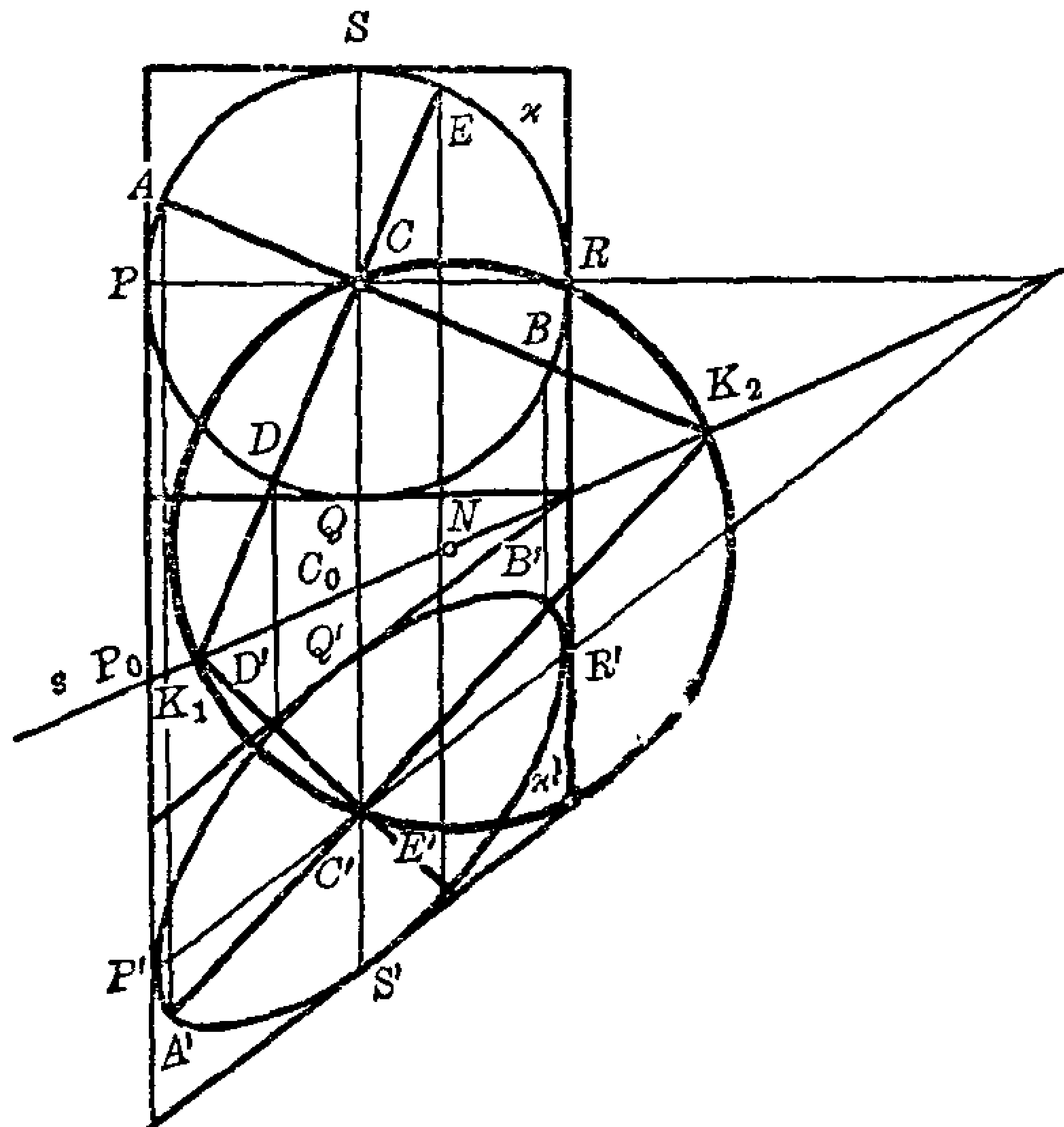


图 9.2-14　椭圆是圆的透视仿射图象

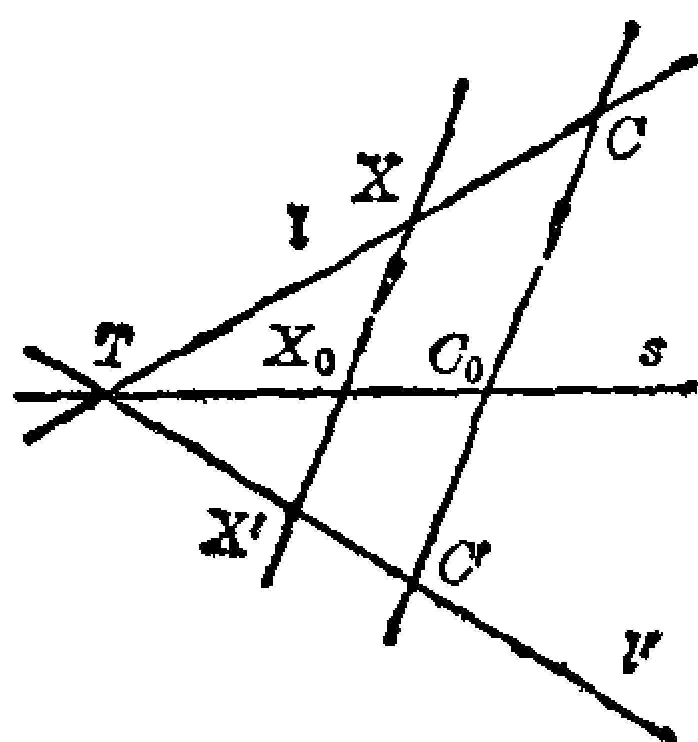


图 9.2-15 透视仿射直线的分割比例

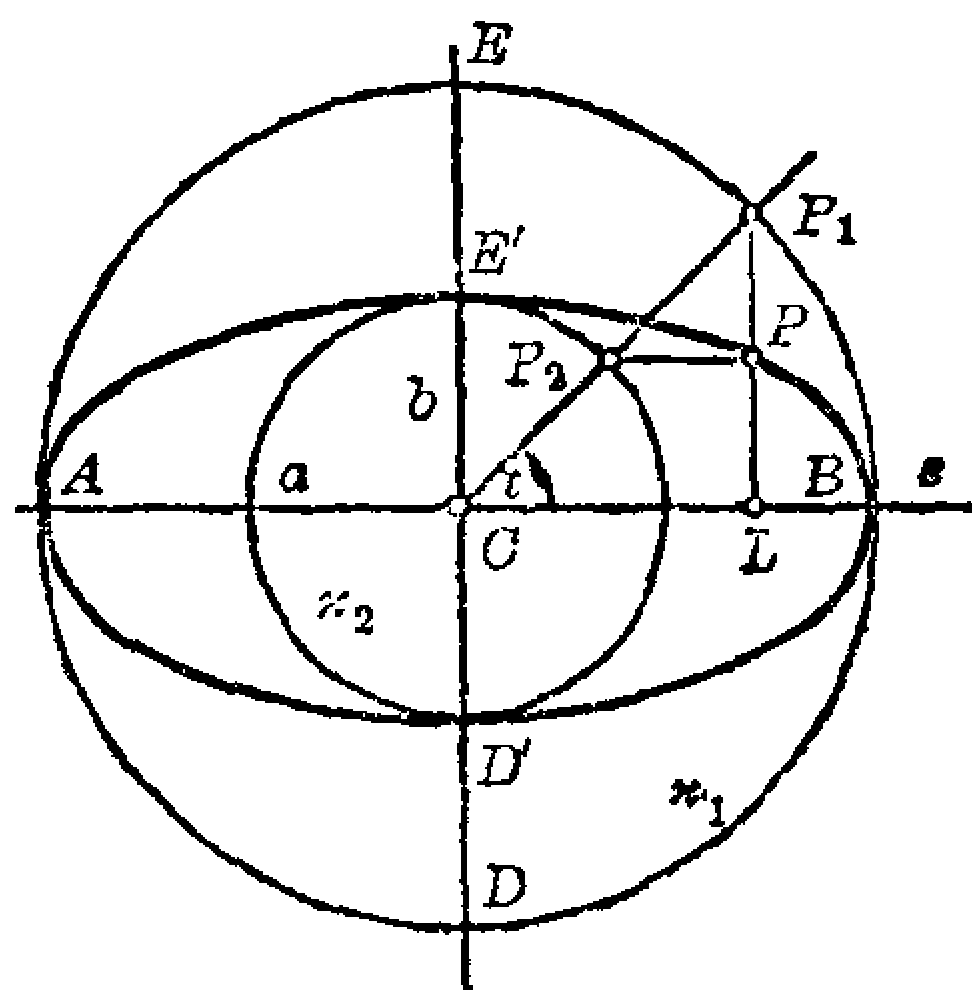


图 9.2-16 椭圆的双圆作图法

$|PP_0|:|P'P_0|=|CC_0|:|C'C_0|=|XX_0|:|X'X_0|=k$，这里 k 是仿射比率。

为了用直尺和圆规作出椭圆上的一些点可应用**正交仿射变换**，以椭圆的长轴作为仿射轴，而以短轴作为仿射的方向。在这种变换中，长轴上的顶点 A，B 保持不动；而短轴上的顶点 D' 和 E' 是 D 和 E 的象（见图 9.2-16）。仿射比率由 $k=|CD'|:|CD|$ 给出。因此椭圆是以 C 为圆心、$|CA|$ 为半径的圆 $\varkappa_1$ 的仿射象。从 $\varkappa_1$ 和椭圆之间的仿射关系，可以很容易地得出椭圆的如下作法：再作一个以 C 为圆心、$|CD'|$ 为半径的圆 $\varkappa_2$，在 $\varkappa_1$ 上任选一点 P_1，直线 CP_1 交 $\varkappa_2$ 于点 P_2。从 P_1 点作 s 的垂线，过 P_2 作 s 的平行线，则这个垂线和平行线正好交于椭圆上的一点 P。

证明：根据作图 $|CD'|:|CD|=|CP_2|:|CP_1|=|LP|:|LP_1|=k$。因为仿射方向和 s 垂直，P 是 P_1 的象。椭圆的这种作法称为**双圆作图法**（或同心圆法）。还有另外一些作椭圆的方法（参见 I. 第 7 章），并可以导出椭圆的一种参数表示法（参见 I. 第 13 章——椭圆方程）。

侧面投影①、旋转和立体的表示法

借助坐标正投影的上述基本作图法常用来表示空间物体。现举例说明如下：

【例 1】 从对于投影平面处于特殊位置的八面体的水平投影和正面

① 本节所介绍的内容全属投影改造，不是一般的“侧面投影”。——译者注

投影出发，用两个侧面投影可以得出它在一般位置的表示方式。例如点 $1'''$ 到 x_{23} 的距离等于 $1'$ 到 x_{12} 的距离，1^{IV} 到 x_{34} 的距离等于 $1''$ 到 x_{23} 的距离(见图 9.2-17)。除去投影线和面，可得到这个立体的逼真图象。然而，从这种投影直接得出该立体的各个尺度就不再可能了。侧面投影除了能对一物体的形状有一大概的描绘外，它还被当作制图的一种基本方法。

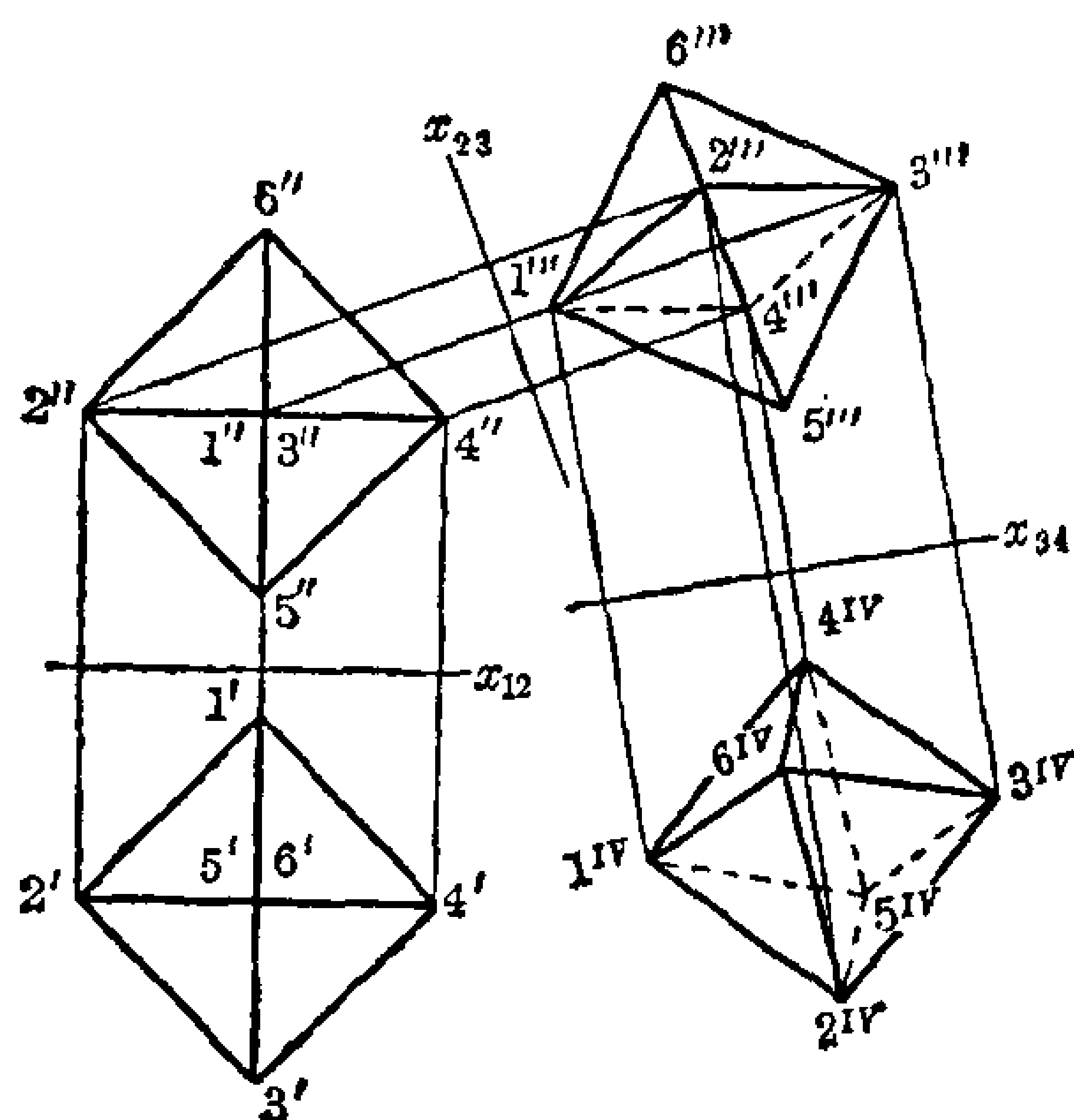


图 9.2-17 八面体的水平投影、正面投影和侧面投影

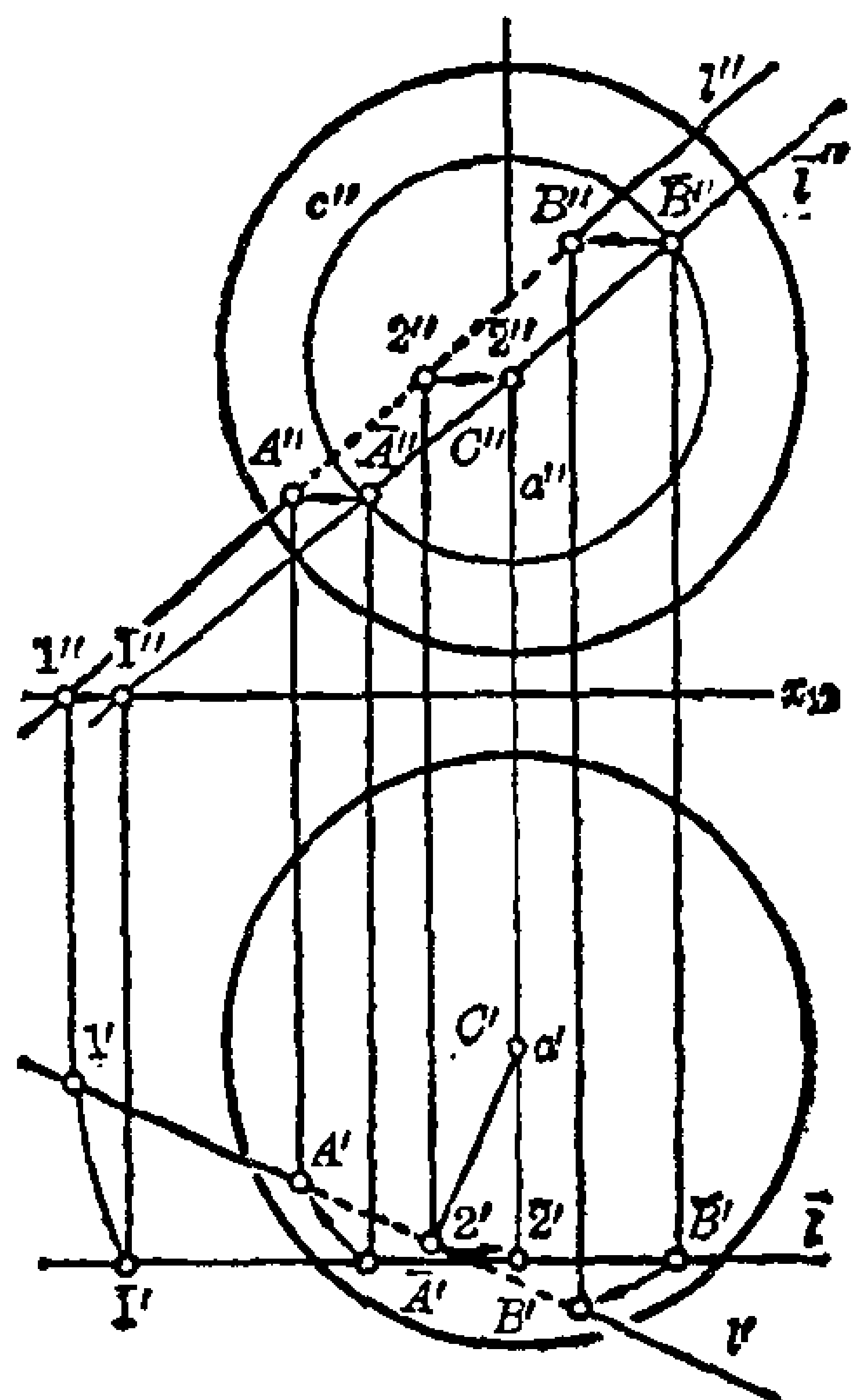


图 9.2-18 直线和球面的交点:应用立体旋转是制图的一种基本方法

将点转换到一新的侧面投影上去是按照下面的规则来进行的:

要被替代的原投影中各点离开要被替代的原水平轴的各个距离，沿对应的柱线转换成新的诸投影点到新的水平轴线的各个距离。

【例 2】 一条直线和一球面的交点可用旋转的方法作出。

选择球面的第一投射直径 a 作为旋转轴(见图 9.2-18)。直线 l 绕 a 旋转，因此 l 最后的位置 $\bar{l}$ 和 Π_2 平行。在 l 上适当选择的两点 1 和 2 旋转成 $\bar{1}$ 和 $\bar{2}$，而球面还是它本身。通过 $\bar{l}$ 的第一投射面 Γ 和球面相交成一圆 c，它的正面投影就是它的真实形状。因而 c'' 和 $\bar{l}''$ 的交点 $\bar{A}''$ 和 $\bar{B}''$ 是 $\bar{l}$ 和球面交点的正面投影。通过 $\bar{A}''$ 和 $\bar{B}''$ 与水平轴线平行的线交于 l'' 于 A'' 和 B''，这就相当于将正面投影向相反方向旋转。l 和球面交点

A 和 B 的水平投影可用过 A'' 和 B'' 的柱线来找到。

【例 3】 用第一和第二主直线可以作出过球面给定点 P 的切面。由于切面 T 垂直于过 P 点的半径 r_P，因此在 P 点相交的 T 的两条主直线 h_1 和 h_2 与 r_P 成直角（见图 9.2-19），故 $\sphericalangle h_1'r_P'=\sphericalangle h_2''r_P''=90°$。由于 h_1'' 和 h_2' 与水平轴线平行，因此由主直线 h_1 和 h_2 所控制的切面的迹线 e_1 和 e_2 就可以作出。

【例 4】 求一直线 l 和一锥面相交的交点，锥面的顶点 Z 以及在 Π 面上的曲迹线 s 为已知。解题的方法可以从斜轴测图中看出（见图 9.2-20）。通过 Z 和 l 的平面 Γ 在 Π 上的迹线 c，如果 c 和曲迹线 s 相交于 P_1, P_2, P_3, P_4 点，那末直线 ZP_1 等都是锥面在 Γ 平面内的诸母线。因此，它们和 l 的交点 1, 2, 3, 4 也就是 l 和锥面的交点。

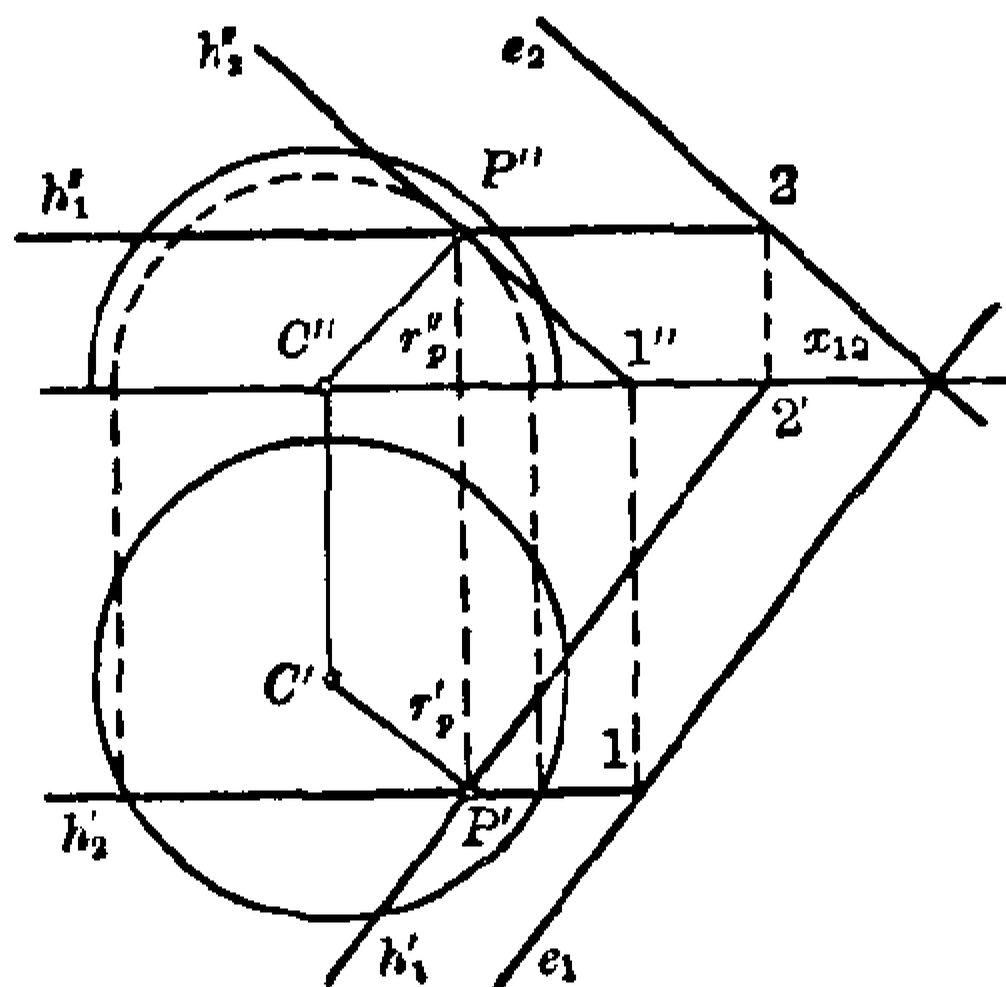


图 9.2-19 球面的切面

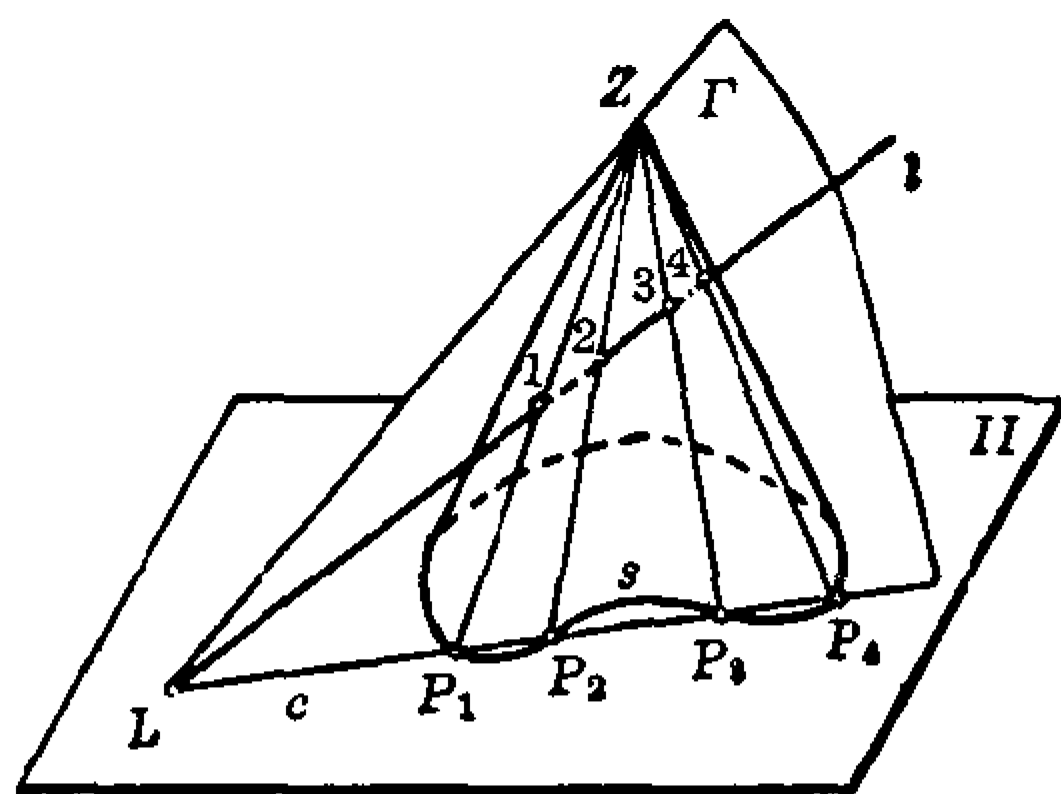


图 9.2-20 直线和圆锥面交点的斜轴测图

【例 5】 作一转动后的圆锥体，使它的底圆在由迹线 e_1 和 e_2 决定的平面 E 内。锥体的高度 h，底圆半径 r 和底圆圆心 C 的水平投影 C' 均为已知（见图 9.2-21）。作此图可分成下面几步：1. 借助第一和第二主直线，从 C' 作出 C 的正面投影 C''。2. 底圆直径的实长反映在水平投影中的主直线 h_1' 以及正面投影中的 h_2'' 上，$|A'B'|$ 和 $|P''O''|$ 是两个投影椭圆的长轴。3. 利用柱线在 h_1'' 上作出 A'' 和 B''，在 h_2' 上作出 P' 和 O'。4. 用纸片作图法作出投影椭圆的短轴，从而作出作为锥体底圆投影的这两个投影椭圆。5. 在过 C 垂直于 E 的垂线 l 上（它的投影 $l'\perp h_1'$ 和 $l''\perp h_2''$），任取一点 $N\neq C$，C 点保持不动，旋转 CN 使它和 Π_2 平行。6. 如果

CN_2 是旋转后所处的位置，从 C'' 点起沿 $C''N_2''$ 取一线段 $C''Z_2''$ 等于 h；过 Z_2'' 点的水平线与 $C''N''$ 交于 Z''，Z'' 即为圆锥面顶点的正面投影，过此点的柱线便能给出水平投影 Z'。7. 从 Z' 和 Z'' 作相应的底圆投影的切线，例如可用透视仿射法来作。这就作出了此转动后的圆锥体的所需投影。

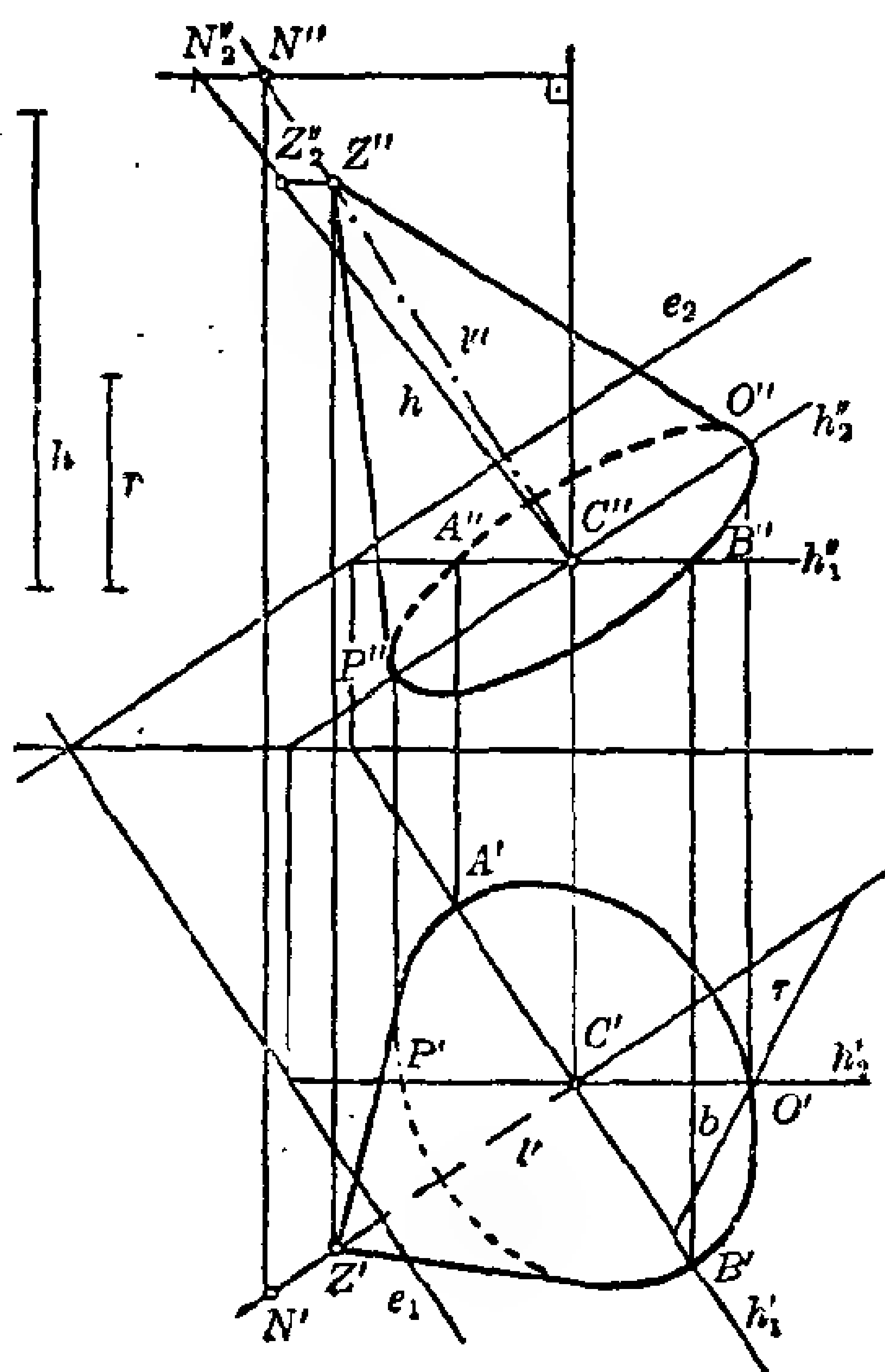


图 9.2-21 在一给定的底平面上作转动后的圆锥体

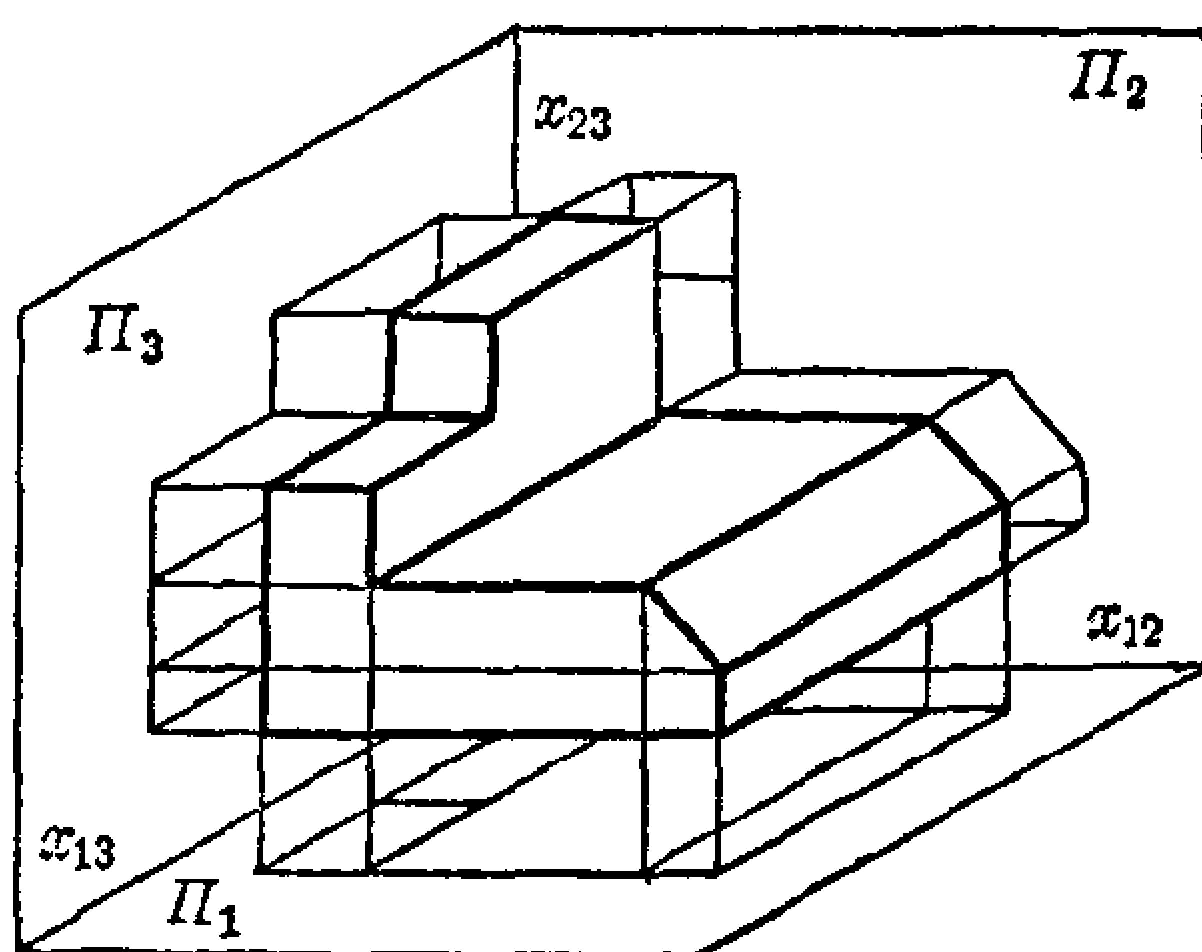


图 9.2-22 空间物体水平投影、正面投影和正侧面投影的斜轴测图

六个主要投影 如果投影面 Π_3 垂直于 Π_1 和 Π_2，则在此面上的“侧面”投影称为是**正侧面投影**(见图 9.2-22)。它的交线 x_{12}, x_{23} 和 x_{13} 在空中互相垂直。该图表明不是每一个空间物体都能由水平投影和正面投影表达清楚。

组成一个立方体有六个面，一般说来，可将一个物体分别垂直投影到这六个面上(见图 9.2-23)，这样获得的六个主要投影是按欧洲对空间物体的表达方法。在安排这六个投影的位置关系时，美国的办法是不同的，与欧洲正好相反。

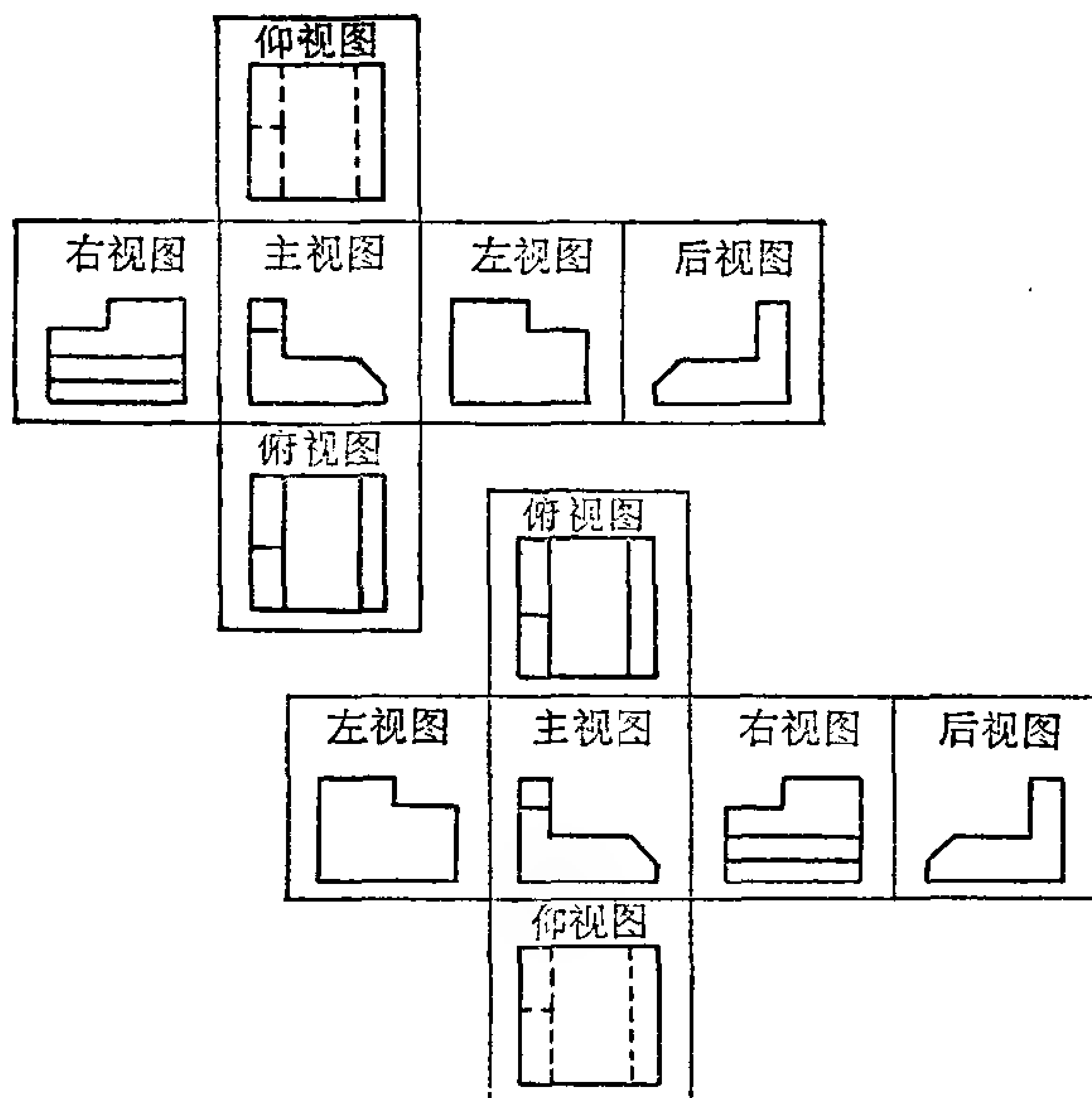


图 9.2-23 欧洲和美国的六个主要投影图的位置安排

9.3 另外一些图示方法

标高投影——单投影面法

在标高投影中，从空间一点 P 投到受影面上 P 点是由垂直于投影平面 Π 的投射线完成的。它的距离 $k=|P'P|$ 用固定的长度单位 e 来测量，记作高度。通常平面 Π 取为水平的，在它上面的半个空间作为正的，$k>0$。直线 l 的投影 l' 由该线上两点 P, Q 的投影 P', Q' 来确定。在过 P' 和 Q' 的两条平行线上标出它们的高度（注意正负号），就可得到 l 的迹点 L（见图 9.3-1）。反过来，空间一直线由它任意两个分度点的投影唯一地确定。如果它的间距 i 理解为高度相差一个单位的两个分度点投影之间的距离，那末它与投影平面的倾角 $\alpha=\sphericalangle(l, l')$ 便可由方程 $i=e\cot\alpha$ 来决定（见图 9.3-2）。

用标高投影的方法，可以决定两条不平行的直线 a 和 b 是否相交。每条直线分别由分度点 A, B 和 P, Q 给出（见图 9.3-3）。高度相同的一些点在平行于 Π 的平面上，例如 $P(2)$ 和 $B(2)$ 在平面 $k=2$ 上。过 $P(2)$，

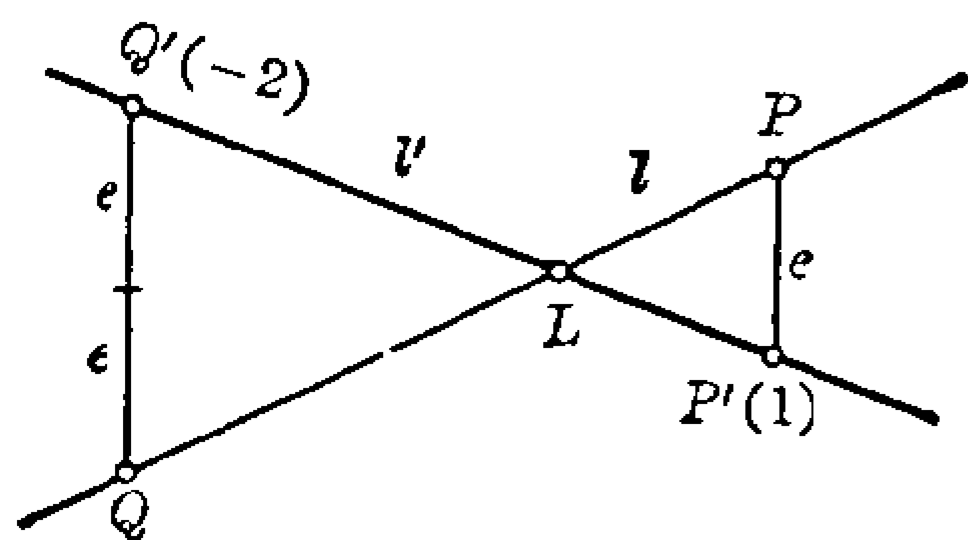


图 9.3-1　标高投影中点和线的表示法

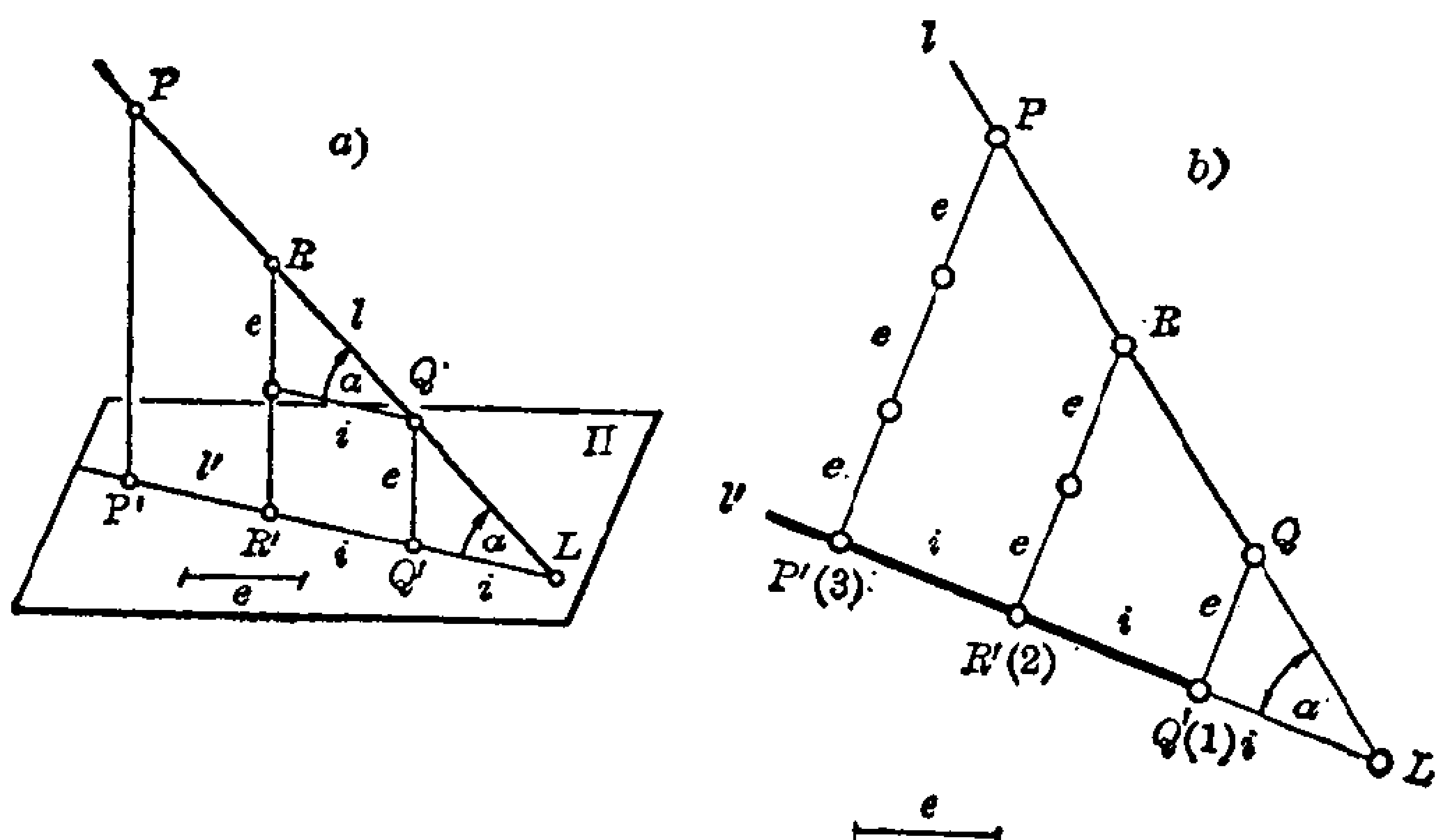


图 9.3-2　一条直线的间距和倾角

a）斜投影；b）标高投影

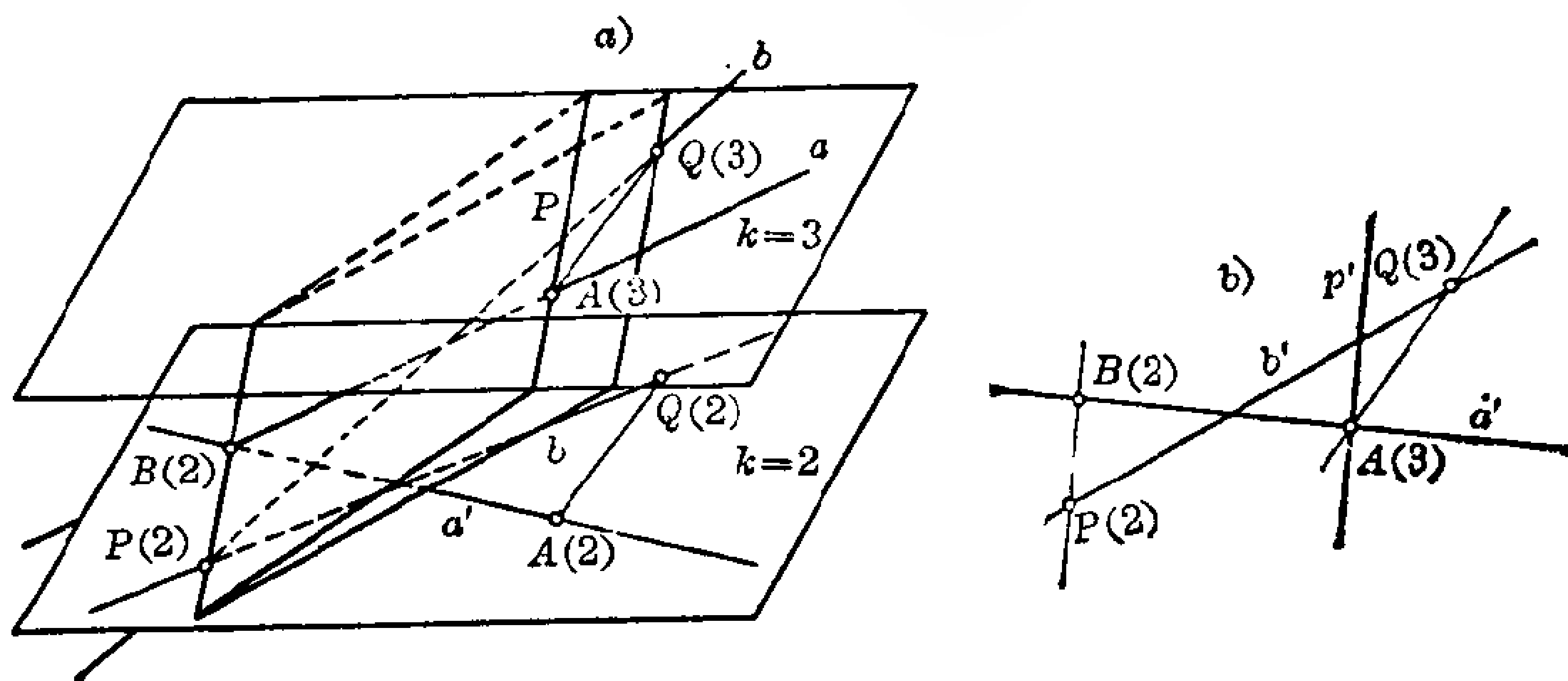


图 9.3-3　两交叉直线 a、b 的标高投影

a）斜投影；b）标高投影

$B(2)$ 和 $A(3)$ 的平面与 $k=3$ 的平面相交，交线 P 平行于 $P(2)B(2)$，由于直线 a 在这平面内（因该平面通过 $A(3)B(2)$），因此只有当直线 b 也在这平面内时才能与 a 相交，即 $Q(3)$ 也要在 P 上。

根据连接两条非平行直线 a 和 b 上高度相等的点的直线是否相交和平行，可以判断这对直线是错开（交叉）的还是可相交的。对于一对平行的直线 a 和 b，连接高度相等的各点所得的那些直线，在它们的单面投影中都是平行的。

与 Π 成一倾角的平面可用一些平行而等距并标出高度的**高度线**或用一条与高度线垂直相交的**最大倾斜线** f 来表示。这个平面的状况可用带刻度的**最大倾斜线**（坡度比例尺）来唯一地确定（见图 9.3-4）。高度为 O 的高度线就是该平面的**迹线**。

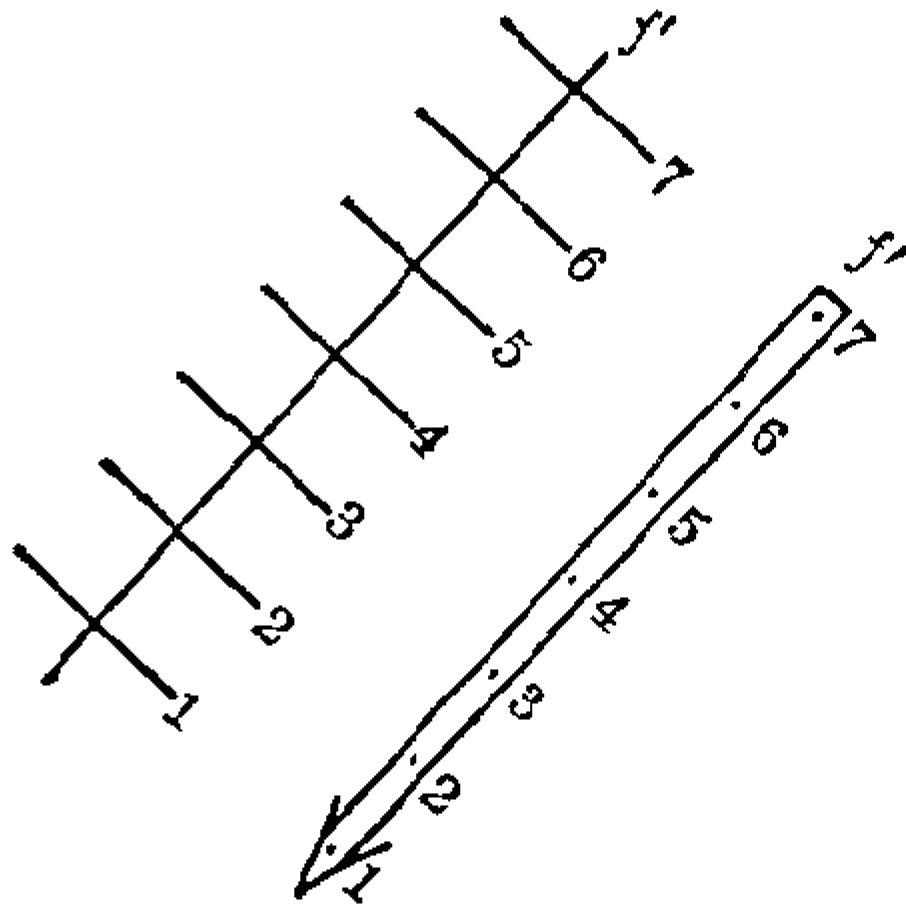


图 9.3-4 用坡度比例尺来表示一个斜面

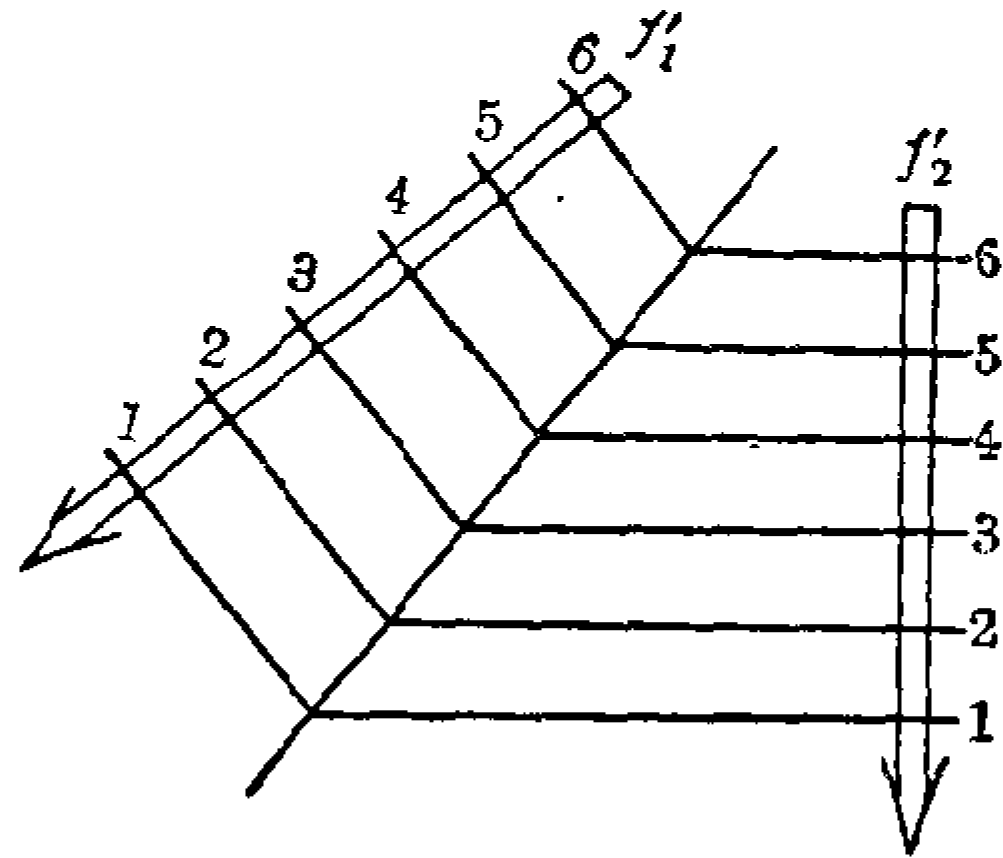


图 9.3-5 在单面投影中二平面的交线

连接高度相同高度线的各交点可得到由坡度比例尺给出的两平面的交线（见图 9.3-5）。如直线 l 和平面 E 由坡度比例尺给出，则过 l 线诸刻点之一族平行线是包含 l 线之另一平面 E_1 的诸等高线，E, E_1 的交线 s 与 l 的交点 D 是 l 与 E 的交点（见图 9.3-6）。

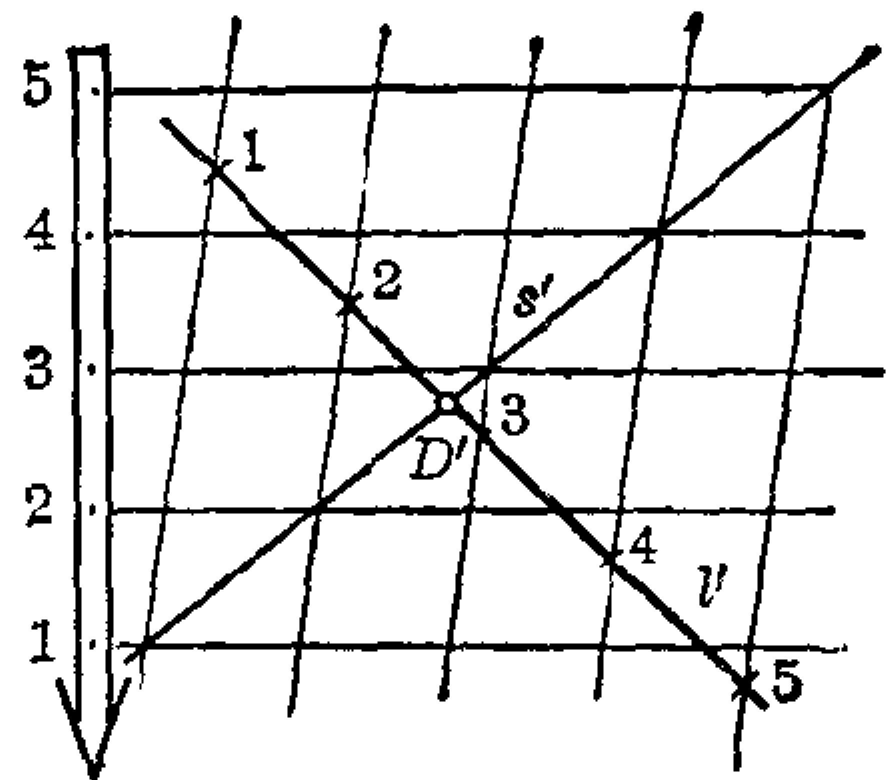


图 9.3-6 在单面投影中一条直线与平面的交点

等高线图 如一普通曲面被一族和 Π 平行、高差相等的平面截割，就可得到一族等高曲线。这些曲线在 Π 上的正投影给出该曲面的等高线图。如

轴和 Π 垂直的一回转锥面和它顶点 Z 的等高线图（标高投影），是一族以 Z' 为公共圆心的同心圆。这些圆的半径取自标有高度的锥面母线。对一个单叶回转曲面，它的等高线图也是一族同心圆。它们的半径由该曲面标有高度的母线 g 的正投影 g' 唯一地确定（见图 9.3-7）。

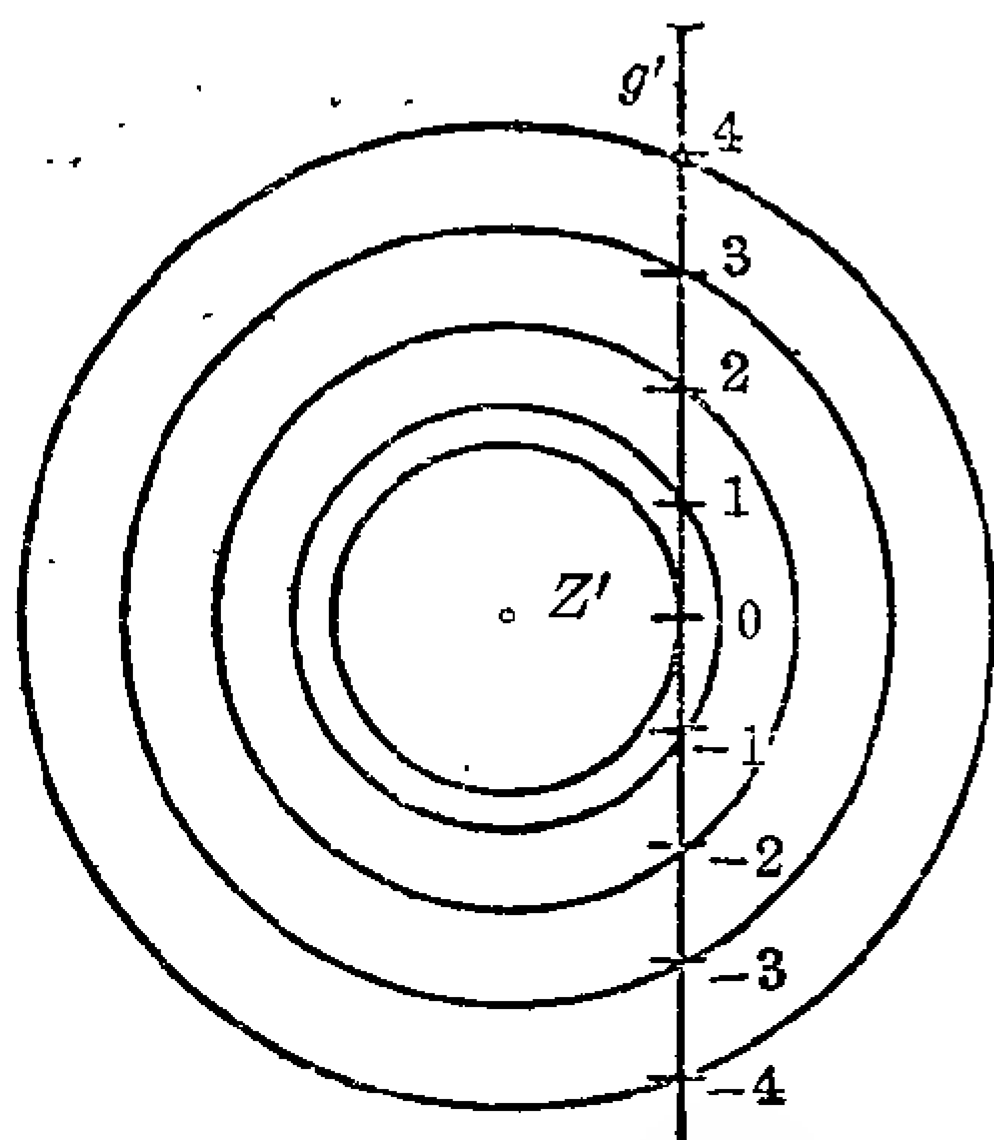


图 9.3-7　单叶回转双曲面的等高线图

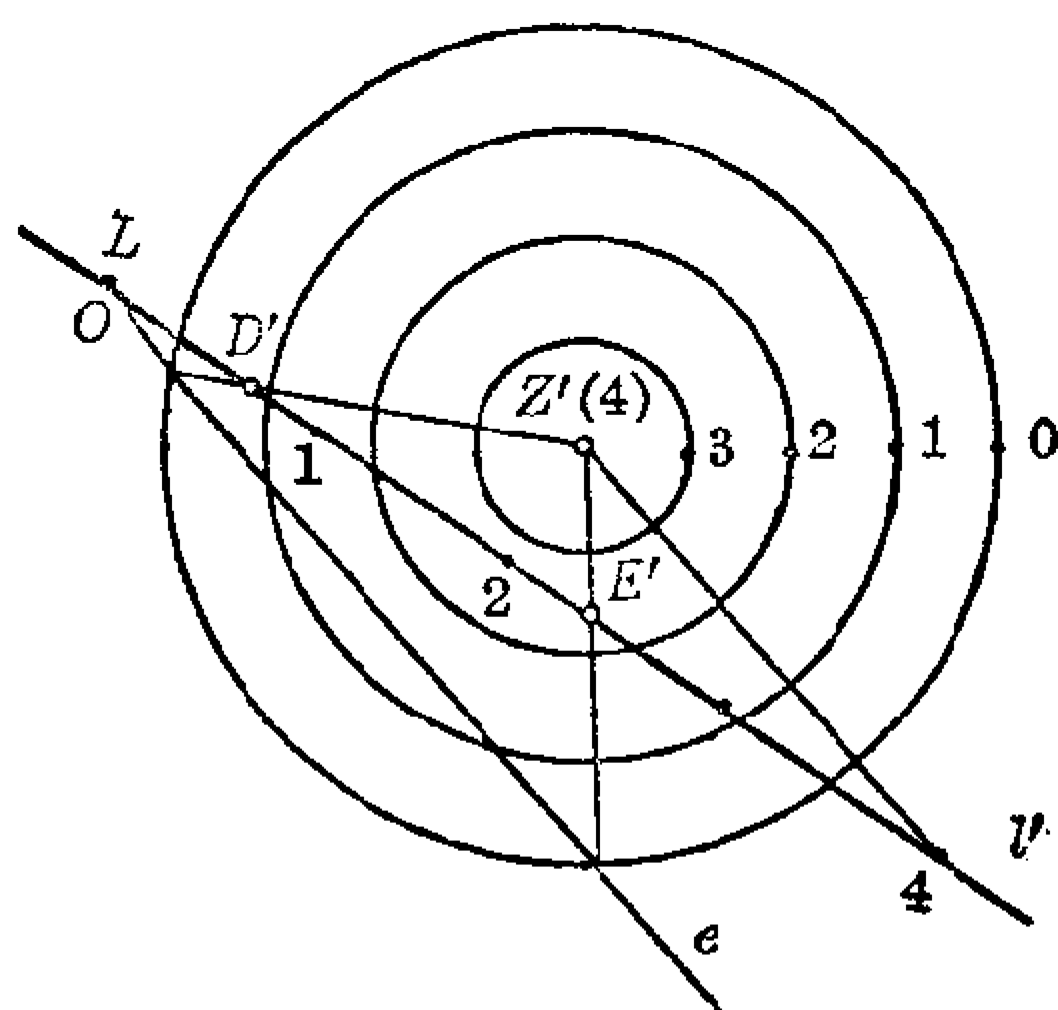


图 9.3-8　用一面法求直线和回转锥面的交点

一回转锥面和一条直线 l（见图 9.3-8）的交点可用由 l 和锥面顶点 Z 所确定的平面 Γ 来作出。Γ 在 Π 上的迹线 e 含有 l 的迹点 L，并且与连结 Z' 点和 l' 上高度和 Z 点相等的点的直线平行。这条迹线与锥面的等高线 O 的交点就处在直线 l 与锥面交点 E 的同一母线上。

那些在等高线图中只能依靠大量标高点才能领会的曲面称为**地形面**。用等高线图来表示这种曲面的方法在公路工程等坡面中具有实用上的重要性。此外，这种表达方法还广泛地以各种不同形式应用于船舶和飞机的推进器、飞机的机翼，以及车辆壳体等的制造中。

轴测投影

为了从用平行投影法得到的物体的形象化的投影图中得到尽可能多的可测性，可将物体放于一**正三轴坐标系** $O(X, Y, Z)$ 内，把它和这一物体一起投影到绘图板上，得到的投影也是一个三面体 $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$。根据投射线入射角的倾斜或垂直来区别是**通用即斜轴测投影**还是**正交即正轴测投影**。在原两面投影图中只有一个线段度量单位 $|OX|=|OY|=$

$|OZ|=e$，而在轴测投影中有三个线段度量单位 $|O^sX^s|=e_x$，$|O^sY^s|=e_y$ 以及 $|O^sZ^s|=e_z$。它们的长度可以有所不同，它们是在投影 $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ 中得出的(见图 9.3-9)。

在波尔凯 (Pohlke) 定理中有一个条件，在这个条件下，一平面三面体可以看成是一空间三面体的平行投影。

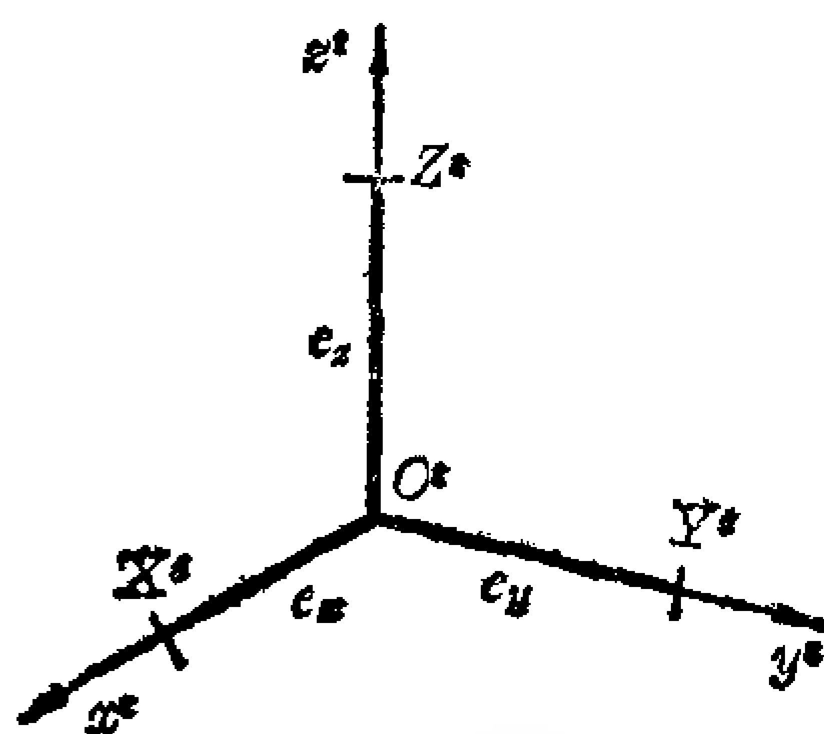


图 9.3-9 波尔凯三面体

波尔凯定理。**平面三面体 $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ 可以看成是一个空间直角三面体 $O(X, Y, Z)$ 的平行投影，但要以它的四顶点 O^s, X^s, Y^s, Z^s 不共线为条件。**

有时也称一空间直角正三面体为一立方体的顶，称它的平行投影为**波尔凯三面体**。

几种特殊的方法 斜投影(斜轴测)是轴测投影的一种特殊情况，对于它有 $e_y=e_z=1$，$y^s\perp z^s$，而 e_x(变形系数)和 x^s 轴的方向可以是任定的。当 $e_y=e_z\neq e_x$ 时就成为一类**斜二等轴测**(简称斜二测)，也称为**正面斜轴测**。**骑士透视**是斜轴测的一种特殊情况，它的三个轴向变形系数相等，$e_x=e_y=e_z=1$，$y^s\perp z^s$ 以及 $\measuredangle(x^s, y^s)=135°$ (见图 9.3-10)。**军用透视**或**鸟瞰图**的特点是 $e_x=e_y=e_z=1$，$x^s\perp y^s$ 以及 z^s 是垂直方向的(见图 9.3-11)。和骑士透视一样，它也是一种**斜等轴测投影**，它比平面图能更逼真地显示建筑物的形状。

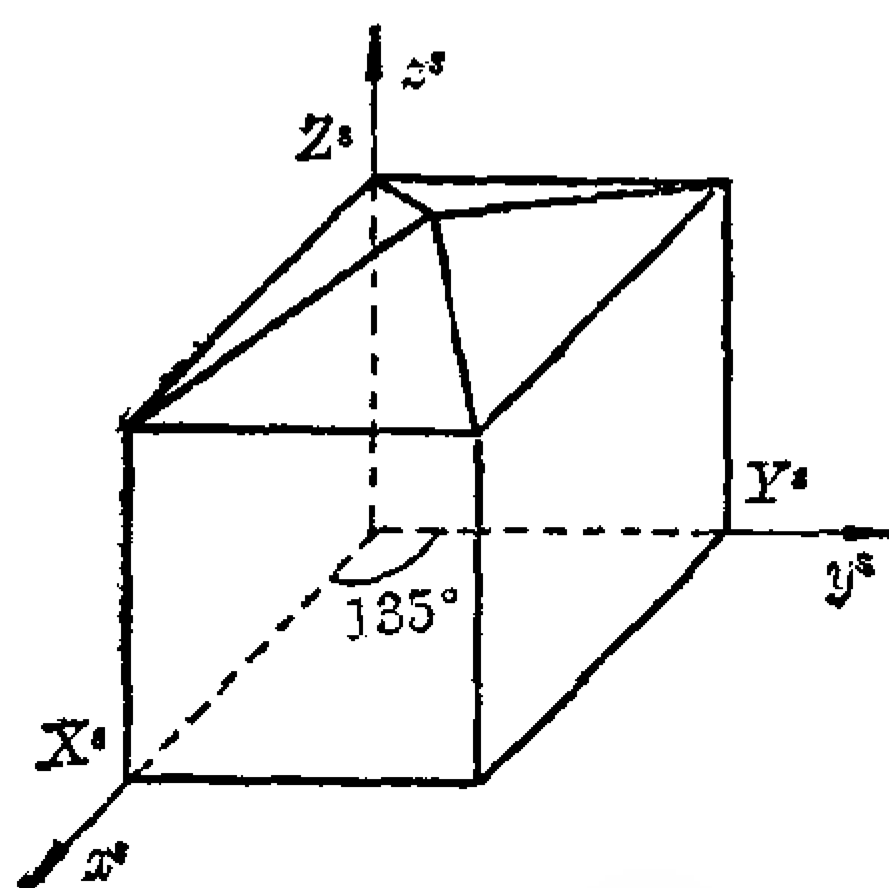


图 9.3-10 一房子模型的骑士透视

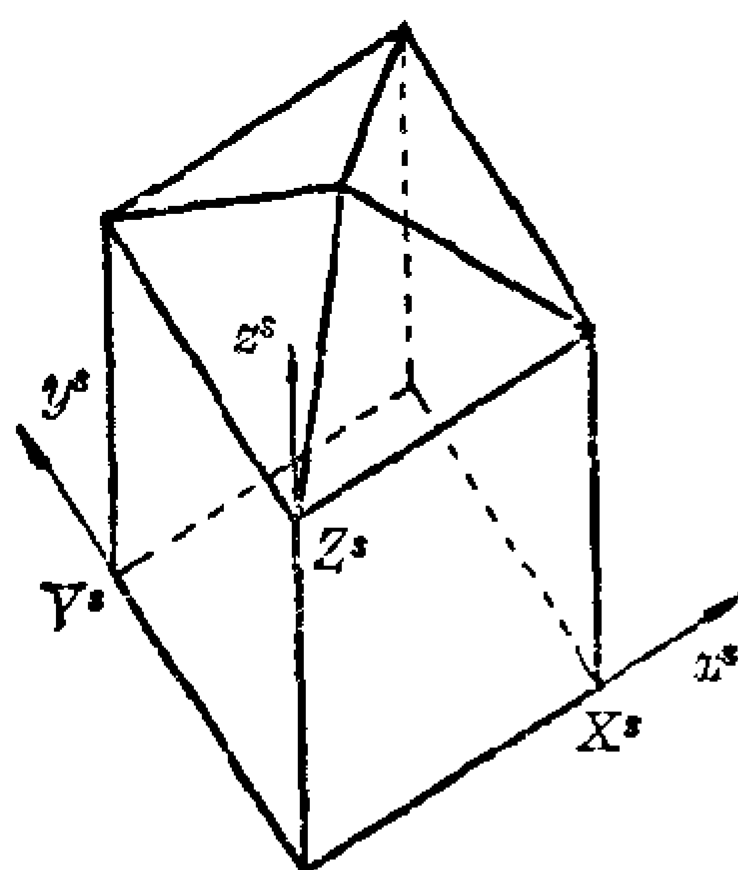


图 9.3-11 一房子模型的军用透视(鸟瞰图)

在实践中经常采用三等正轴测(投影)、二等正轴测(投影)或不等

正轴测(投影)。下面以一立方体切块的表达为例观察其通用准则(见图 9.3-12)。

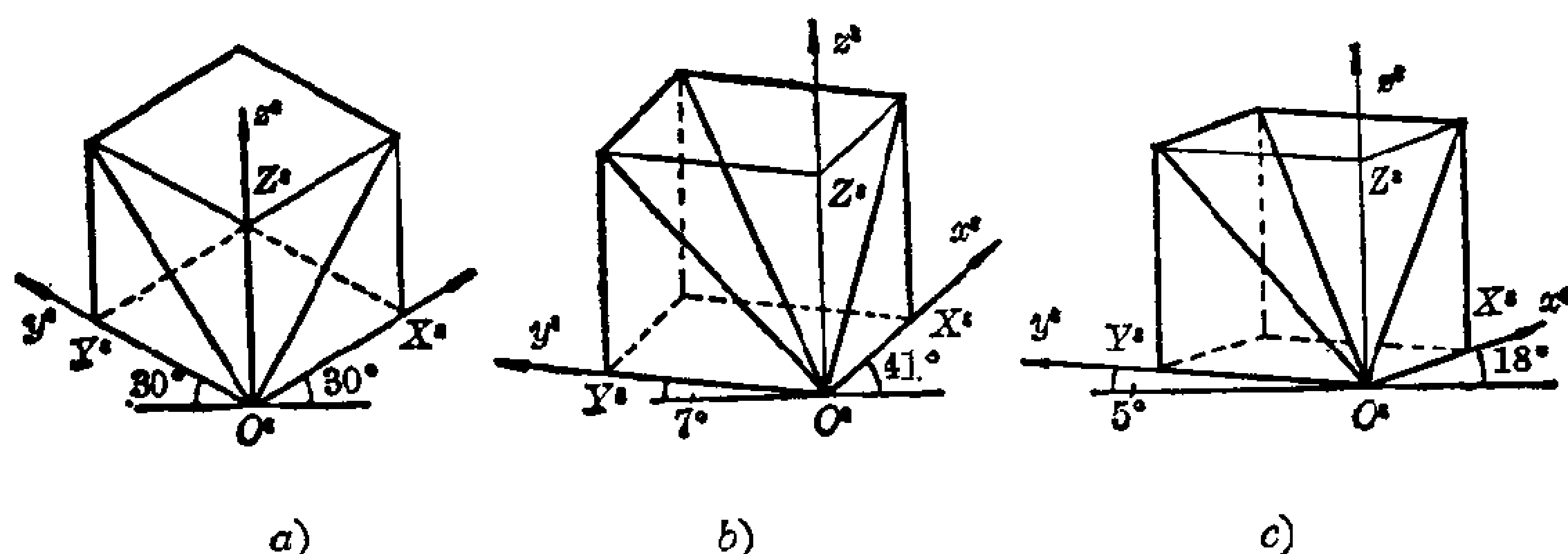


图9.3-12 一立方体切块的轴测图

a) 三等正轴测(投影); b) 二等正轴测(投影); c) 不等正轴测(投影)

三等正轴测(投影)	二等正轴测(投影)	不等正轴测(投影)
$e_x:e_y:e_z=1:1:1$	$e_x:e_y:e_z=0.5:1:1$	$e_x:e_y:e_z=0.5:0.9:1$
$\alpha=30°, \beta=30°$	$\alpha=41°, \beta=7°$	$\alpha=18°, \beta=5°$

如果一空间物体用直角坐标正投影来表示,那末用爱克哈特(L. Eckhart)的**填空方法**(交会法),可以得到一轴测投影。用两个正投影图分开放于绘图板上任意的位置,对每个投影图任意选定一交会方向,相对应的交会线的交点就是所求轴测投影点(见图 9.3-13)。至于如何放置投影图,如何选择交会的方向,需要经过一番实践,才能使所得轴测图形不会变形太多。

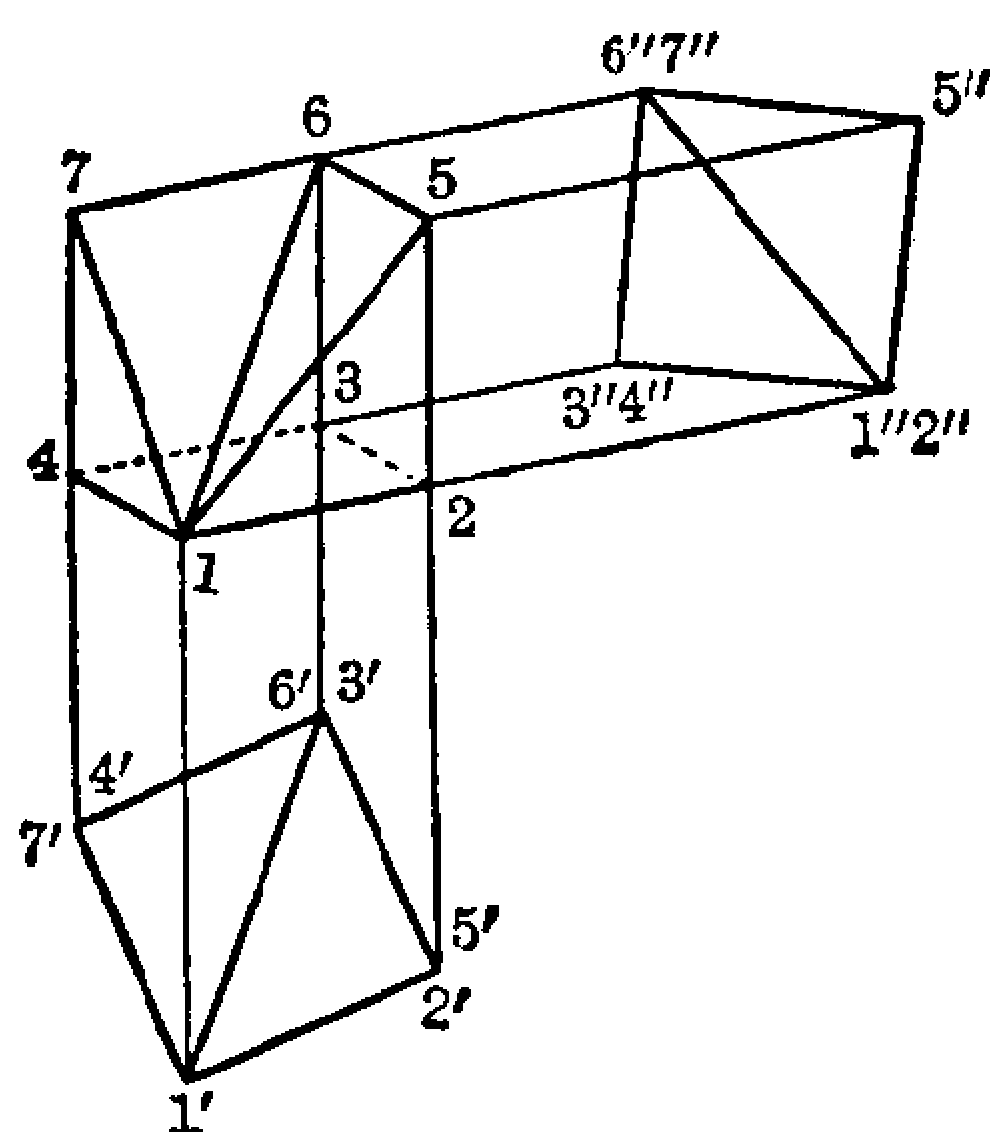


图9.3-13 用爱克哈特交会法画轴测图

正轴测投影 为了获得清晰的图形,可使空间直角正三面体 $O(X, Y, Z)$ 的每一根轴和投影平面 Π 都不平行。那末它的迹点 A, B, C 是一些实点。从空间考虑的话,边为 a, b, c 的迹线三角形 ΔABC 是一个锐角三角形。它利用正轴测图可以唯一地确定波尔凯三面体 $O^n(X^n, Y^n, Z^n)$。正投影 O^n 是迹线三角形的三高 ha, hb 和 hc 的交点,而点 X^n,

Y^n 和 Z^n 可以通过将空间直角三角形 BCO 和 CAO 绕边 a 和 b 转平到绘图板上后找到(见图 9.3-14)。

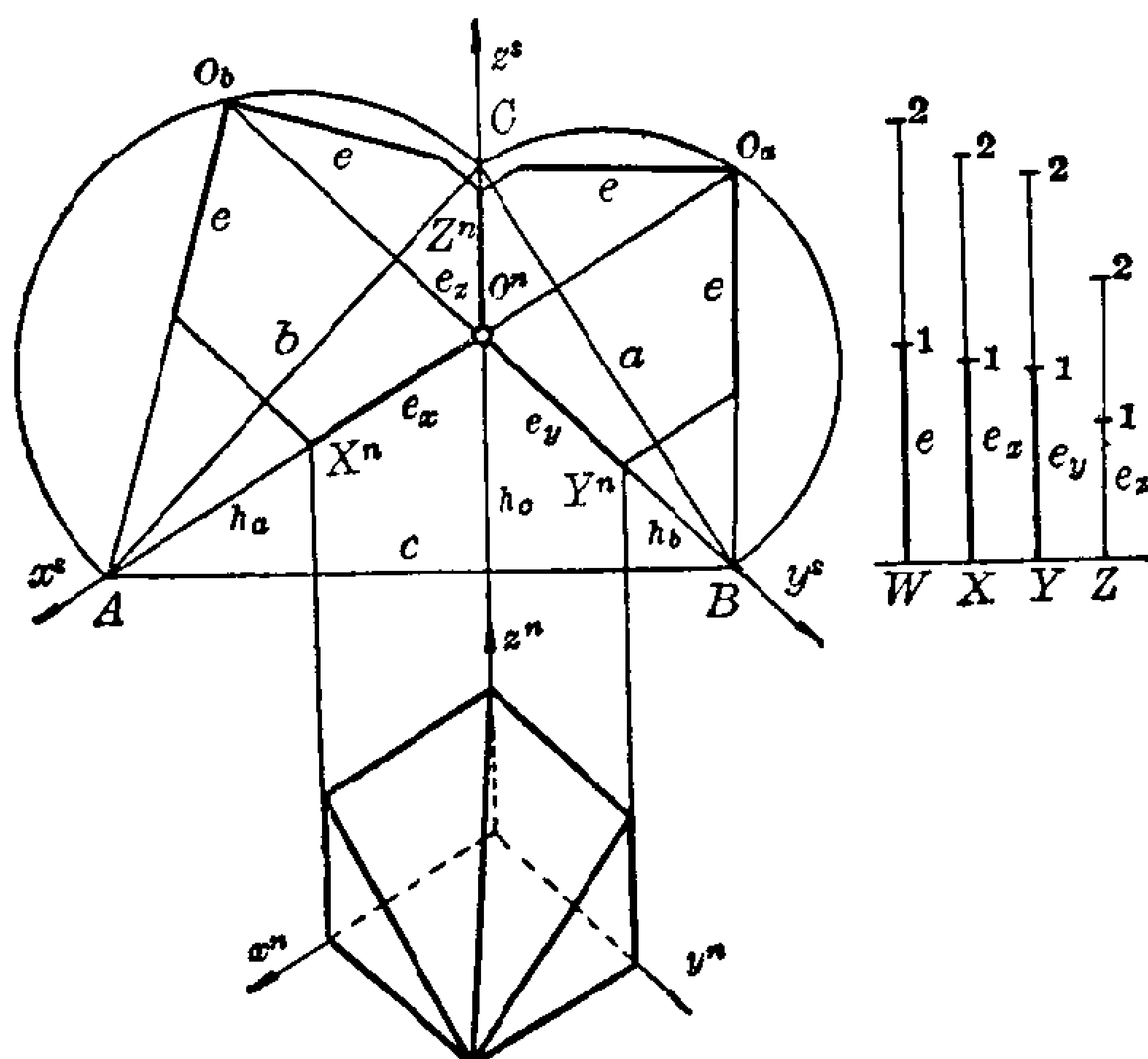


图 9.3-14 正轴测投影的波尔凯三面体，以及它对一立方体切块的应用

在波尔凯三面体中，单位线段 e 变短了。其缩短系数为：

$$\lambda = e_x : e = |O^nA| : |O_bA|$$

$$\mu = e_y : e = |O^nB| : |O_aB|$$

$$\nu = e_z : e = |O^nC| : |O_bC|$$

它们满足了在推导高斯定理的过程中得到的一个关系。

缩短系数之间的关系
$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=2$

高斯定理。如果将空间笛卡尔坐标系统的原点 O 和单元点 X, Y, Z 在投影平面 Π 上的正投影 $O'=O$, $X'=p$, $Y'=q$, $Z'=r$ 看成是复数平面上的点，那末有 $p^2+q^2+r^2=0$。

为了证明这一点，用直角坐标正投影（水平投影和侧面投影）来表示这直角正三面体 $O(X, Y, Z)$，这里取侧投影面平行于 OZ 轴（见图 9.3-15)，因而有 $|O'Z'|=|r|=e\cos\vartheta$。此外，$O'X'$ 和 $O'Y'$ 是一对椭圆

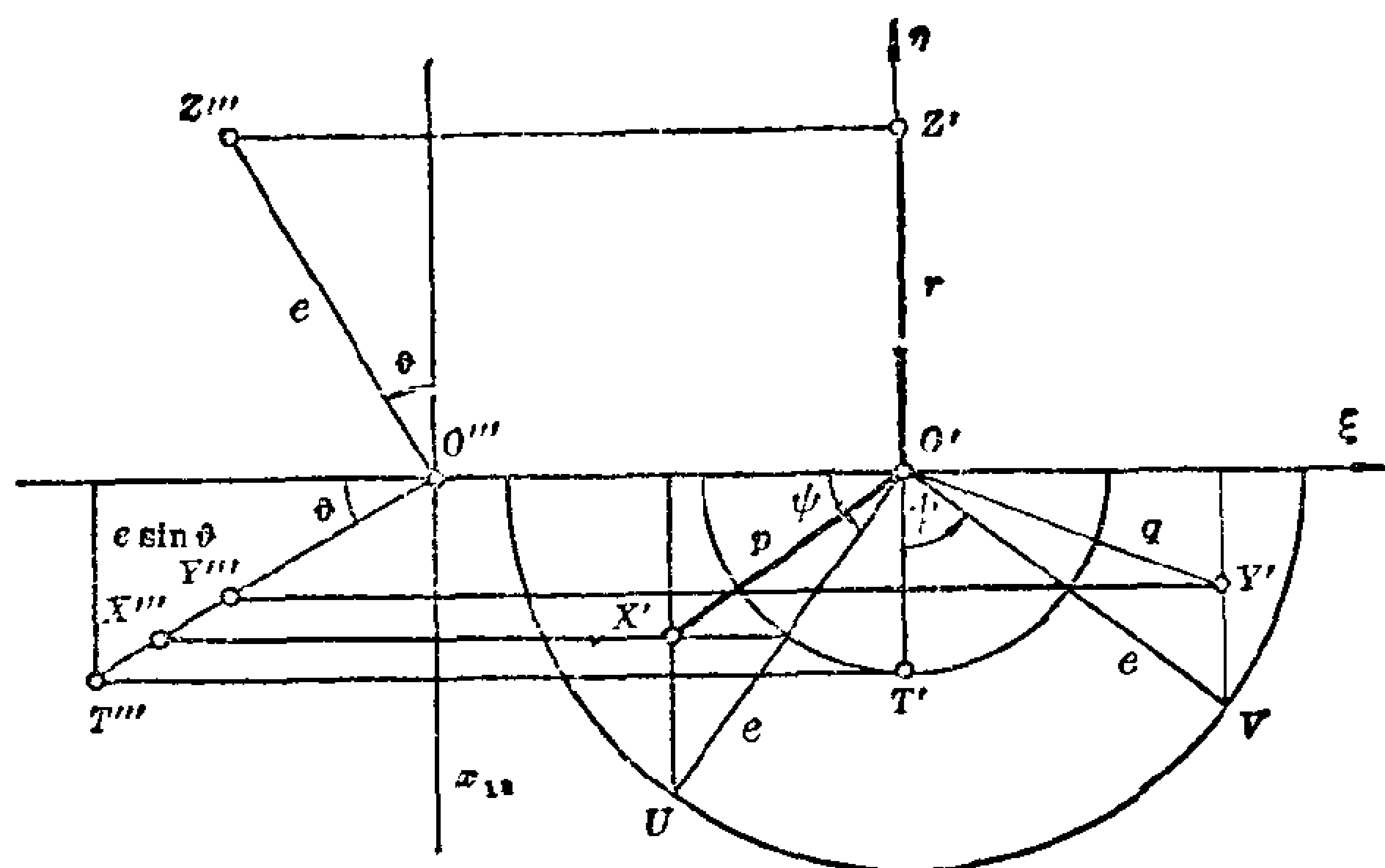


图 9.3-15 $p^2+q^2+r^2=0$ 关系的证明

的共轭半径。这椭圆就是源出于由圆心为 O'、半径为 e 的圆，它按比例 $\sin\vartheta:1$ 将圆中平行于水平轴线 x_{13} 的诸弦缩短而成的。如果在水平投影面内，以 O' 为原点，η 为虚轴并与 $O'Z'$ 重合，建立一标有序号 η 的高斯平面 ξ，那末点 X', Y', Z' 对应于复数 p, q, r，并存在下面一些关系式：

$$p=\cos(\pi+\psi)+i\sin\vartheta\sin(\pi+\psi)=-\cos\psi-i\sin\vartheta\sin\psi,$$

$$q=\cos(3\pi/2+\psi)+i\sin\vartheta\sin(3\pi/2+\psi)=\sin\psi-i\sin\vartheta\cos\psi,$$

$$r=i\cos\vartheta。$$

平方相加后可得 $p^2+q^2+r^2=0$。如果取复数的系数，并使 $\lambda=|p|$, $\mu=|q|$, $\nu=|r|$，再把上列各式代入就得 $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=2$。

中心透视

中心透视是一种中心投影，可以被用来作出空间物体的鲜明图形，而这些物体通常是用它们的水平投影和正面投影的形式给出的。如果要从中心透视图（通常是照片）再作出水平投影和正面投影的两面投影，这种反求法问题是属于摄影测量学的范畴。它只有在定向摄影机相对于物体的位置是已知时，或在空中摄影测量制图中已知某些导点的位置时，才是可解的。

决定一中心透视作图只要知道透视中心或视点 O，一不过 O 点的水平基面 Γ 和一不过 O 点的直立投影面 Π 就可以了。过 O 点平行于 Γ 的平面 Ω 与投影平面相交于视平线 h。投影面和基面相交于基线 l。从

O 点到 Π 的垂足是主点 H，它处于视平线 h 上。线段 $d=|OH|=|O'H'|$ 称为视距。

交会法和灭点法 如果给出了一房子模型的水平投影和正面投影，那末用两面法的规则，当此模型在直立投影面 Π 和视点 O 的相对位置确定时，它的中心透视图可逐点作出。图中表示的是对于 P 点的情形(见图 9.3-16)。$P'O'$ 与基线 l 交于 $P^{c'}$，$P''O''$ 交过 $P^{c'}$ 的柱线于 $P^{c''}$，这样就找到了 P 点的投影 P^c。可将它转换到另一块绘图板上，这绘图板相当于 Π 平面对于 l 的一种反射，并且包含视平线 h，主点和灭点。根据中心投影的规则，所有平行的线有着同一灭点。对于平行于基面 Γ 的直线(水平线)，它们的灭点都在视平线 h 上。对于由 AB 或 DC 所决定的平行线族，其灭点是 F_1。它的水平投影是 l 与过 O' 点平行于 DC 的直线的交点。同样，对于所有平行于 DA 或 CB 的平行线族，F_2 是它们的灭点，它的水平投影就是 F_2'。主点 H 是所有垂直于投影平面的直线族的灭点。此外，房屋的一些地面边框线与基线的交点对于作图也是有用的。以主点 H 来定方位，在本例中所得 l 上的点 1, 2, 3, 4 以及 h 上的点 F_1, F_2 可以依据主点 H 定向来实现中心投影。这样，透视平面图的绘制简化成连接一些点和一些直线交点的工作。从房子模型的正面投影中量出第一条线和屋檐线的高度，并在 Π 内过 1, 2, 3, 4 点与 l 垂直的直线上截取这些高度，再利用灭点 F_1 和 F_2，这个房子模型的透视图就能完成了。

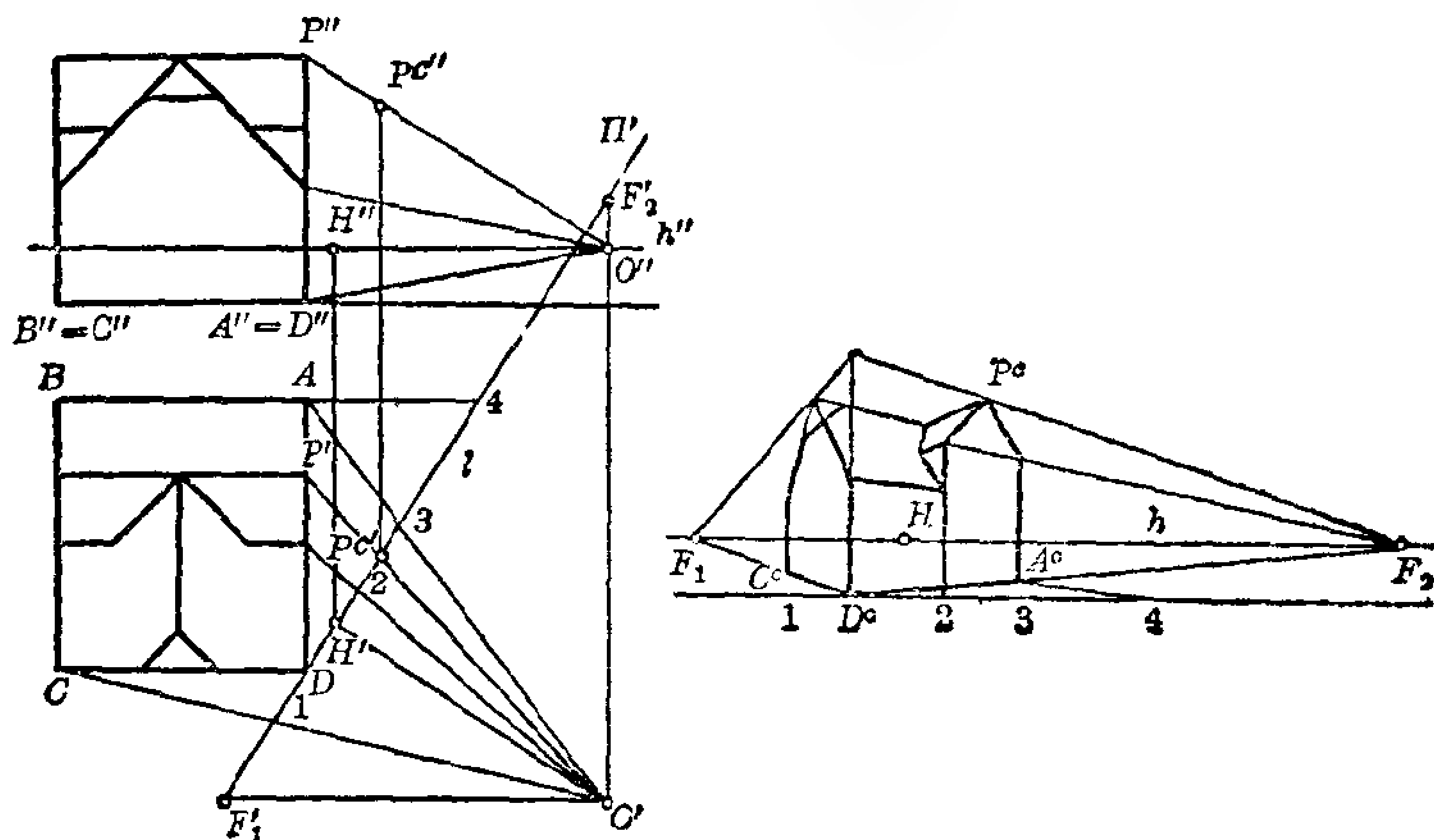


图 9.3-16 用交会法作出的一房子模型的中心透视图

勃鲁乃尔斯基 (Brunellesci, 1377～1446 年) 曾描述过这种相交法。它的缺点是篇幅太大，以及还要量取尺寸，所以一般建筑师都不采用这种方法。他们将 Π_1 的水平投影这样放置(见图 9.3-17)：即使垂直于 Π_1' 的垂线为中心透视图中房子的那些垂直边，相对于视点的房子正面的所有边的高度都取自正面投影。图中明显缩短的高度不是从正面投影作出，而是借助灭线来作出的。

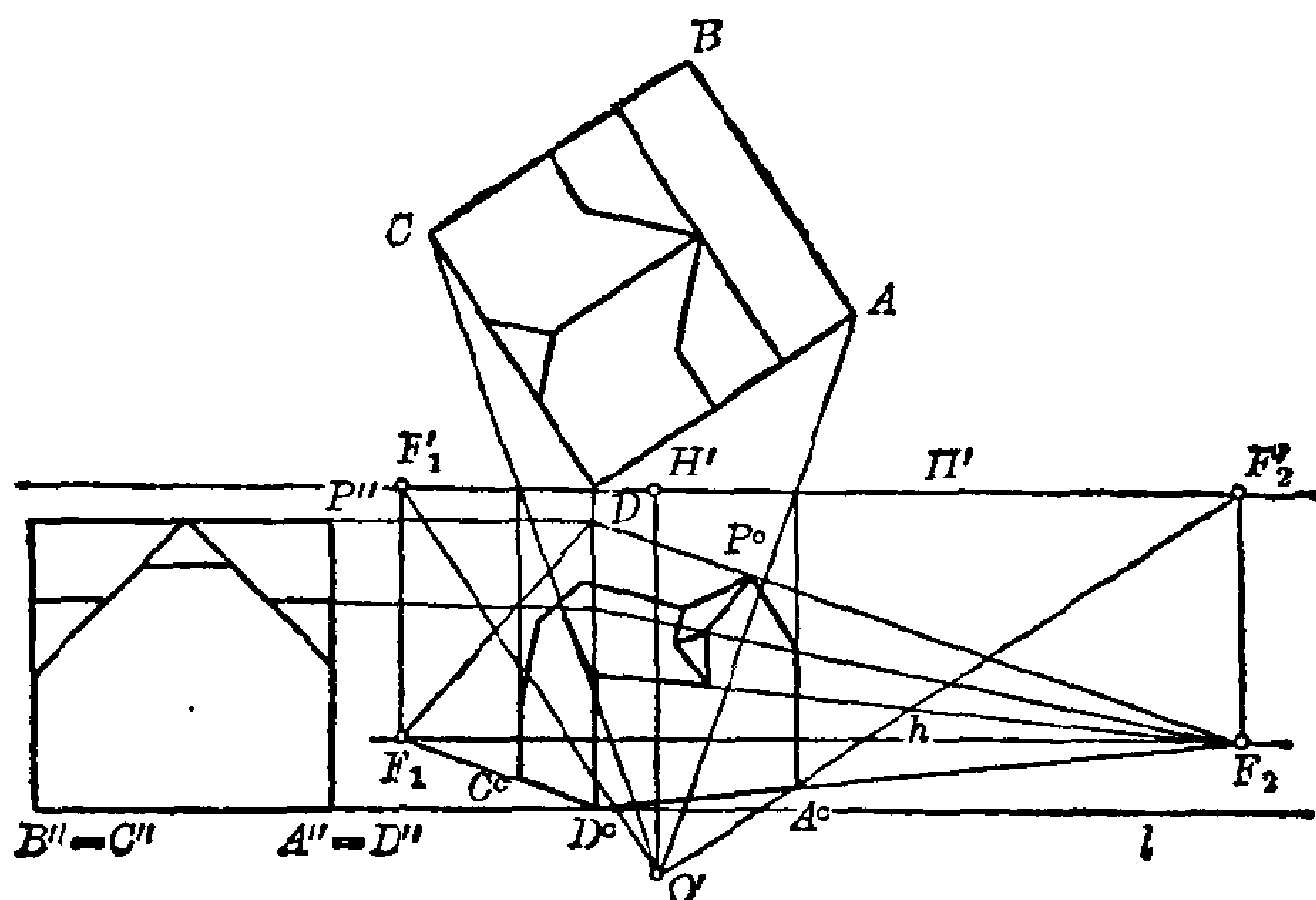


图 9.3-17 用建筑师方法所作出的房子模型中心透视图

透视的度量问题 在处理中心透视的度量问题时，需要用到几种工具。例如给出一线段 AB 的中心投影 A^cB^c，要求它的实长。对于垂直于基面 Γ 的线段，作法比较简单。例如要求一垂直于 Γ 的线段 m 的实长，如已知 $m^c=|A^cB^c|$ (见图 9.3-18)，在 h 上任取一点 F_s，并和 A^c 及 B^c 连结起来。直线 $s^c=A^cF_s$ 处在 Π 平面内，并与 l 交于 S，S 是投影面 Π 上的一点。让 t^c 表示直线 B^cF_s，它与过 S 点与 l 垂直的直线相交于 T，因而 T 也在 Π 平面内。因此 $|ST|$ 是由中心投影给出的垂线 m 的实长。

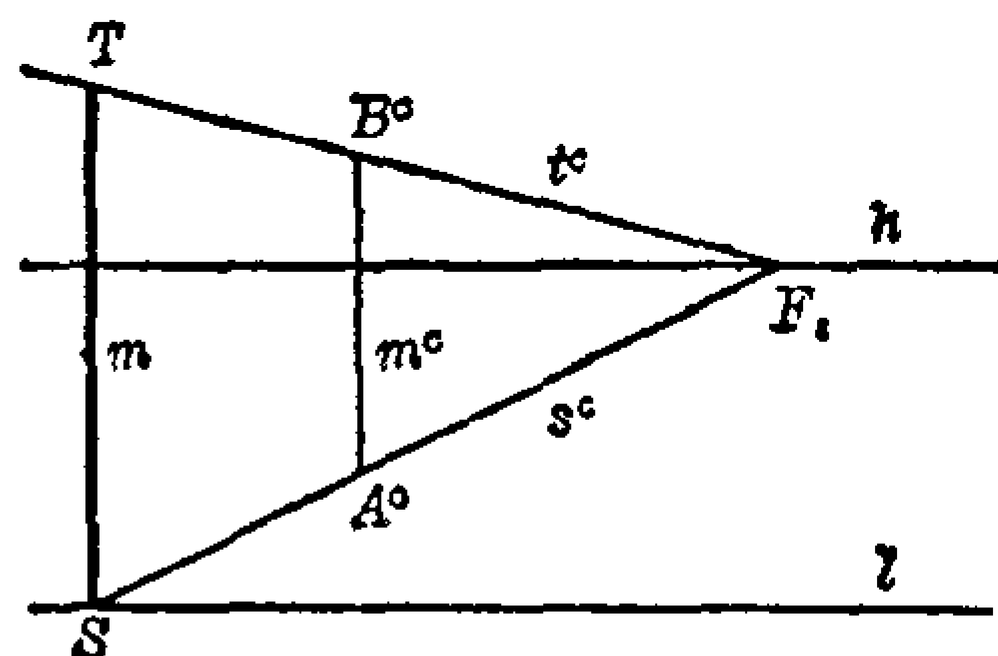


图 9.3-18 基面 Γ 的垂线的实长

对于在基面内的一些直线，在中心投影中画出给定线段的透视图是很重要的。在 Γ 内的一直线 s，它的投影 s^c 与 l 交于 S 点，与 h 交于它

的灭点 F_s(见图 9.3-19)。在 s 上有一点 A，它的中心投影为 A^c。直线 s 和灭线 OF_s 是平行的。为了导出作图方法，将 s 在 Γ 内绕 S 点旋转到 l 上，OF_s 在 Ω 内绕 F_s 点旋转到 h 上。旋转后，A 点跑到 A_l 处，而 O

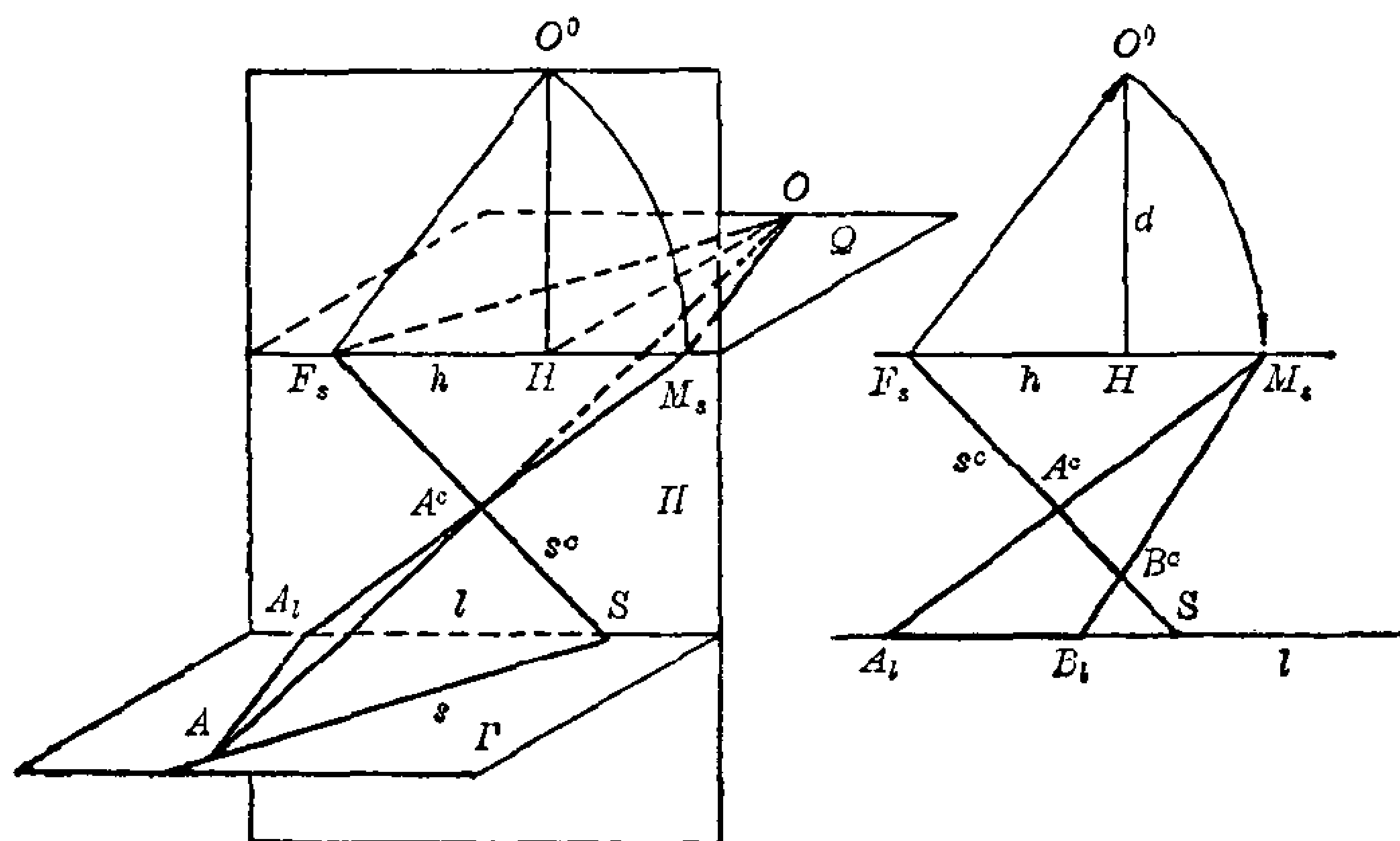


图 9.3-19 量点法

点转到 M_s 处。直线 AA_l 和 OM_s 是平行的，因此直线 OA 和 M_sA_l 包含在它们所构成的平面内，所有这两条直线在空中相交。由于它们的公共点一方面必须在 Π 内，另一方面又必须在 OA 上，所以它只能是 A 的投影 A^c。由于线段 $|SA_l|$ 是中心投影给出的线段 $|SA|$ 的实长，故在 s^c 上标出的任意投影线段的实长都可借助于点 M_s 在 Π 内作出。属于 s 的量点 M_s 也可在 Π 内由 F_s 和 O^0 得出。O^0 是通过旋转视点 O 得到的，以 F_s 为圆心，以 $|F_sO^0|$ 为半径作一圆弧，交 h 于 M_s，连接 M_s 和 A^c 的直线交 l 于 A_l。$|SA_l|$ 就是中心投影给出的线段 $|SA|$ 的实长。如果在 s^c 上讨论另外一点 B 的投影 B^c，则借助于 $|M_s|$，$|SB|$ 的实长也可用类似的方法作出。而且，线段 $|A_lB_l|$ 就等于在投影中给定线段 $|AB|$ 的实长。

这里所讲的由中心投影求水平线段实长的方法称为**量点法**，而点 M_s 属于所有平行于 s 的直线，称为 **s 的量点**。

此外，在 l 上连续地用任一给定的线段 a 来划分，将分割点和 M_s 连接起来，这些连线经过它们和 s^c 的交点，就得到关于这些直线的投影尺度。

如果已知 Γ 面上一立方体的一边 a 的透视投影 $|A^cB^c|$，根据上述

方法，就可作出该立方体的中心投影图（见图9.3-20）。中心投影的作图是由下列诸要素，基线 l，视平线 h，主点 H 及视距 d 来承担的。

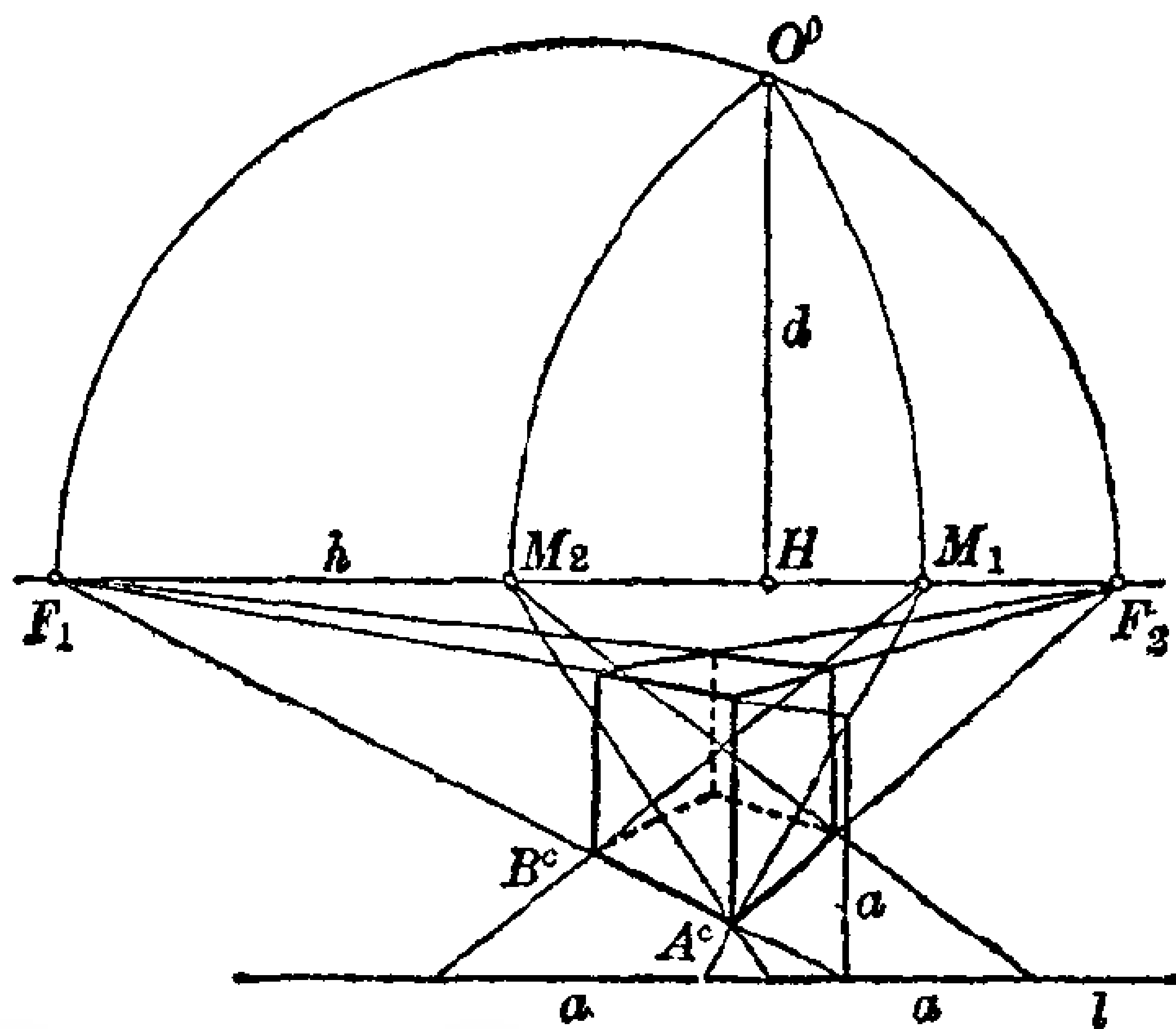


图 9.3-20　立方体(给出一边 A^cB^c)的中心投影作图法

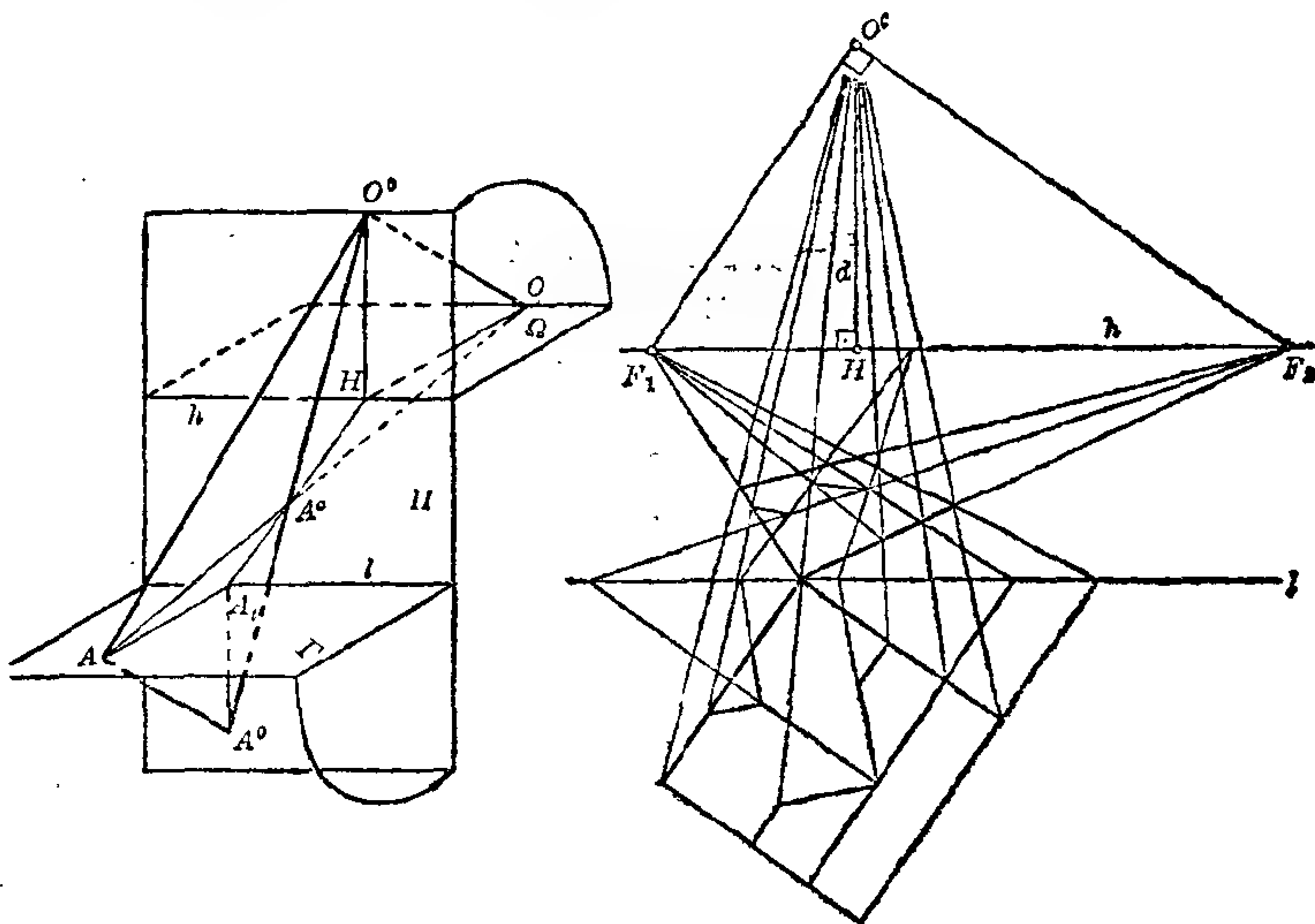


图 9.3-21　Γ 内一点 A 的投影和将它旋转之后所得的点之间成透视直射变换关系

图 9.3-22　Γ 面内的平面一图形的中心投影和将此图形转到投影面 Π 所得的结果成透视直射变换关系

透视直射交换 假定给出了Γ内的一个点A及它的中心投影A^c(见图 9.3-21)。平面Γ和Ω分别绕l和h按相同方向旋转到Π,则A点转到A^0点,O点转到O^0点。弦AA^0和OO^0相互平行并在同一平面内。这个平面和Π交于O^0A^0。由于此平面包含视线OA,因此A^c也在O^0A^0上。此外,平行线OH和AA_l在一平面内,它也包含视线OA,并与投影面相交于HA_l。因此O^0A^0和HA_l的交点就是A的投影点A^c。就其本质而言,此图说明在A^c和A^0之间存在着一种以O^0为直射变换中心,l为直射变换轴,h为反回轴的透视直射变换关系。

平面Γ内图形的中心投影绕l旋转到投影面Π后,两者之间成透视直射变换关系(见图 9.3-22)。

立体图象对

由于每只眼睛所看到空间物体的透视形象不一样,故有立体感的感觉。如成为图或相片,这两种不同的图象就称为*立体图象对*或称为*立体图象*。它们可用一通过立体摄影机在物镜相隔约为 65 mm(≈2.56″)情况下分摄象对,然后用一体视镜(立体镜)将它们隔开来观看,每只眼睛只看到一张图象,起到两眼看物的相同效果,从而一空间物体的实况可以从它的立体图象中重演。因此*体视学*可应用于测量、犯罪学及事故的调查等等。立体图象也可用作图法来作出,例如通过中心透视的交会法,用两个视点O和$\overline{O}$取间距为 65 mm,取视距d为 200 mm 来作出。

在立体彩色相片所采用的方法中,这两张立体异色图象画到绘图板上,它们反射物理性质不同的光波,诸如不同的偏振光或绿或红这两种互补的色光(见图 9.3-23)。用滤色(光)镜来看这两张图象时,每一片滤色(光)镜将对应于另外一只眼睛的图象所反射的光吸收掉。应用着色法或偏振光法,通过使用一光学设备,可使观察者对所观看的物体有立体空间的感觉。在观看图 9.3-23 这一张图画时,左眼应用红滤色镜,右眼则用绿滤色镜。

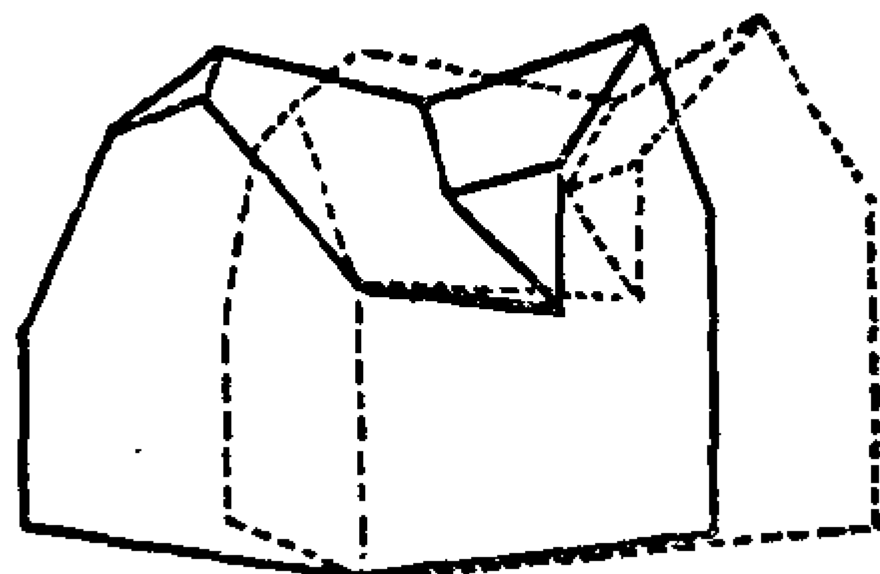


图 9.3-23 一房子模型的两张中心透视图

第10章 三角学

10.1 三角函数 ……………………372
三角函数导论 …………372
任意角三角函数的定义 376
三角函数的性质 ………381
三角函数表的用法…… 391
加法定理 ……………396
加法定理(续) ………399
10.2 三角方程 ……………404
纯三角方程 …………405
混合三角方程 ………409

10.1 三角函数

三角学研究角度的度量，但这并不是平面几何中用量角器读出角度大小的那种初等角度度量。三角学是用演算跟角度有关的特殊的函数来得到角度值的。因为这些函数用在三角学（研究三角形的测量和计算）中，因此叫作三角函数。

三角函数导论

正弦 有一条道路，如果沿着它的长度方向，每100米均匀地抬高3米，那末高度 h 的增加量跟所通过的路长 s 之比即 $\frac{3}{100}$ 就是路面倾斜度的度量(见图10.1-1)，也就是路面和水平面之间角度 α 的度量。比 $\frac{h}{s}$ 是角 α 的函数，叫作角 α 的正弦，因此起初我们只对锐角定义了正弦函数(见图10.1-2)。

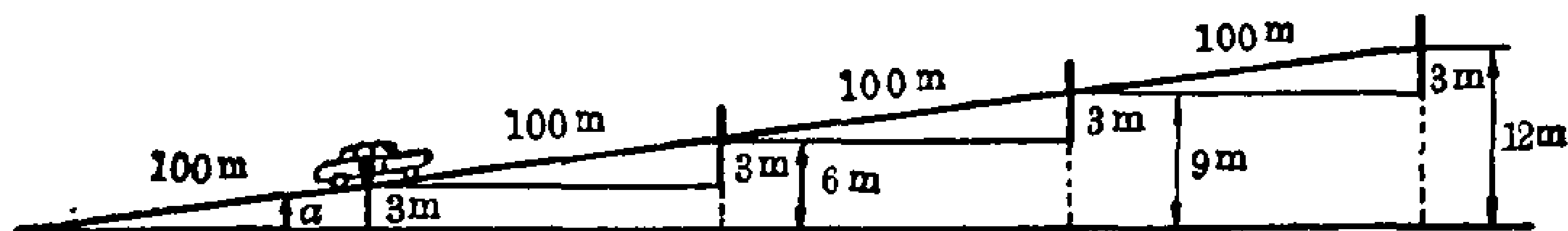


图10.1-1 倾斜平面的坡度

从画在足够大方格纸上的图形，可以读出 $\frac{h}{s}=\sin\alpha$ 的值。如果分度 s 是10的幂次，比如说10厘米(见图10.1-3)，则用图形来决定正弦值特

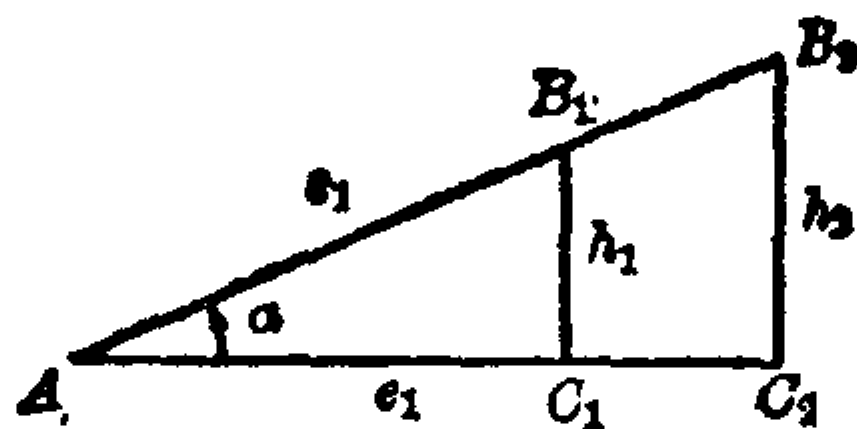


图 10.1-2　角 α 的正弦和余弦; $|AB_2|=s_2$, $|AC_2|=e_2$; $\frac{h_1}{s_1}=\frac{h_2}{s_2}$; $\frac{e_1}{s_1}=\frac{e_2}{s_2}$; $\triangle AB_1C_1$ 跟 $\triangle AB_2C_2$ 相似; $\frac{h}{s}=\sin\alpha$, $h=s\sin\alpha$, $\frac{e}{s}=\cos\alpha$, $e=s\cos\alpha$

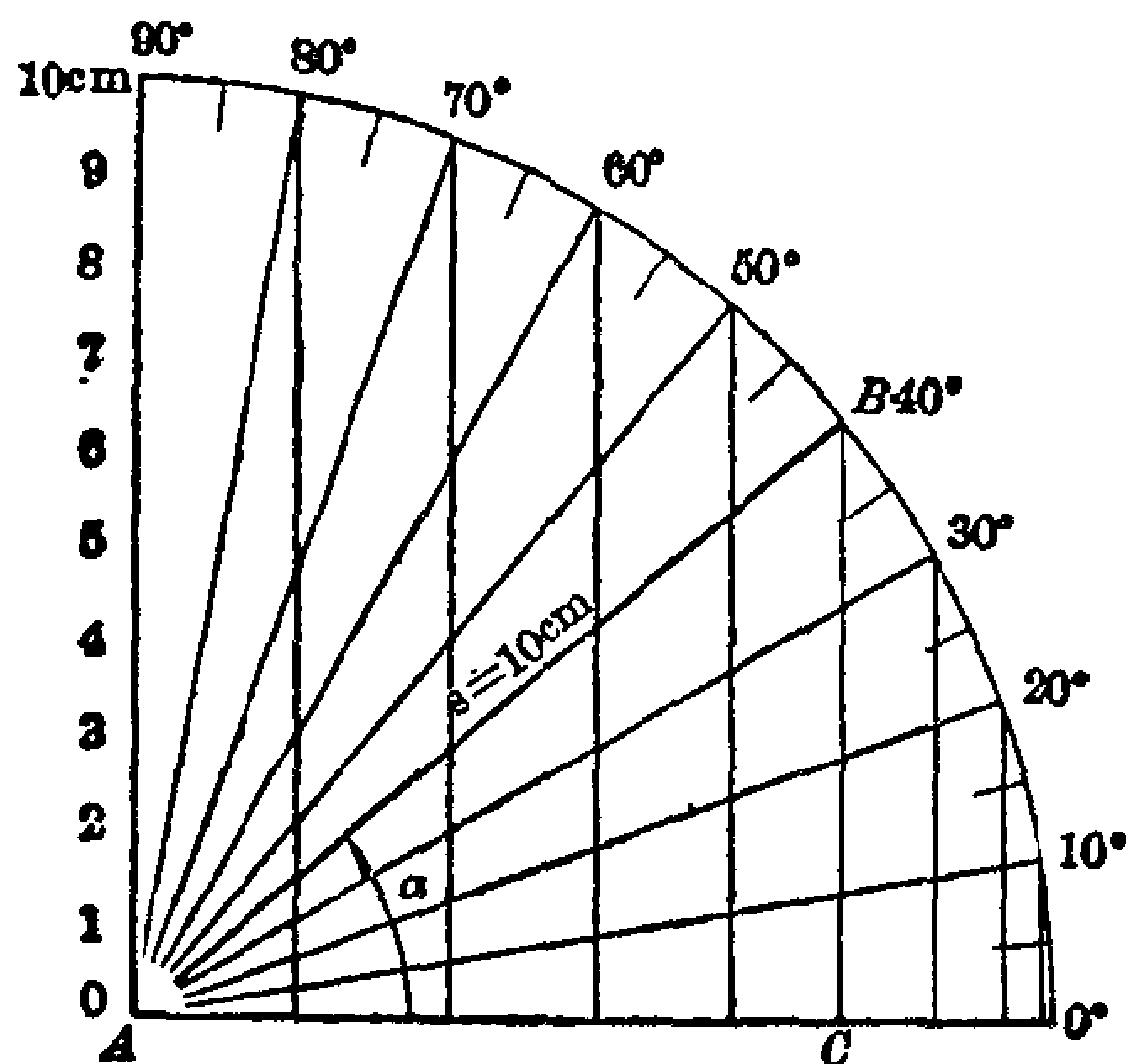


图 10.1-3　用图形从比 $\frac{h}{s}$ 和 $\frac{e}{s}$ 来确定锐角 α 的正弦和余弦;例如 $\sin 40°\approx 0.643$, $\cos 40°\approx 0.770$

别简单; 例如对 $\alpha=40°$, $\frac{h}{s}=\frac{6.43\ \text{cm}}{10.00\ \text{cm}}=0.643$。这种方法的精度不很高,但是加大图象能够提高精度。对每一个锐角 α 而言,正弦函数具有一个确定的值,其值总是小于1, 并且较大的角,其函数值也较大。

余弦　倾斜线段 s 在水平面上的投影 e 是以地图距离出现在地图上的(见图 10.1-4)。比 $\frac{e}{s}$ 也是角 α 的函数, 叫作余弦: $\cos\alpha=\frac{e}{s}$, $e=s\cos\alpha$。对锐角 α 而言, 其余弦函数值随着角 α 的增加而减小。从图形上我们得到 $\cos 40°\approx\frac{7.70\ \text{cm}}{10\ \text{cm}}=0.770$(见图 10.1-3)。

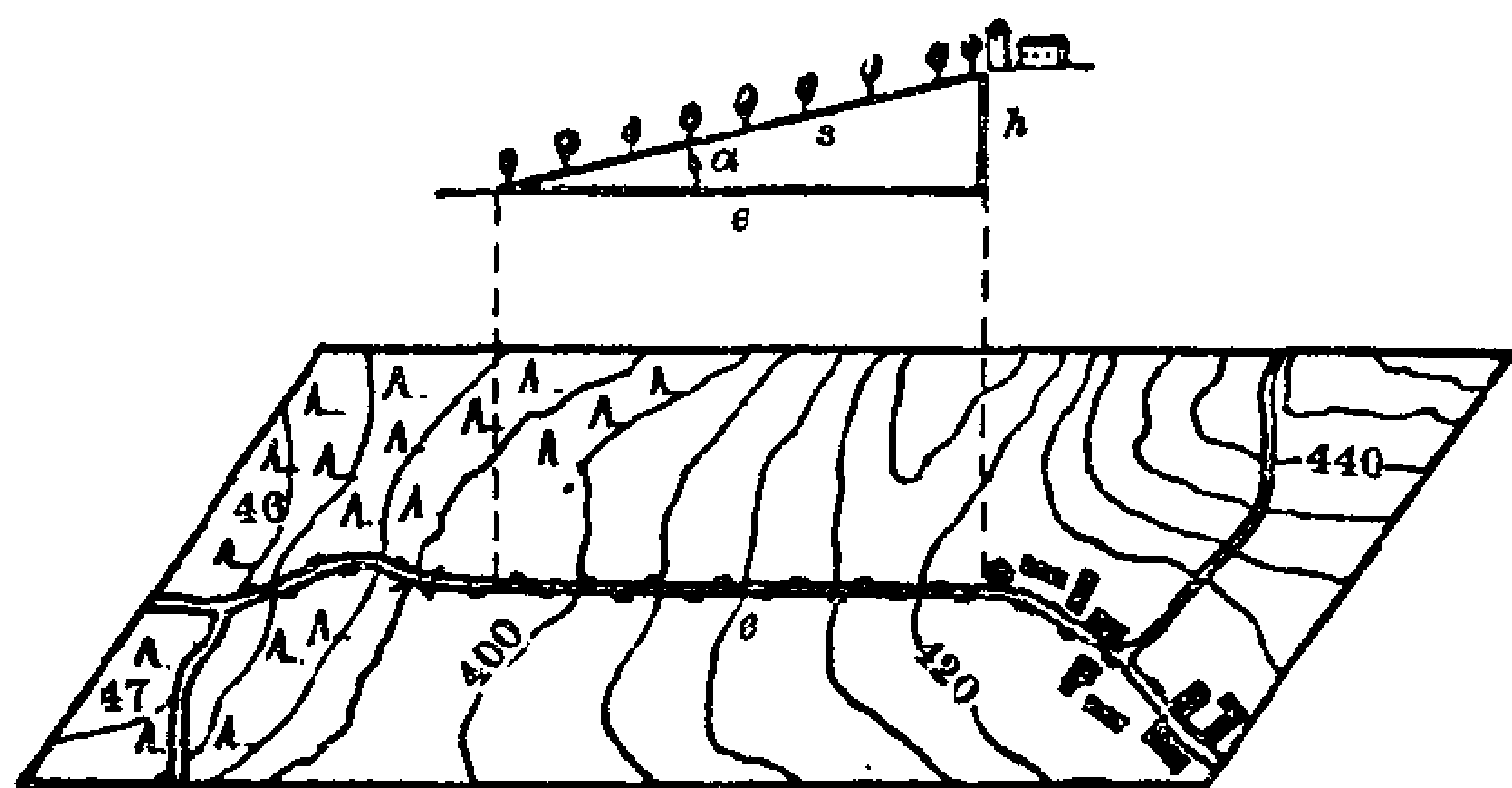


图 10.1-4　倾斜线段 s 到地图平面上的投影

正切　一条路面的陡度也可以用 $\frac{h}{e}=\tan\alpha$ 来表示，这是高度 h 的增量跟水平距离 e 之比，它也是角 α 的函数，叫作 α 的正切。因此斜率是 8% 就意味着，在地图上每 100 米的距离高度差是 8 米（参看线性函数）。

余切、正割和余割　因为一般来说在三个距离之间存在六个比值，因而在长度 s, h, e 和角 α 之间还可以再定义三个关系。在这三个关系中，余切是正切的倒数，而剩下的两个正割和余割通常极少使用，例如在天文学和航海学中就是如此。

正弦：$\sin\alpha=\frac{h}{s}$，　余弦：$\cos\alpha=\frac{e}{s}$；

正切：$\tan\alpha=\frac{h}{e}$，　余切：$\cot\alpha=\frac{e}{h}$；

正割：$\sec\alpha=\frac{s}{e}$，　余割：$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{s}{h}$。

在斜边为 c 的直角三角形 ΔABC 中（见图 10.1-5），边 a 跟角 α 相对，叫做对边，而边 b 跟角 α 相邻，叫做邻边，这样，六个三角函数的定义是：

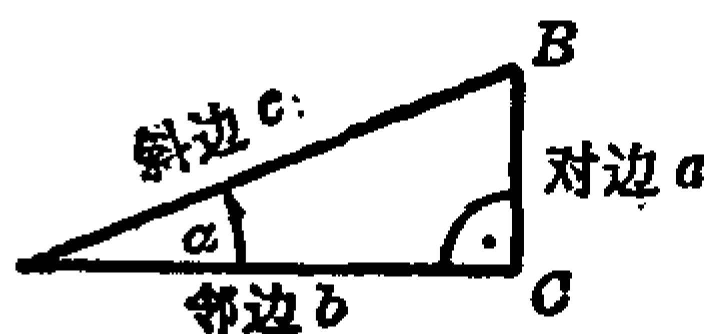


图 10.1-5　在直角三角形中的角 α

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{对边}{斜边},\ \tan\alpha=\frac{a}{b}=\frac{对边}{邻边},\quad \sec\alpha=\frac{c}{b}=\frac{斜边}{邻边},$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{邻边}{斜边},\ \cot\alpha=\frac{b}{a}=\frac{邻边}{对边},\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{c}{a}=\frac{斜边}{对边}。$$

从直角三角形不难指出：在这些三角函数之间成立几个关系式(见图10.1-5)。其实对任意角 α，它们也成立：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \tan\alpha\cot\alpha=1,\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cot\alpha},\quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}$$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

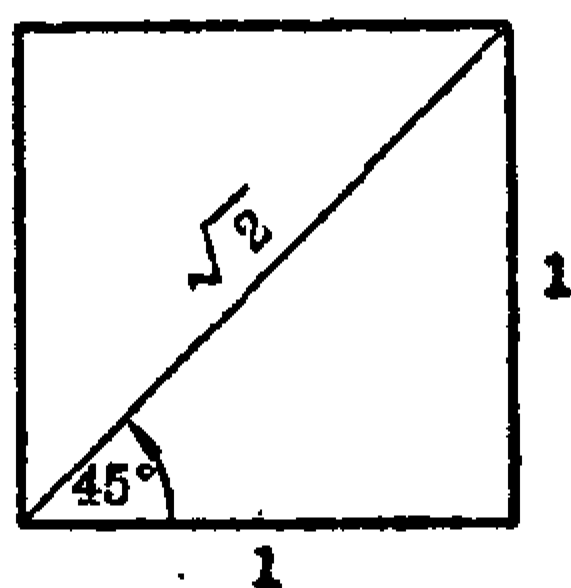


图 10.1-6　边长为 1 的正方形

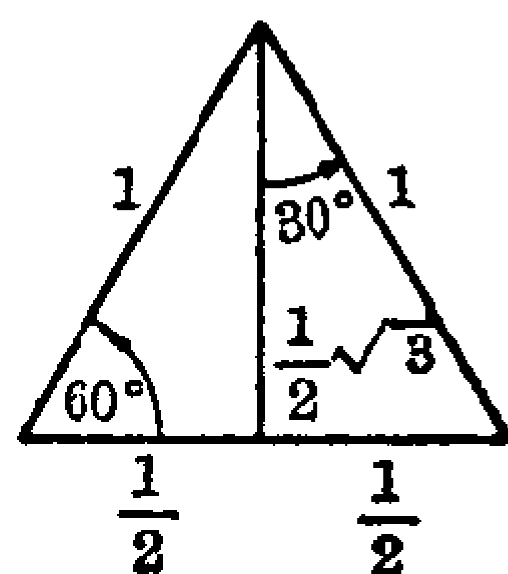


图 10.1-7　边长为 1 的等边三角形

在边长为 1，对角线 $d=\sqrt{2}$ 的正方形中，有一个 45° 的角；而在边长为 1，高 $h=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 的等边三角形中，有 30° 和 60° 的角(见图 10.1-6，图 10.1-7)。对四个常用的三角函数，其值如表所示。这些值计算到小数点后四位。

函　数	$\varphi=30°$	$\varphi=45°$	$\varphi=60°$	函　数	$\varphi=30°$	$\varphi=45°$	$\varphi=60°$
$\sin\varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sin\varphi$	0.5000	0.7071	0.8660
$\cos\varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\cos\varphi$	0.8660	0.7071	0.5000
$\tan\varphi$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\tan\varphi$	0.5774	1.0000	1.7321
$\cot\varphi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\cot\varphi$	1.7321	1.0000	0.5774

这些值中只有少数是**有理数**，而余下来的值是**无理数**，然而是**代数数**。应用由加法定理导出的性质，通过代数运算可得到角 $\frac{\varphi}{2}$，$\frac{\varphi}{4}$，… 和

角 2φ, 3φ, 4φ, 5φ, …的三角函数值。一般而言三角函数的值是**超越数**，其值可以通过无穷级数的计算而达到所想要的任意精度。

任意角三角函数的定义

不仅仅是锐角，任意大小角度的正弦、余弦、正切和余切等三角函数的定义是根据**笛卡尔坐标系**的考虑而建立的(见图 10.1-8)，一般是左手系，这时逆时针的旋转方向看作是**正向旋转**。

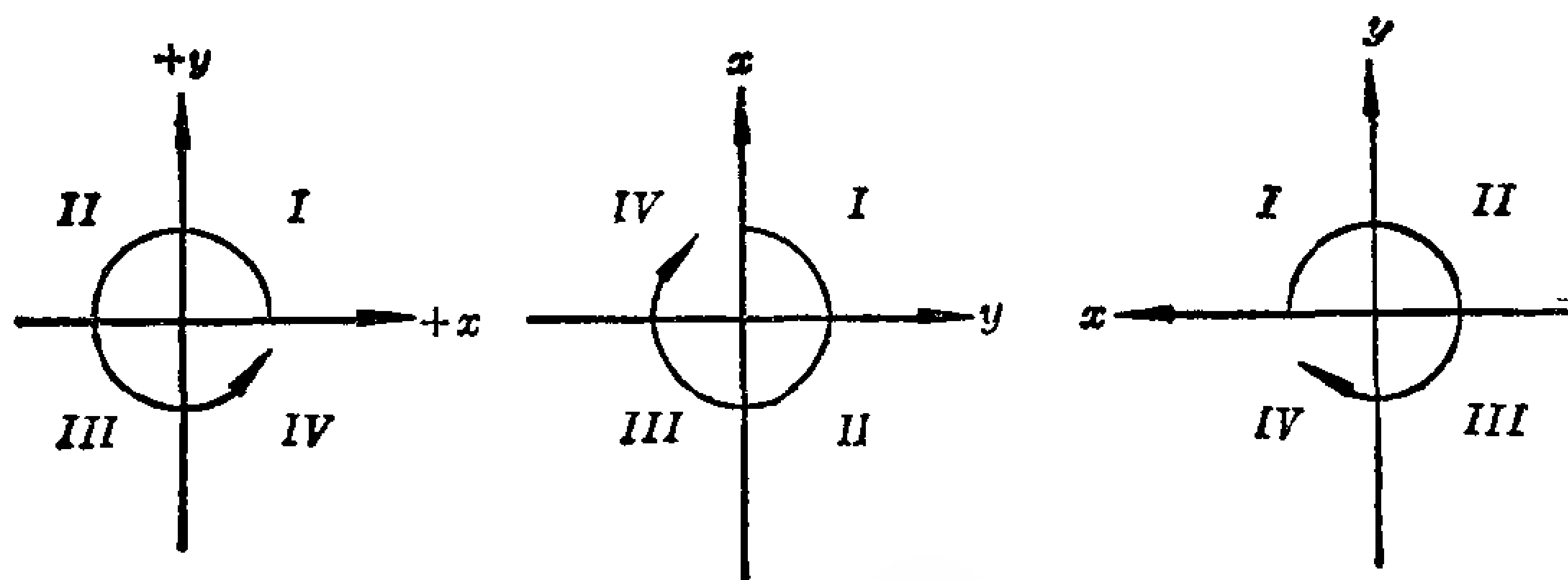


图 10.1-8 直角坐标系

在*采矿几何学和地球物理学*中，常常使用*右手系*，其 x 轴指向北方，而 y 轴指向东方，这里的旋转正向是顺时针方向。在图 10.1-8 中画出了几种可能的直角坐标系。

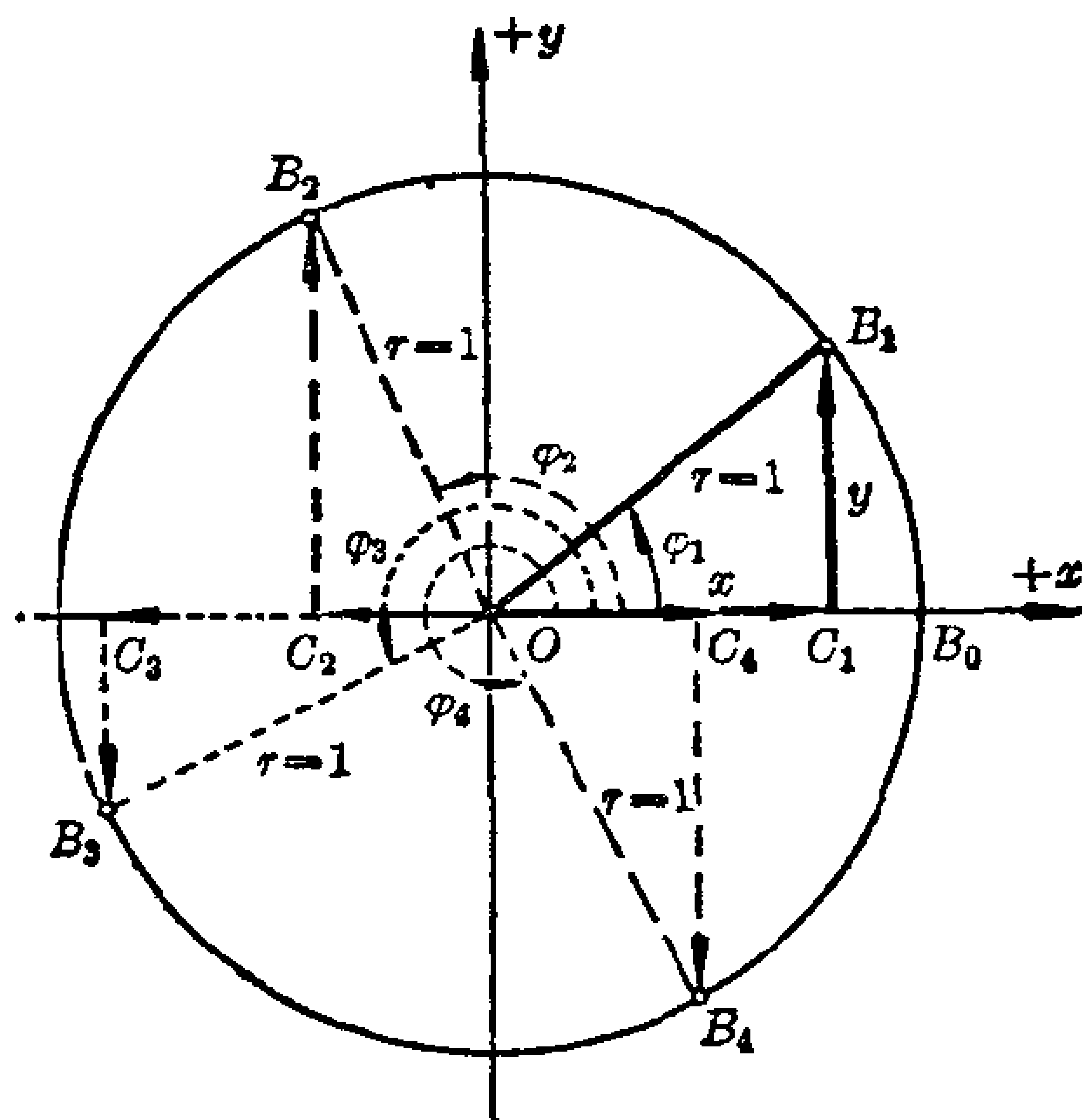


图 10.1-9 在半径 $r=1$ 的圆上，三角函数的定义

单位圆上的定义 在平面笛卡尔坐标系中，角 φ 能跑遍所有四个象限。其大小可以用度数、用新度或者叫**十进度**、或用弧度来度量(参看 I.第 7 章)。它的动臂跟单位圆 (即半径 $r=1$，圆心在原点 O 的圆)相交于点 B_1(见图 10.1-9)。对于 x 轴跟单位圆的交点 B_0，φ 的值是零。当角 φ 的动臂围绕原点旋转一周时，φ 的值跑遍从 $0°$ 到 $360°$，或 0^g 到

400^g，或 0 到 2π 中的所有值。所导出的关系对数值大于 2π 的角仍然成立的，因为这些角对应的点 B_i 和在 0 到 2π 中的角具有相同的位置。点 B_i(例如 B_1, B_2 或 B_3)的位置由它的坐标所决定。**横坐标是一条特殊的半径 $r=1$ 在 x 轴上的正投影，而纵坐标是这条半径在 y 轴上的正投影。**如对点 B_3 而言，这两个坐标的符号都是负的，即 $\overrightarrow{OC_3}$ 的方向跟 x 轴的方向相反，而 $\overrightarrow{C_3B_3}$ 的方向跟 y 轴的方向相反(见图 10.1-9)。在第一象限中，前面已经给出的正弦、余弦、正切和余切的定义，从三角形 OC_1B_1 来看，仍然有效。对于所有的各个象限，即对于点 B_i 的所有位置，约定所有定义仍然保持有效：

$$\sin\varphi=\frac{\text{纵坐标}}{\text{半径}},\quad \cos\varphi=\frac{\text{横坐标}}{\text{半径}},$$

$$\tan\varphi=\frac{\text{纵坐标}}{\text{横坐标}},\quad \cot\varphi=\frac{\text{横坐标}}{\text{纵坐标}}。$$

符 号 表

函 数	象	限		
	I	II	III	IV
$\sin\varphi$	+	+	−	−
$\cos\varphi$	+	−	−	+
$\tan\varphi$	+	−	+	−
$\cot\varphi$	+	−	+	−

在这些定义中，横坐标和纵坐标在不同象限里有不同的符号，但是半径永远是正的。这样，在图 10.1-9 中，$\sin\varphi_2$, $\tan\varphi_3$, $\cot\varphi_3$ 和 $\cos\varphi_4$ 是正的，而 $\cos\varphi_2$, $\tan\varphi_2$, $\cot\varphi_2$, $\sin\varphi_3$, $\cos\varphi_3$, $\sin\varphi_4$, $\tan\varphi_2$ 和 $\cot\varphi_4$ 是负的。上面这张符号表给出了四个三角函数在所有象限中的符号。

上面所描述的过程，把定义的有效范围扩充到新范围(第 I, II, III, IV 象限)，并使得在原定义范围(第I象限)所适合的关系在新范围内仍然保持有效。这一过程(不变性原理)在数学中是常用的。特别是最初引进三角函数时所建立的三角函数之间的关系，现在对角 φ 的所有值都适合。

对角 $0°$, $90°\left(100^g, \frac{\pi}{2}\right)$, $180°(200^g, \pi)$, $270°\left(300^g, \frac{3\pi}{2}\right)$ 和 $360°$ $(400^g, 2\pi)$，由于这些角的横坐标和纵坐标取值 0, +1 或 −1，因而也可

另一方面，如果φ从大于$90°$的值趋近$90°$，那末

$$\lim_{\varphi_2\to 90°}\tan\varphi_2=\lim_{|OC_2|\to 0}\frac{|C_2B_2|}{-|OC_2|}=-\infty。$$

当角φ沿增加的方向通过$\varphi=90°$时，正切函数的值从$+\infty$跳到$-\infty$。因此对$\varphi=90°$本身，正切函数没有定义。在这种情况下，记号简写为$\tan 90°=\pm\infty$。正切函数在$\varphi=\frac{3\pi}{2}$，余切函数在$\varphi=0$和$\varphi=\pi$，都会出现类似的跳跃间断。因为单位圆半径之长为$r=+1$，因此正弦和余弦分别由（带有适当符号的）纵坐标和横坐标所给出，而正切函数和余切函数也能表示成分母值为1的两条线段之比。角φ的动臂和单位圆在$B_0(x=1)$处的切线相交，截下的有向线段的有符号数值可读作正切的值。由截距定理（见图10.1-10）：

$$\tan\varphi_2=\frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}=\frac{\overrightarrow{C_2B_2}}{\overrightarrow{OC_2}}=\frac{\overrightarrow{B_0D_2}}{\overrightarrow{OB_0}}=m(\overrightarrow{B_0D_2}),$$

$$\tan\varphi_1=\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{\overrightarrow{C_1B_1}}{\overrightarrow{OC_1}}=\frac{\overrightarrow{B_0D_1}}{\overrightarrow{OB_0}}=m(\overrightarrow{B_0D_1}),$$

$$\tan\varphi_3=\frac{\sin\varphi_3}{\cos\varphi_3}=\frac{\overrightarrow{C_3B_3}}{\overrightarrow{OC_3}}=\frac{\overrightarrow{B_0D_3}}{\overrightarrow{OB_0}}=m(\overrightarrow{B_0D_3}),$$

$$\tan\varphi_4=\frac{\sin\varphi_4}{\cos\varphi_4}=\frac{\overrightarrow{C_4B_4}}{\overrightarrow{OC_4}}=\frac{\overrightarrow{B_0D_4}}{\overrightarrow{OB_0}}=m(\overrightarrow{B_0D_4})。$$

同样余切值可以看成是角φ的动臂和单位圆在点$F(y=1)$的切线相交所截下的有向线段的带符号数值。再由截距定理：

$$\cot\varphi_2=\frac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi_2}=\frac{\overrightarrow{OC_2}}{\overrightarrow{C_2B_2}}=\frac{\overrightarrow{OE'_2}}{\overrightarrow{E'_2E_2}}=m(\overrightarrow{FE_2}),$$

$$\cot\varphi_1=\frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}=\frac{\overrightarrow{OC_1}}{\overrightarrow{C_1B_1}}=\frac{\overrightarrow{OE'_1}}{\overrightarrow{E'_1E_1}}=m(\overrightarrow{FE_1}),$$

$$\cot\varphi_3=\frac{\cos\varphi_3}{\sin\varphi_3}=\frac{\overrightarrow{OC_3}}{\overrightarrow{C_3B_3}}=\frac{\overrightarrow{OE'_3}}{\overrightarrow{E'_3E_3}}=m(\overrightarrow{FE_3}),$$

$$\cot\varphi_4=\frac{\cos\varphi_4}{\sin\varphi_4}=\frac{\overrightarrow{OC_4}}{\overrightarrow{C_4B_4}}=\frac{\overrightarrow{OE'_4}}{\overrightarrow{E'_4E_4}}=m(\overrightarrow{FE_4})。$$

进行作图的。在下面图10.1-12中，为了能把所有象限的曲线图象都画出来，因此把标尺缩小了一半。

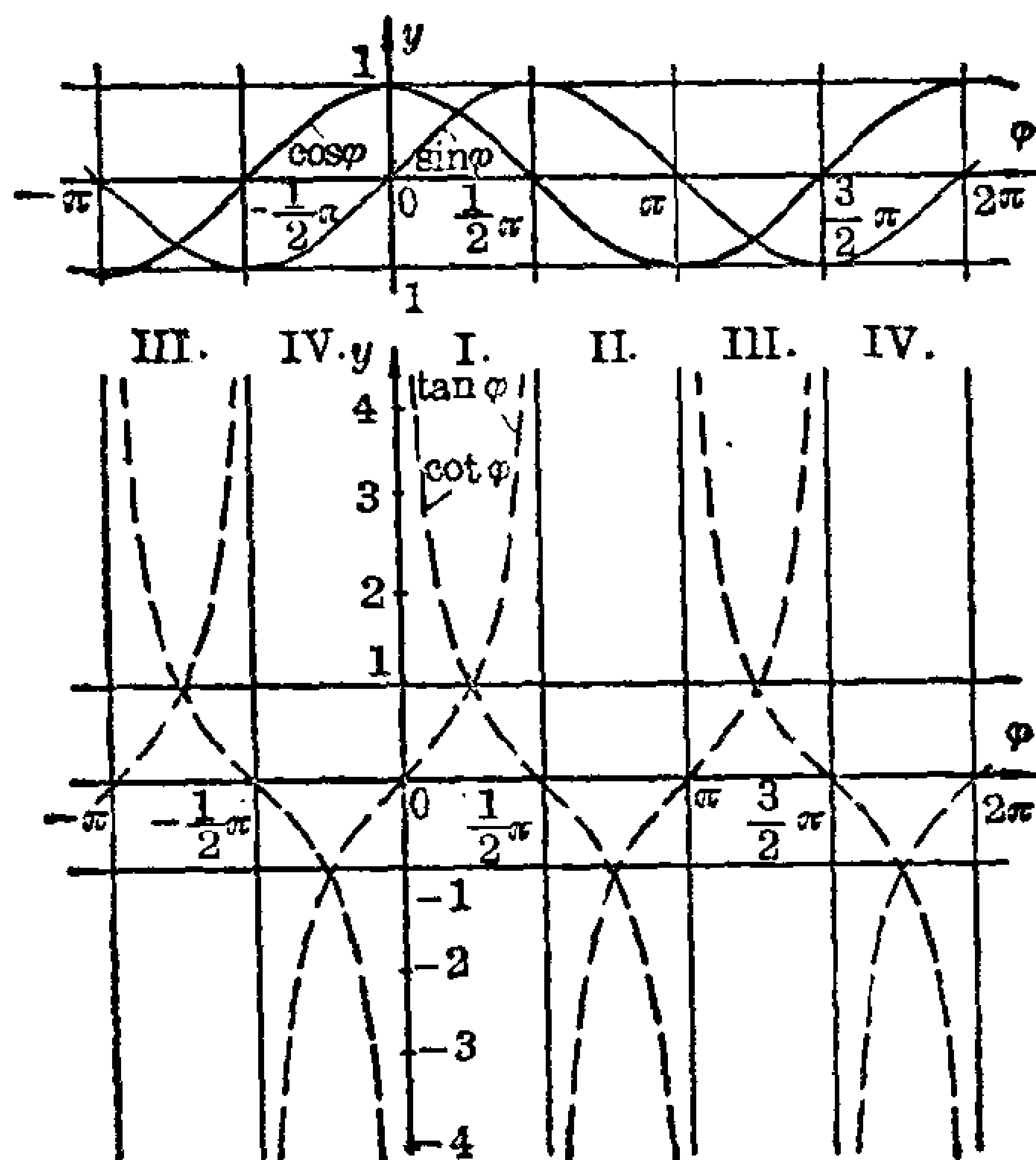


图 10.1-12 在四个象限中(幅角用弧度计量)
三角函数的图象表示

三角函数的性质

从表示三角函数图象的两个图中，可以看出这些三角函数的一些性质，其正确性一般是通过单位圆来加以证明的。以后会看到，角度值可以取任意的正负数值。

三角函数的周期性和值域 三角函数是周期函数。正弦函数和余弦函数的周期是 $2\pi(360°, 400^g)$；正切函数和余切函数的周期是 $\pi(180°, 200^g)$。在单位圆中，角 $(\varphi \pm 2n\pi)$ 的自由臂都在同一位置上，因此它们的三角函数有相同的值。

$$\sin(\varphi \pm 2n\pi) = \sin\varphi; \quad \cos(\varphi \pm 2n\pi) = \cos\varphi; \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

单位圆的示意图(图10.1-10)还进一步说明，所有角 $(\varphi \pm n\pi)$ 的自

由臂跟单位圆分别在 $x=1$ 和 $y=1$ 的切线相交于同一点，因此这些角的正切函数和余切函数全都有相同的值。

$$\begin{array}{|ll|}\hline \tan(\varphi\pm n\pi)=\tan\varphi; & \\ & n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \\ \cot(\varphi\pm n\pi)=\cot\varphi; & \\ \hline\end{array}$$

正弦函数和余弦函数在它的定义域的一个子区间，比如 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ 中可取遍所有的函数值；而正切函数和余切函数在一个更小的区间，比如 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 中就能取到所有的函数值。在这样一个区间中，函数 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 的值在 -1 和 $+1$ 之间摆动；但函数 $\tan\varphi$ 和 $\cot\varphi$ 的值可以取 $-\infty$ 和 $+\infty$ 之间的所有值。

$$\begin{array}{|lcl|}\hline -1\leqslant\sin\varphi\leqslant+1 & \text{或} & |\sin\varphi|\leqslant 1 \\ -1\leqslant\cos\varphi\leqslant+1 & \text{或} & |\cos\varphi|\leqslant 1 \\ \hline\end{array}$$

切线的斜率　按照微分学的法则，函数在它图象每一点处的导数给出这条曲线在这一点切线的斜率。

$$\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}=\cos\varphi,\quad \frac{d\cos\varphi}{d\varphi}=\sin\varphi,$$

$$\frac{d\tan\varphi}{d\varphi}=\frac{1}{\cos^2\varphi},\quad \frac{d\cot\varphi}{d\varphi}=-\frac{1}{\sin^2\varphi}.$$

因为 $\left[\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\right]_{\varphi=0}=\left[\frac{d\tan\varphi}{d\varphi}\right]_{\varphi=0}=+1$，所以正弦曲线和正切曲线在点 $\varphi=0$ 处和 φ 轴的交角是 $45°$。但是，当角度增加时，因为 $\cos\varphi$ 值变小，因此正弦曲线在这条切线下面变动，而正切曲线则在这条切线上面变动。在点 $\varphi=\pi$ 处，这两条曲线互相垂直。对点 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，余弦曲线和余切曲线有一条跟正 φ 轴交成角 $-45°$ 的共同切线：$\left[\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{d\cot\varphi}{d\varphi}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=-1$。当角度增加时，余弦曲线从上面离开这条切线，而余切曲线从下面离开这条切线。对 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$，这两条曲线相交成直角。正弦曲线在 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 和 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ 处有平行于 φ 轴的切线，而余弦曲线在 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 处有平行于 φ 轴的切线。

在第Ⅰ象限中，从正弦曲线和正切曲线的切线变化过程可建立下面

估计: $\sin\varphi<\operatorname{arc}\varphi<\tan\varphi$,这里 $\operatorname{arc}\varphi$ 是角 φ 的弧度。在图 10.1-11 中,$\operatorname{arc}\varphi$ 是用跟王 φ 轴相交成 45° 角的一条直线来表示的。

偶函数和奇函数 函数 $\cos\varphi$ 是偶函数,因为对正负角 φ,它有相同的函数值: $f(-\varphi)=f(\varphi)$ (见图 10.1-13)。但是正弦函数、正切函数和余切函数是奇函数。因为 $f(-\varphi)=-f(\varphi)$,正角的函数值和负角的函数值绝对值相等,但符号相反,因此它们的曲线关于原点中心对称(图 10.1-14)。这些很有用的关系可从单位圆看出。

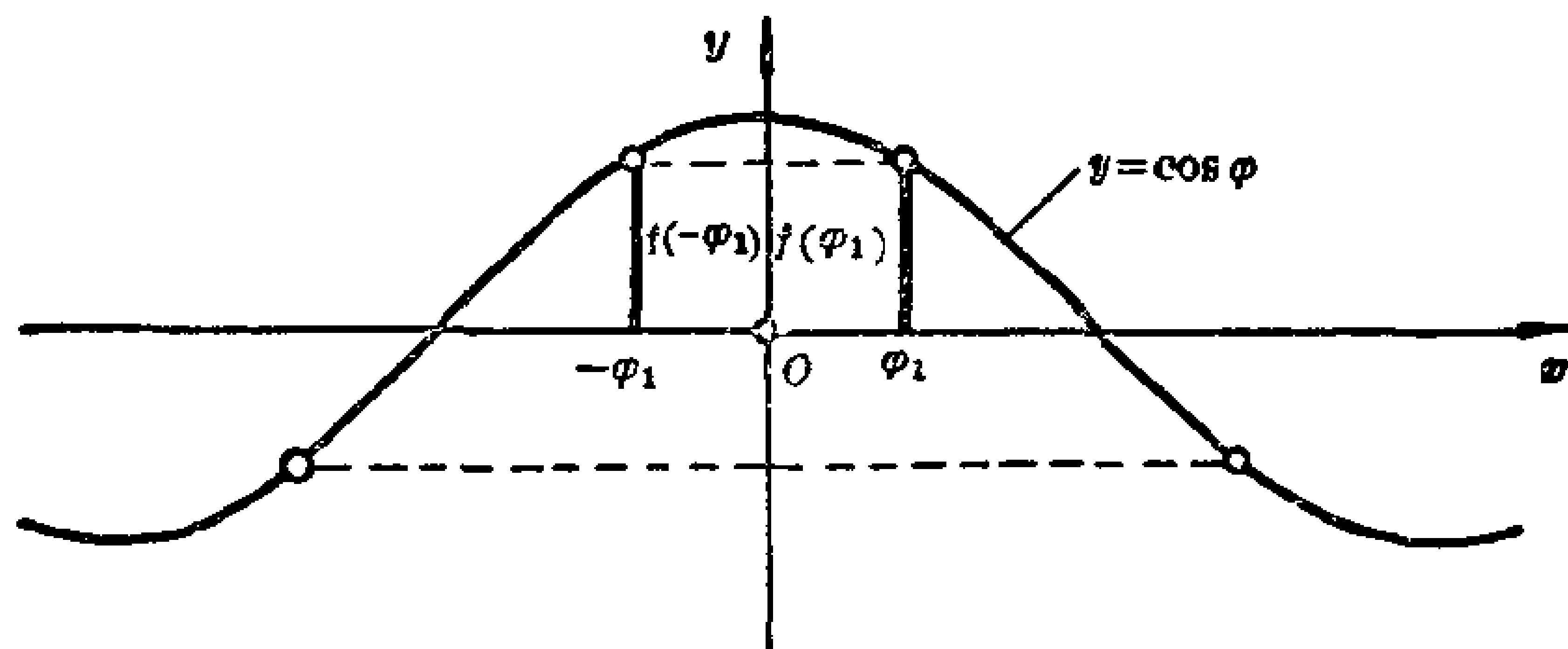


图 10.1-13 偶函数 $y=\cos\varphi=\cos(-\varphi)$ 的图形表示

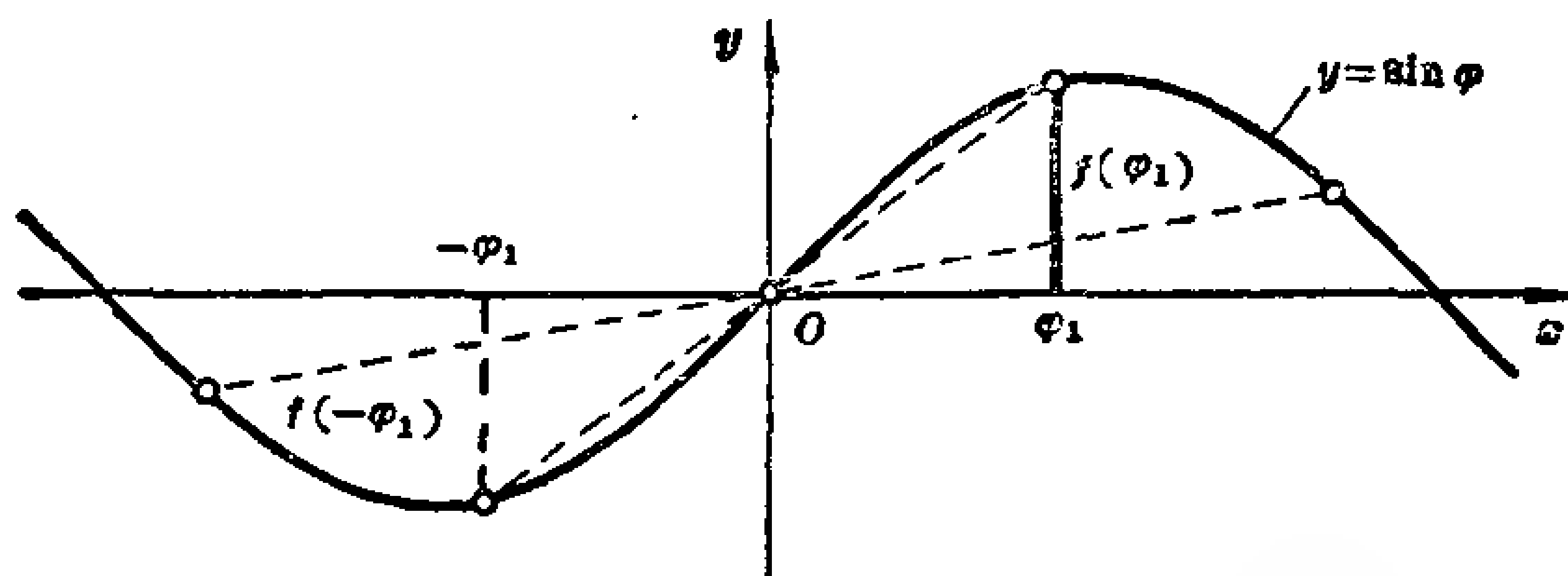


图 10.1-14 奇函数 $y=\sin\varphi=-\sin(-\varphi)$ 的图形表示

偶 函 数
$\cos(-\varphi)=\cos\varphi$
奇 函 数
$\sin(-\varphi)=-\sin\varphi$ $\tan(-\varphi)=-\tan\varphi$ $\cot(-\varphi)=-\cot\varphi$

由于这些性质,只需要知道在半个周期长度的子区间内的函数值,就能给出整个区间的函数值。例如对角度值从 0 到 π 和从 2π 到 π 而言,

其余弦函数所经过的值是完全相同的；如用符号来表示，即 $\cos\varphi=\cos(2\pi-\varphi)$，$\varphi\leqslant\pi$。这样，$\varphi$ 在 0 到 π 之间取得了所有的函数值。类似地，对三个奇三角函数，也只要知道在一个子区间内的值就足够了：对 $\sin\varphi$ 是从 0 到 π，对 $\tan\varphi$ 和 $\cot\varphi$ 而言是从 0 到 $\frac{\pi}{2}$。

从函数和它的余函数之间的关系，以及象限之间的关系可以知道，要计算所有其他三角函数的值只要知道 $\sin\varphi$ 在 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 中的值就足够了(见图 10.1-15)。为了简化计算、便于实用，在给出 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 中的正弦值时还给出正切值。

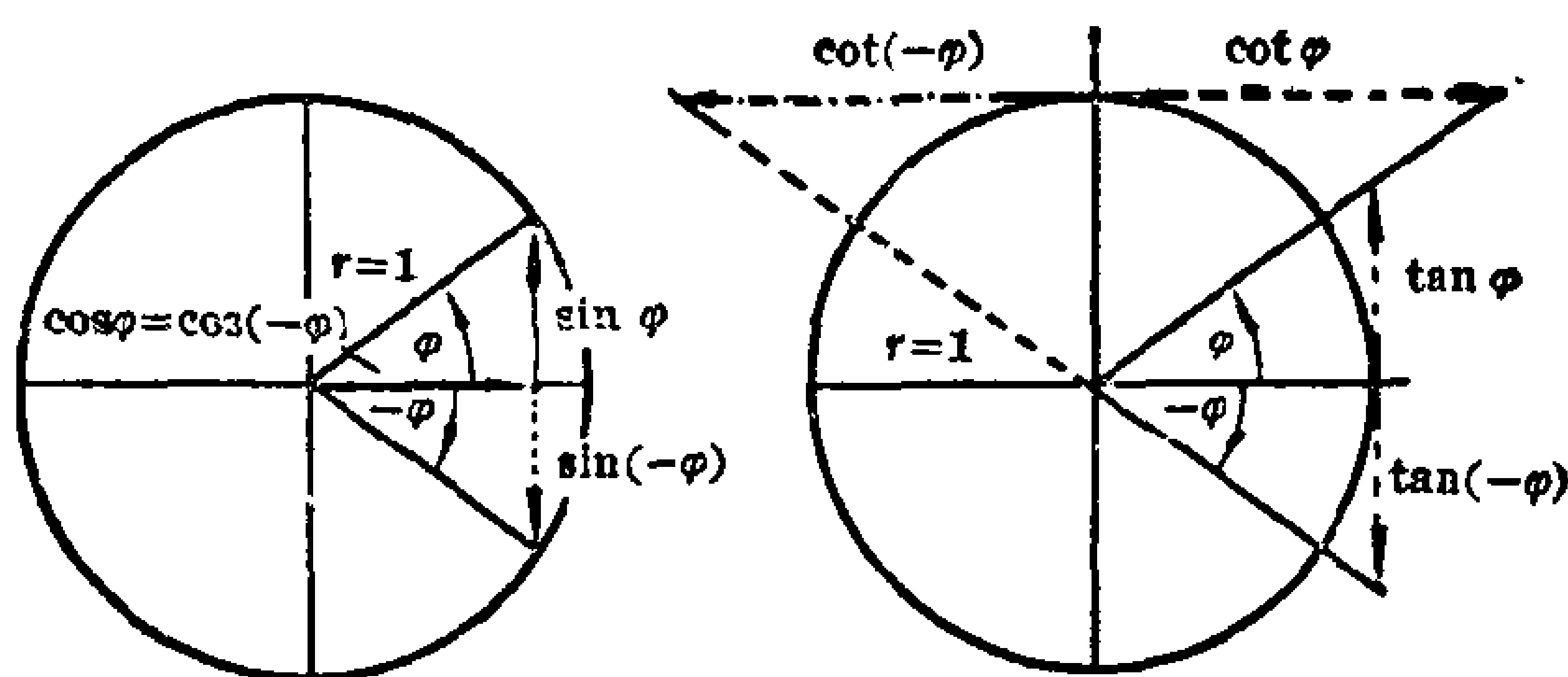


图 10.1-15　负角的正弦、余弦、正切和余切

同一角度的各三角函数之间的关系　由导论中建立的关系，每一个三角函数，能用具有相同幅角的其他任何一个三角函数来表示。例如我们用 $\cos\varphi$ 来表示 $\sin\varphi$ 或 $\cot\varphi$ 就得到：

1. $\sin\varphi=\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$；

2. $\cot\varphi=\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\dfrac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$。

下页表格包含了所有这些关系。

对于在第 I 象限中的角，根式取正号。而在其余象限中，根式前面的符号由符号表或单位圆决定。

【例】　在第 III 象限中，$\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 是负的，但是 $\tan\varphi$ 和 $\cot\varphi$ 是正的。因此对 $\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$，表中的第二行就是

$$\cos\varphi=-\sqrt{1-\sin^2\varphi}=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=-\frac{\cot\varphi}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}。$$

所需要求的	已给出的			
	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$
$\sin\varphi=$	$\sin\varphi$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	$\dfrac{\tan\varphi}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
$\cos\varphi=$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$	$\cos\varphi$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\dfrac{\cot\varphi}{\pm\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
$\tan\varphi=$	$\dfrac{\sin\varphi}{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$	$\tan\varphi$	$\dfrac{1}{\cot\varphi}$
$\cot\varphi=$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$	$\dfrac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$	$\dfrac{1}{\tan\varphi}$	$\cot\varphi$

函数和余函数 余弦这个词的意思就是余正弦，即余角的正弦。类似地，余切和余割其意思分别是余角的正切和正割。给定了一个锐角α，它的余角β是使$\alpha+\beta$成一个直角的角。直角能用度数、新度或者弧度来度量。这样，如果α和β用弧度来表示，则$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$。因此余弦、余切和余割的数学含义就是

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\beta,$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sec\beta,$$

$$\cot\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\beta。$$

$$1\text{个直角}=90^\circ=100^g=\frac{\pi}{2}\text{弧度}$$

在直角三角形中，a和b分别是α和β的对边，则很显然立刻可得

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\cos\beta,\quad \cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\beta,$$

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}=\cot\beta,\quad \cot\beta=\frac{b}{a}=\tan\beta。$$

除此之外，我们还看到$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，$\tan\alpha=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，$\sec\alpha=\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，因此正弦函数是余弦函数的余函数，而正切函数

和正割函数分别是余切函数和余割函数的余函数。

每一个三角函数当幅角从0增加到$\frac{\pi}{2}$时，所取的函数值跟它的余函数当幅角从$\frac{\pi}{2}$减少到0时所取函数值完全相同。

象限关系　幅角只相差一个直角或是直角整倍数的三角函数之间成立某种关系式，即所谓的象限关系。

四分之一(象限)旋转定理。通过旋转四分之一周，或者说在幅角φ上加上一个直角，一个象限就转移到下面的一个象限上去(见图10.1-16)。在这个旋转的作用下，横坐标和余弦值分别变成了具有同样

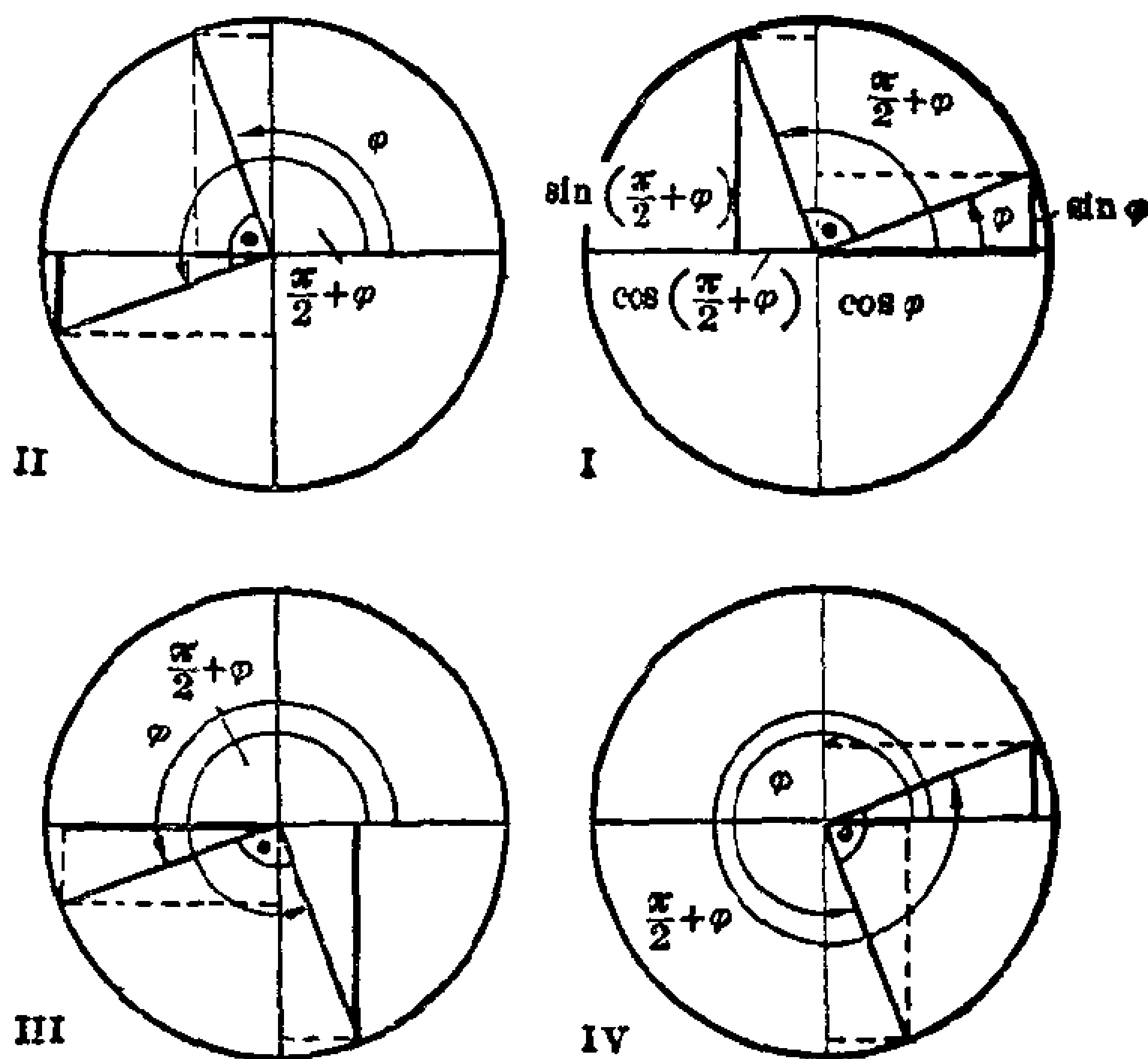


图 10.1-16　$\frac{1}{4}$(象限)旋转定理

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi$$

绝对值的纵坐标和正弦值，反过来，纵坐标和正弦值分别变成了具有同样绝对值的横坐标和余弦值，即$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right|=|\cos\varphi|$，$\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right|=|\sin\varphi|$。正的$\cos\varphi$位于正$x$轴上，旋转后成为$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$位于正$y$轴上，因此是正的，类似地位于负$x$轴上的负$\cos\varphi$，旋转一个直角后

变成位于负 y 轴上的负 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$，因此有 $\cos\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$。另一方面，正的 $\sin\varphi$ 在旋转后从正 y 轴上变成在负 x 轴上，而负的 $\sin\varphi$ 从负的 y 轴上变成在正 x 轴上，结果就有 $\sin\varphi=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$。

在坐标系中，对正角 φ 和负角 $-\psi$，如果满足 $\varphi+\psi=\frac{4\pi}{2}=2\pi$，则它们对应的单位圆半径在同一位置上，因此如用 $-\psi$ 代替 φ，则三角函数就有相同的值：$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\cos(-\psi)=\cos\psi$，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=-\sin(-\psi)=\sin\psi$，因为 $\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ 和 $\cot\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$，因此也就有 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\cot\varphi$，$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\tan\varphi$，$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\cot\psi$，$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\tan\psi$。

这样就把函数和余函数之间的关系推广到了对一个任意角 ψ 都成立的一般场合。从几何图形看，等式 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\beta$ 就意味着将余弦曲线平移 $90°=\frac{\pi}{2}$，就是正弦曲线。

进一步的象限关系。 加上 $2\cdot\frac{\pi}{2}$ 就相当于旋转到再下一个象限，而加上 $\frac{3\pi}{2}$ 就相当于再旋转到更下面一个象限。这些情形的导出关系可以分别用 $\frac{\pi}{2}+\psi$ 或 $\frac{2\pi}{2}+\psi$ 来代替四分之一旋转定理中的 φ 而得到。

【例】 1. $$\tan\left(\frac{2\pi}{2}+\psi\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\psi\right)=-\cot\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)=+\tan\psi。$$

2. $$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\psi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}+\psi\right)=-\sin\left(\frac{2\pi}{2}+\psi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\psi\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)=+\sin\psi。$$

也能够把四分之一旋转定理的公式应用到直角的倍数减去一个任意角 φ。

例如：$\sin\left(\frac{2\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$。

象限关系综合。由象限关系、角$\left(\frac{n\pi}{2}\pm\delta\right)$，其中$n=1, 2, 3, 4, \cdots$的三角函数能表示成角$\delta$的三角函数，其中$\delta$是一个任意角。令$\left(\frac{n\pi}{2}\pm\delta\right)=\Phi$，把象限关系一起收集在下列表中：

$\Phi=$	$\frac{\pi}{2}-\delta$	$\frac{\pi}{2}+\delta$	$\frac{2\pi}{2}-\delta$	$\frac{2\pi}{2}+\delta$	$\frac{3\pi}{2}-\delta$	$\frac{3\pi}{2}+\delta$	$\frac{4\pi}{2}-\delta$	$\frac{4\pi}{2}+\delta$
$\sin\Phi$	$\cos\delta$	$\cos\delta$	$\sin\delta$	$-\sin\delta$	$-\cos\delta$	$-\cos\delta$	$-\sin\delta$	$\sin\delta$
$\cos\Phi$	$\sin\delta$	$-\sin\delta$	$-\cos\delta$	$-\cos\delta$	$-\sin\delta$	$+\sin\delta$	$+\cos\delta$	$\cos\delta$
$\tan\Phi$	$\cot\delta$	$-\cot\delta$	$-\tan\delta$	$+\tan\delta$	$+\cot\delta$	$-\cot\delta$	$-\tan\delta$	$\tan\delta$
$\cot\Phi$	$\tan\delta$	$-\tan\delta$	$-\cot\delta$	$+\cot\delta$	$+\tan\delta$	$-\tan\delta$	$-\cot\delta$	$\cot\delta$
象　限	I	II	II	III	III	IV	IV	I

这张表表明有下列规律：

1．当从$\frac{\pi}{2}$的奇数倍中加上或减去角δ时，即当角$\Phi=\frac{\pi}{2}\pm\delta$或$\Phi=\frac{3\pi}{2}\pm\delta$时，所求角$\Phi$的三角函数表示为$\delta$的余函数；

2．当从$\frac{\pi}{2}$的偶数倍中加上或减去角δ时，即当角$\Phi=\pi\pm\delta$或$\Phi=2\pi\pm\delta$时，所求Φ的三角函数就是δ的同一三角函数；

3．如果δ是一个锐角，那末角Φ的自由臂位于表的最后一行给出的象限里，Φ的三角函数的符号由这些象限根据单位圆上定义加以确定。

任意角Φ的三角函数，通过这张表就能跟锐角的三角函数联系起来。因为在实际问题中，特别是当角度用度、分和秒来表示时，只使用正的增量，所以$\Phi=\frac{\pi}{2}+\delta$，$\Phi=\frac{2\pi}{2}+\delta$和$\Phi=\frac{3\pi}{2}+\delta$这几列就特别有用。例如从表中即可知$\sin\left(\frac{2\pi}{2}+\delta\right)=-\sin\delta$，$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)=-\cot\delta$，$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\delta\right)=-\tan\delta$。

反函数　如果长度小于单位长度的有向线段$\overrightarrow{OF_1}$（或$\overrightarrow{OF_3}$），从原点出发标在y轴上（见图10.1-17），那么过点F_1（或F_3）平行于x轴的直

线，跟单位圆相交于两个点 B_1 和 B_2（或 B_3 和 B_4）。图 10.1-17 中表明 OB_1 和 OB_2 分别是两个角 φ_1 和 φ_2 的自由臂。这两个角的正弦函数值由线段 $\overrightarrow{OF_1}$ 的带符号数值给出，即 $\sin\varphi_1=\sin\varphi_2=m(\overrightarrow{OF_1})$。

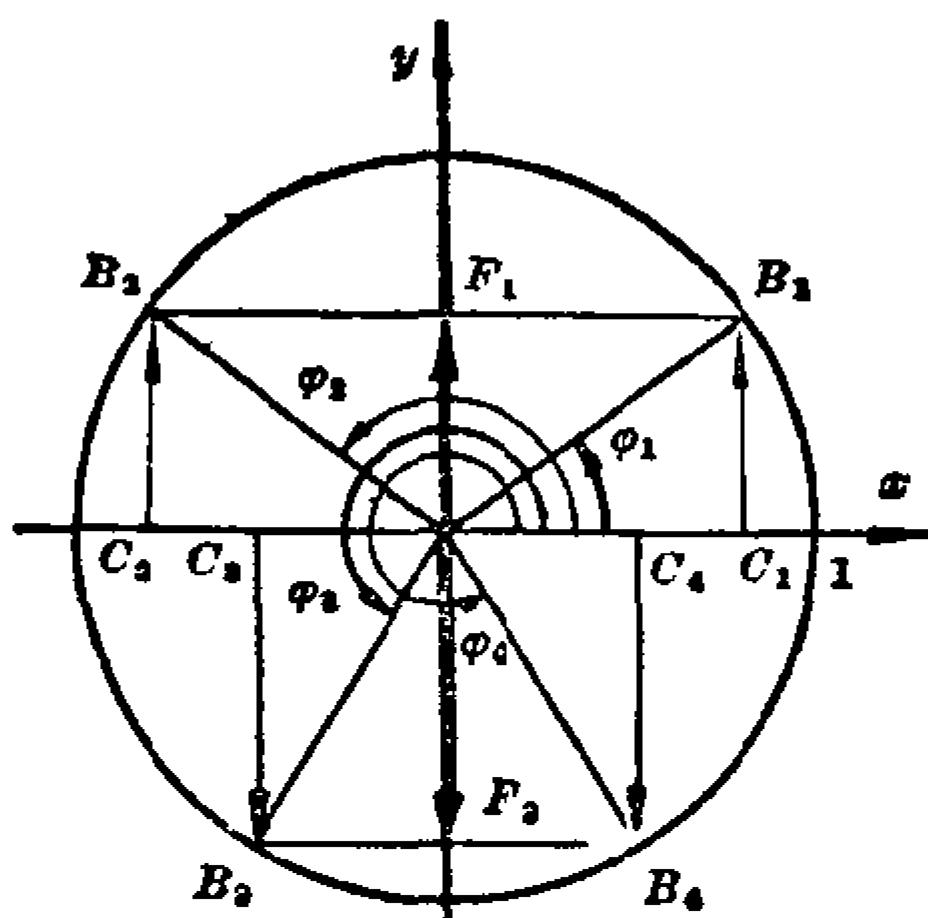


图 10.1-17 对两个给定的正弦值作出对应的角

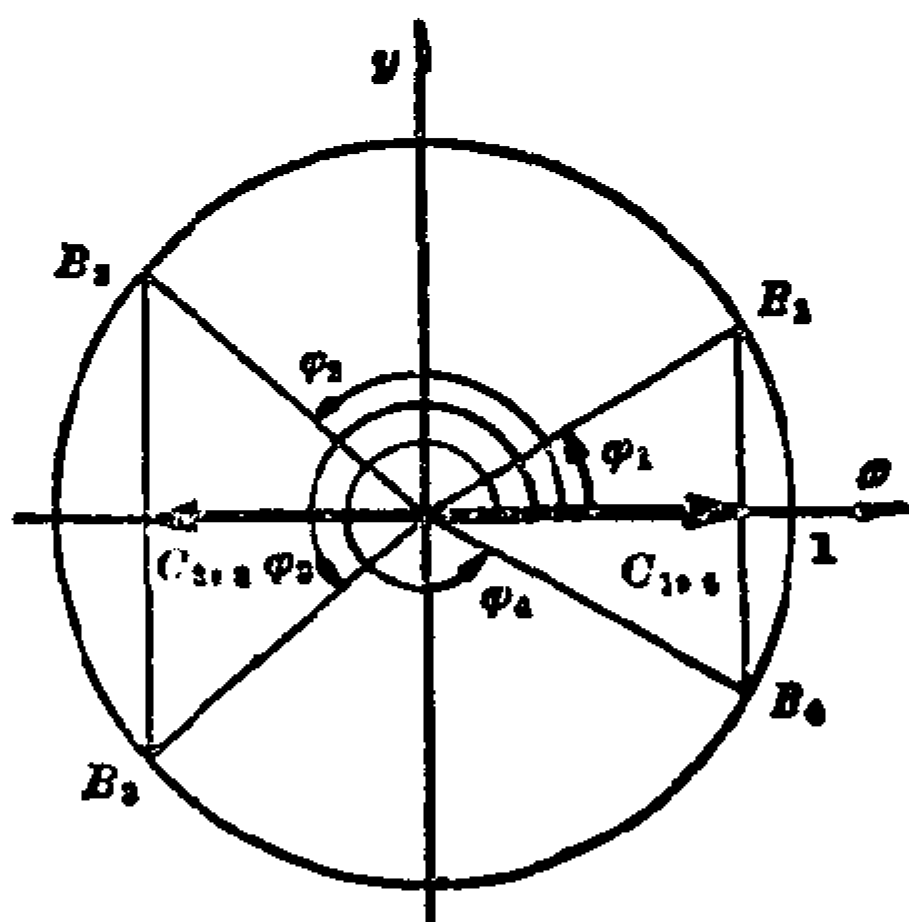


图 10.1-18 对两个给定的余弦值作出对应的角

同样 OB_3 和 OB_4 分别是角 φ_3 和 φ_4 的自由臂，这里 $\sin\varphi_3=\sin\varphi_4=m(\overrightarrow{OF_3})$. 这样，每一个 $|y|\leqslant 1$ 的数 y 都能表示为一个正弦函数的值，而如果 $|y|<1$，那末总有两个角满足方程 $y=\sin\psi$。当然，自由臂旋转一周从图中显然是无法区分的；因此，实际上有无穷多个解：

$\psi_1=\varphi_1\pm 2n\pi$ 和 $\psi_2=\varphi_2\pm 2n\pi$，对 $y>0$，

$\psi_1=\varphi_3\pm 2n\pi$ 和 $\psi_4=\varphi_4\pm 2n\pi$，对 $y<0$，$n=0, 1, 2, \cdots$

从 y 轴是对称轴可知，这些角满足方程

$$\varphi_1+\varphi_2=\pi,\quad \varphi_3+\varphi_4=3\pi。$$

同样，过 x 轴上长度为 x（其中 $|x|<1$）的有向线段的端点 $C_{1,4}$ 和 $C_{2,3}$ 作平行于 y 轴的平行线，得到两个角 φ_1 和 φ_4，或 φ_2 和 φ_3，分别是方程 $\cos\psi=x$ 的解（见图 10.1-18）。

$$\psi_1=\varphi_1\pm 2n\pi,\quad \psi_2=\varphi_4\pm 2n\pi,\quad n=0, 1, 2, \cdots$$

$$\psi_1=\varphi_2\pm 2n\pi,\quad \psi_2=\varphi_3\pm 2n\pi,\quad n=0, 1, 2, \cdots$$

这两个解满足条件 $\varphi_1+\varphi_4=2\pi$，或 $\varphi_2+\varphi_3=2\pi$。

从给定的余弦值或正弦值，可得到在区间 $0\leqslant\varphi<2\pi$ 中，角 ψ 的两个值；譬如，从 $y=\sin\psi$，得到值 φ_1 和 φ_2。从单位圆中我们看出角 ψ 可由其中一个函数的值和另一个函数的符号唯一地确定。由从加法定理导出的关系

式 $\tan\frac{\psi}{2}=\frac{\sin\psi}{1+\cos\psi}$ 可知半角的正切值足以唯一地确定角 ψ，其中 $0\leqslant\psi<2\pi$。

求一个角，使它的正切函数或余切函数分别取已知值 y 或 x，这个问题同样能在单位圆上用几何法获得解决(见图 10.1-19)。对应于数 y 的有向线段 $\overrightarrow{B_0D_{1,3}}$ 标在单位圆过 B_0 点的切线 ($x=1$) 上，而连接原点和端点 $D_{1,3}$ 的直线跟单位圆相交于点 B_1 和 B_3；我们就可看到 $\psi_1=\varphi_1\pm n\pi$，$n=0, 1, 2, \cdots$ 就是方程 $\tan\psi=y$ 的解。同样，对应于数 x 的有向线段 $\overrightarrow{FE_{2,4}}$ 标在单位圆过 F 点的切线 ($y=1$) 上，而连接原点跟端点 $E_{2,4}$ 的直线跟单位圆相交于点 B_2 和 B_4；$\psi_2=\varphi_2\pm n\pi$，$n=0, 1, 2, \cdots$ 就是方程 $\cot\psi=x$ 的解。

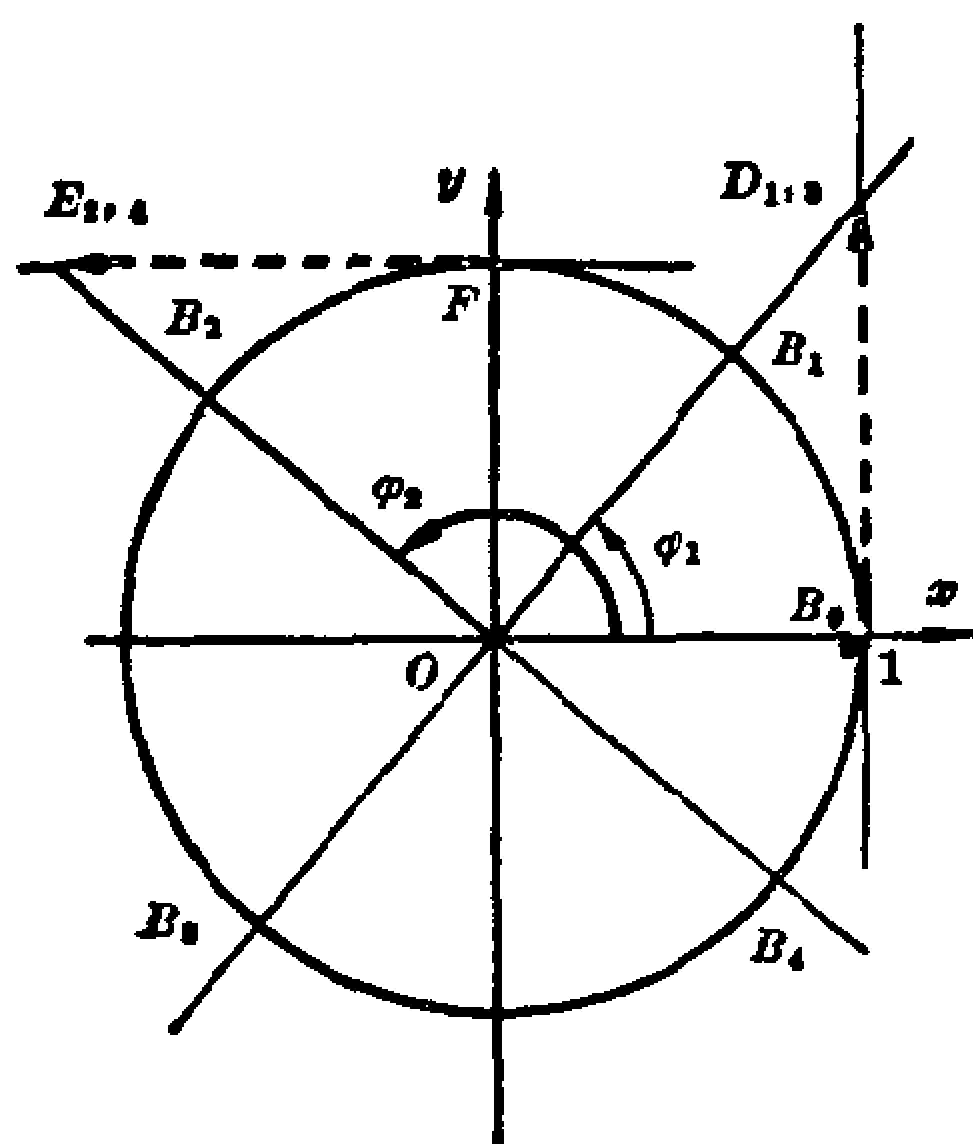


图 10.1-19　对正切和余切的一个给定值作出相应的角

一个函数，它能确定一个以弧度来度量的角度使它的三角函数值正好取已知的值，这个函数，我们称之为**圆函数**，或者叫**反三角函数**(参看 I. 第 5 章中的反函数)。

通常在导出反函数时把 x 和 y 的位置互换，y 表示其正弦值是 x 的一个角度 (以弧度度量)。由拉丁文短语 *arcus cuius sinus x est* (其正弦值是 x 的弧) 引出了 arc sin x 这一符号。在表中把这些函数的记号收集在一起。

三 角 函 数	反　函　数
$y=\sin x$	$y=\arcsin x=\sin^{-1}x$
$y=\cos x$	$y=\arccos x=\cos^{-1}x$
$y=\tan x$	$y=\arctan x=\tan^{-1}x$
$y=\cot x$	$y=\operatorname{arc\,cot} x=\cot^{-1}x$

取三角函数关于第 I 象限角平分线的镜象，就得到了它的反函数的图象

(见图 10.1-20, 图 10.1-21)。对应于函数的不同的单调区间，反函数有多种取值范围。反函数的主值用 Arc sin x, Arc cos x, Arc tan x 和 Arc cot x 来表示，这里

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arc} \sin x \leqslant +\frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \operatorname{Arc} \cos x \leqslant +\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc} \tan x < +\frac{\pi}{2}, \quad 0 < \operatorname{Arc} \cot x < +\pi_{\circ}$$

在使用记号 $y=\sin^{-1} x$ 时，必须小心不要跟三角函数的倒数相混淆，例如 $(\cos x)^{-1}=\frac{1}{\cos x}=\sec x$。

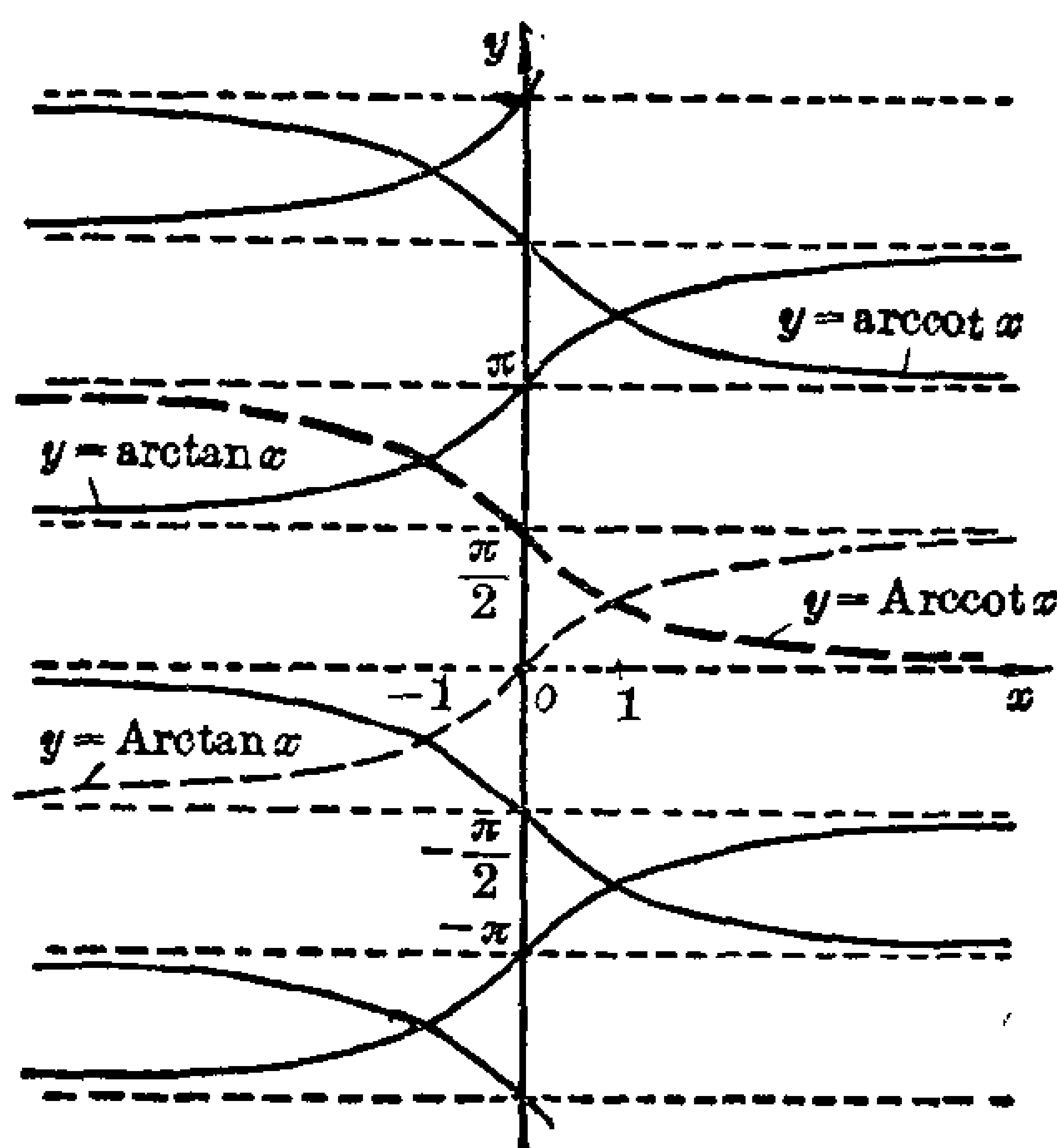


图 10.1-20 函数 $y=\operatorname{arc} \tan x$ 和 $y=\operatorname{arc} \cot x$ 的图形表示

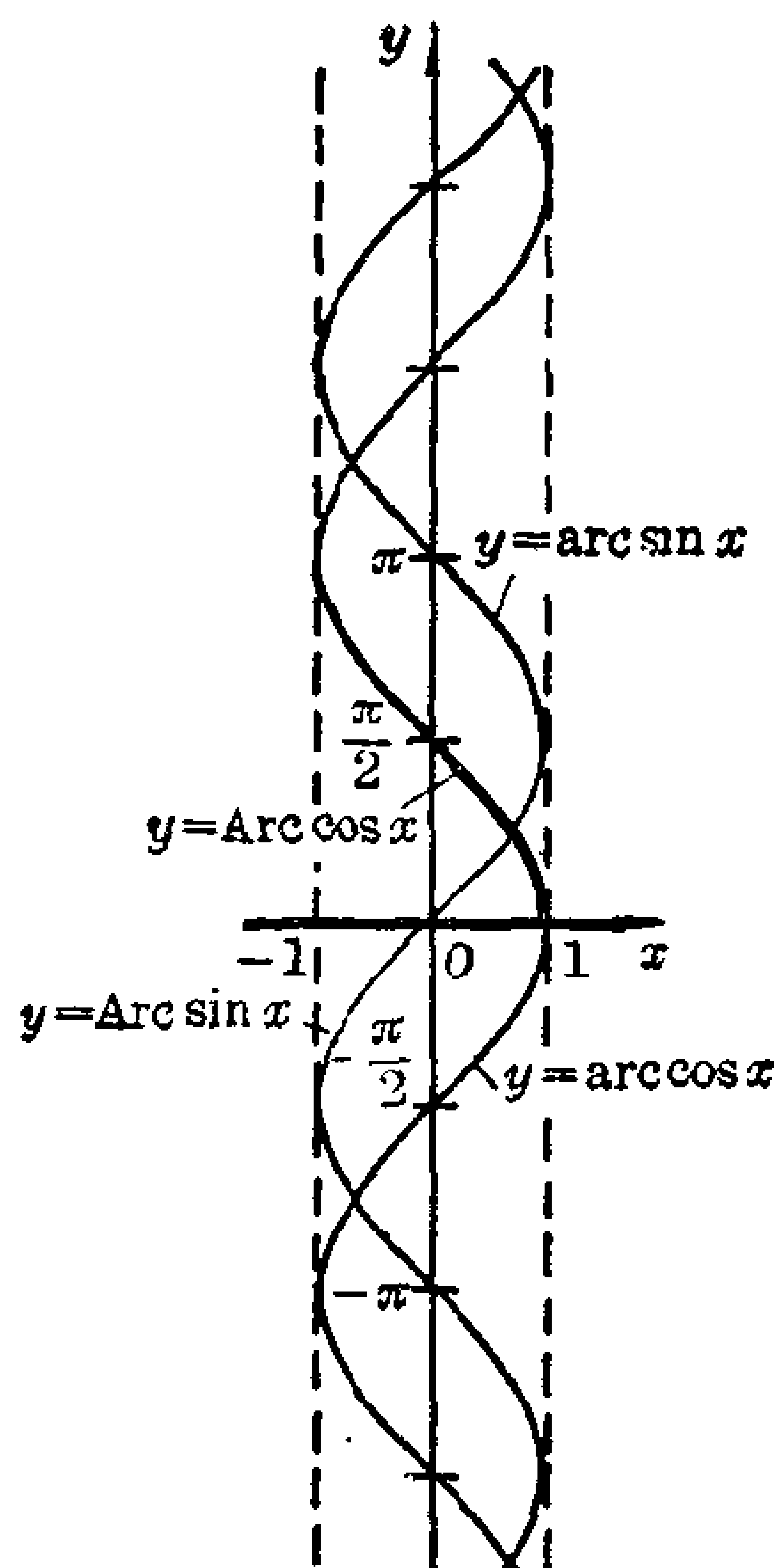


图 10.1-21 函数 $y=\operatorname{arc} \sin x$ 和 $y=\operatorname{arc} \cos x$ 的图形表示

三角函数表的用法

数表的安排和使用原则，对于把角度细分的所有方法来说都是一样的。因为现在广泛使用的数表是按度的十进分划编制的，因此根据这种情况进行解释。在下文中复制了部分 4 位数字用表。每一张表都有具体

的使用说明，特别对有 5, 6, 7 位的表更是如此。

查三角函数值　从复制在这里的表中可以看到，水平行跟垂直列的相交处就是所表示的函数值(见图 10.1-22)。例如，在图中"5"度这一行跟"0°.4"这一列相交就得到 $\sin 5.4° = 0.0941$，这就象标题所说的那样查到了三角函数的值。因为正弦函数的值都小于1(除了一个值 $1 = \sin 90°$ 外)，因此通常只要给出小数点后面位置上的数即可。三角函数的所有表都有**双重项**；即它们既能从左面和上面来读，也能从右面和下面来读。

NATURAL SINES

x	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5
0°	0.0000	0017	0035	0052	0070	0087
1	.0175	0192	0209	0227	0244	.0262
2	.0349	0366	0384	0401	0419	0436
3	.0523	0541	0558	0576	0593	0610
4	.0698	0715	0732	0750	0767	0785
5	0.0872	0889	0906	0924	0941	0958

图 10.1-22　当给出 α 时，查 $\sin\alpha$ 的值

其意思就是，行能够从上到下计算，列能够从左到右计算；或者也可以反过来，行从下向上计算，而列从左到右计算。在图中，$\sin 5.4° = 0.0941$ 这个值是按从左面和上面进行计算时，出现在第 5 行和 0°.4 这一列中的。而从右面和下面进行计算时，这个值出现在第 84 行和 .6 这一列中，由于 $5.4° + 84.6° = 90°$，这就给出了余函数的值，即 $\cos 84.6° = 0.0941$。用这个方法，一个函数和它的余函数的值都能放在同一张表中，从左面和上面计算就得到正弦和正切的值，而从右面和下面计算就得到余弦和余切的值。根据象限关系，只需要给出在第 I 象限中的函数值就足够了；而所需要的函数值的符号可以从符号表或单位圆加以确定。

因为计算机应用的发展，三角函数**自然值**表的重要性也在增长。在以前是使用**对数三角函数表**来进行精确计算的。在某些这种类型的表中，首数是加上了 10。例如 $\lg\sin 5.4° = 0.9736 - 2 = 8.9736 - 10$，而这种表给出数值 8.9736。由于负数是没有对数的，因此这些数表只有三角函数绝对值的对数。但在另一方面，三角函数的符号对所要计算的角度的大小起决定的作用，因此符号可以用放在对数值后面的 p(正的)或 n(负的)来表示(参看 I. 第 2 章有关对数计算的例子)。

【例 1】　当角 $\varphi_1 = 56.6°$ 时，可得到：

$$\sin 56.6° = 0.8348; \qquad \cos 56.6° = 0.5505;$$

$\tan 56.6° = 1.517$; $\cot 56.6° = 0.6594$;

$\lg \sin 56.6° = 9.9216$; $\lg \cos 56.6° = 9.7407$;

$\lg \tan 56.6° = 0.1809$; $\lg \cot 56.6° = 9.8191$。

【例 2】 当角 $\varphi_2 = 113.4°$ 时(见图 10.1-23)，可得到:

$\sin 113.4° = \sin(90° + 23.4°) = +\cos 23.4° = +0.9178$;

$\cos 113.4° = \cos(90° + 23.4°) = -\sin 23.4° = -0.3971$;

$\tan 113.4° = -\cot 23.4° = -2.311$;

$\cot 113.4° = -\tan 23.4° = -0.4327$;

$\lg \sin 113.4° = 9.9627p$; $\lg|\cos 113.4°| = 9.5990n$;

$\lg|\tan 113.4°| = 0.3638n$; $\lg|\cot 113.4°| = 9.6362n$。

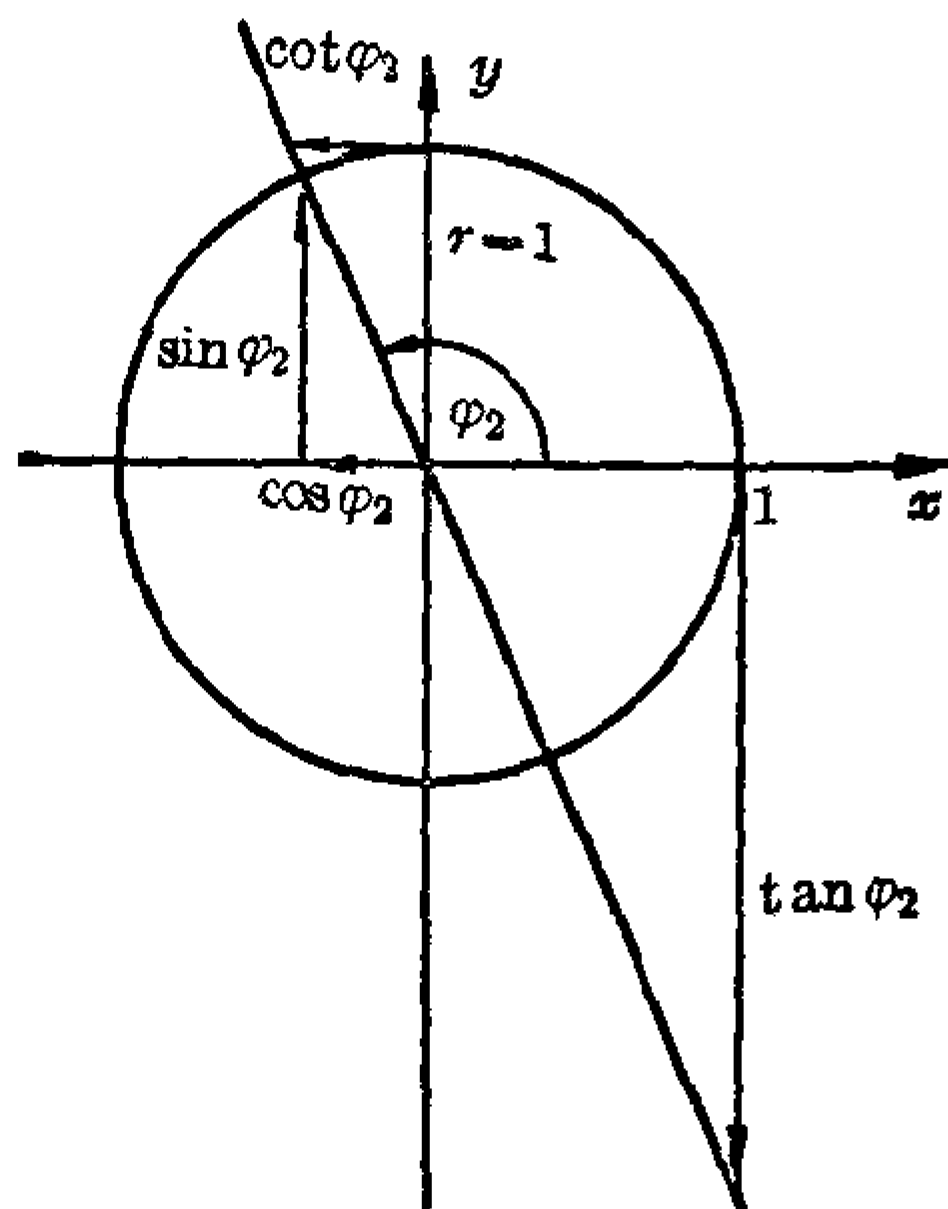


图 10.1-23 角 $\varphi_2 = 113.4°$ 的三角函数值

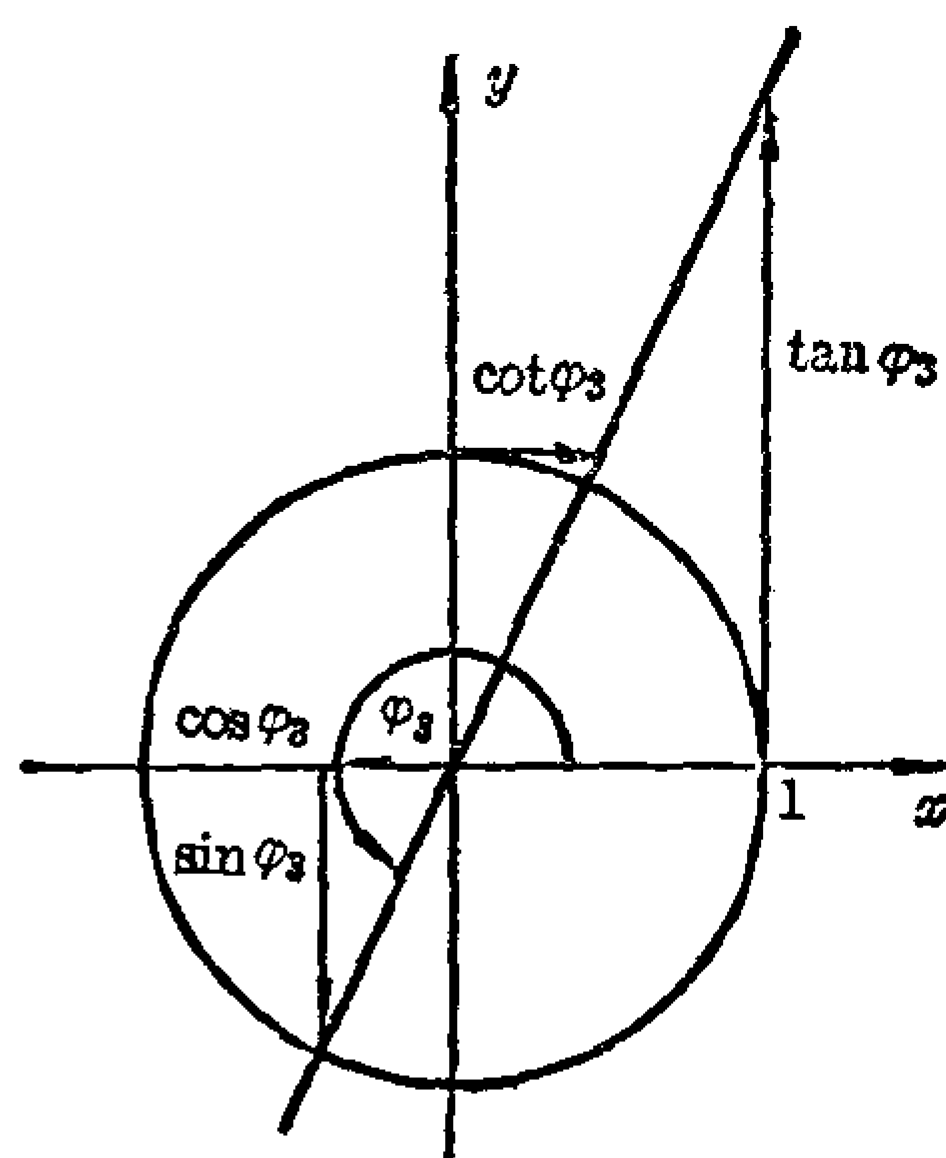


图 10.1-24 角 $\varphi_3 = 224.8°$ 的三角函数值

【例 3】 当角 $\varphi_3 = 244.8°$ 时(见图 10.1-24)，可得到:

$$\sin 244.8° = \sin(180° + 64.8°) = -\sin 64.8° = -0.9048;$$

$$\cos 244.8° = \cos(180° + 64.8°) = -\cos 64.8° = -0.4258;$$

$\tan 244.8° = \tan 64.8° = +2.125$;

$\cot 244.8° = \cot 64.8° = +0.4706$;

$\lg|\sin 244.8°| = 9.9566n$; $\lg|\cos 244.8°| = 9.6292n$;

$\lg \tan 244.8° = 0.3274p$; $\lg \cot 244.8° = 9.6726p$。

【例 4】 当角 $\varphi_4=320.3°$ 时(见图 10.1-25)，可得到:

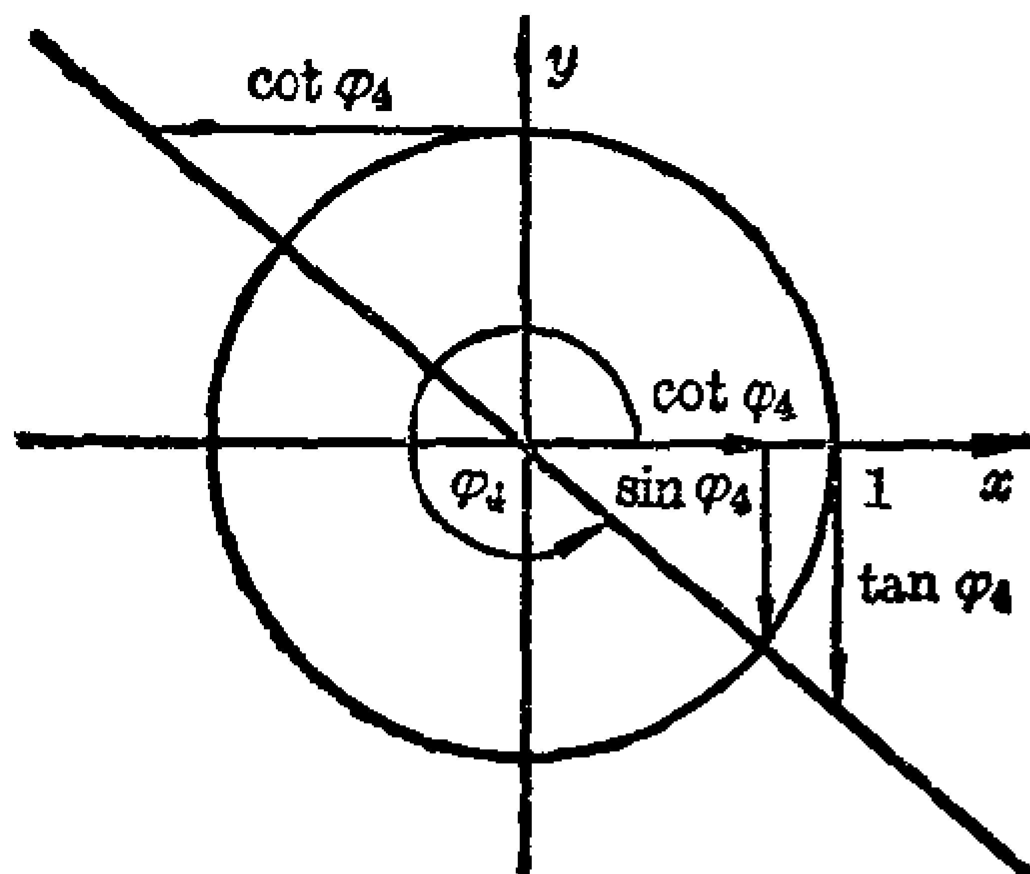


图 10.1-25　角 $\varphi_4=320.3°$ 的三角函数值

$$\sin 320.3°=\sin(270°+50.3°)=-\cos 50.3°=-0.6388;$$
$$\cos 320.3°=\cos(270°+50.3°)=+\sin 50.3°=+0.7694;$$
$$\tan 320.3°=-\cot 50.3°=-0.8302;$$
$$\cot 320.3°=-\tan 50.3°=-1.205;$$
$$\lg|\sin 320.3°|=9.8053n;\quad \lg\cos 320.3°=9.8862p;$$
$$\lg|\tan 320.3°|=9.9192n;\quad \lg|\cot 320.3°|=0.0808n。$$

如果再知道角度值的一位十进制数字 z，那末所需要的函数值就位于表中给出的两个值 t_1 和 t_2 之间，按照表中的差值 $d=t_2-t_1$，使用线性内插法就得到校正因子 $c=d\cdot\frac{z}{10}$(见 I. 第 2 章)。

因为随着角度的增加，余函数余弦和余切的值是减小的，因此它们的校正因子 c 必须从表中的值减去。

$\sin 5.47°$ 的值位于 0.0941 和0.0958之间，表中的差值 d 是 $17\cdot10^{-4}=0.0017$，而下一位数字 z 是 7，因此得到校正因子 $c=\frac{17\cdot7}{10}\cdot10^{-4}=(11.9)\cdot10^{-4}\approx12\cdot10^{-4}=0.0012$；即 $\sin 5.47°=0.0953$。$\cos 56.64°$ 的值位于 0.5505 和 0.5490 之间；因此 $d=-15\cdot10^{-4}$，$z=4$，$c=\frac{-15\cdot4}{10}\cdot10^{-4}=-(6.0)\cdot10^{-4}$，即 $\cos 56.64°=0.5499$。

【例】 1. $\tan 113.43°=-\cot 23.43°=-\left(2.311-\frac{11\cdot3}{10}\cdot10^{-3}\right)$
$$=-2.308。$$

2. $\lg|\cos 224.86°| = \lg\cos 64.86° n$

$$=\left(\bar{1}.6292-\frac{16\cdot 6}{10}\cdot 10^{-4}\right)n=\bar{1}.6282n。$$

3. $\lg|\sin 320.39°| = \lg\cos 50.39° n$

$$=\left(9.8053-\frac{9\cdot 9}{10}\cdot 10^{-4}\right)n=\bar{1}.8045n。$$

4. $\cot 81.36^{g}=0.1519$,

因为 $\cot 81.3^{g}=0.1530$ 和 $\cot 81.4^{g}=0.1512$ 之故。

5. $\tan 62°37'=1.931$,

因为 $\tan 62°30'=1.921$ 和 $\tan 62°40'=1.935$ 之故。

查角度 如果给出的函数值直接出现在表中，那末读出相交于这个值的行和列的数就决定了角度值。如果函数跟表中任一数值都不符合，那末从表中的差值 d 以及函数值与表中沿幅角增加方向最接近的值之校正差值 c，得到角度的下一位10进数字 z: $\frac{c}{\frac{d}{10}}=z$，或者 $z=c\cdot\frac{10}{d}$。

【例1】 余弦值0.3950位于 $\cos 66.7°=0.3955$ 和 $\cos 66.8°=0.3936$ 之间；求得 $d=-16\cdot 10^{-4}$, $c=-5\cdot 10^{-4}$，因此 $z=\frac{+5\cdot 10}{16}=3$，或者 $\arccos 0.3950=66.73°$。因为反函数是多值的，$\varphi=-66.73°\triangleq 293.27°$; $66.73°\pm n\cdot 360°$ 和 $293.27°\pm n\cdot 360°$, $n=0, 1, 2, \cdots$都是有意义的解。

【例2】 $\arcsin(-0.7777)$的值是什么?从符号表或单位圆中的表达式可知,不考虑周期性时,在第III和第IV象限中有两个解 φ_1 和 φ_2,满足方程 $\varphi_1+\varphi_2=3\pi=540°$，因为 $\sin 51.0°=0.7771$ 和 $\sin 51.1°=0.7782$，而从象限关系得到 $\delta=\varphi_1-\frac{2\pi}{2}$ 是位于51.0°和51.1°之间的。从 $d=11\cdot 10^{-4}$, $c=6\cdot 10^{-4}$ 得到 $z=\frac{6\cdot 10}{11}\approx 5$，即 $\delta=51.05°$, $\varphi_1=231.05°\pm n\cdot 360°$, $\varphi_2=308.95°\pm n\cdot 360°$, $n=0, 1, 2, \cdots$。

【例3】 $\arctan(-2.000)$ 的值是什么? $\tan\varphi=-2.000$ 的角 φ 位于第II象限，而因为 $\delta=\varphi-\frac{\pi}{2}$, $\cot\delta=2.000$，从 $\cot 26.5°=2.006$ 和 $\cot 26.6°=1.997$ 得到 $d=-9\cdot 10^{-3}$, $c=-6\cdot 10^{-3}$, $z=\frac{6\cdot 10}{9}\approx 7$，即 $\delta=$

26.57°。因此 $\arctan(-2.000)=116.57°\pm n\cdot 180°$, $n=0, 1, 2, \cdots$。

【例 4】 哪一个角 φ 能满足方程 $\lg|\cos\varphi|=\bar{1}.74435n$? 因为余弦值是负的，角 φ_2 和 φ_3 的自由臂位于第 II 和第 III 象限中，并关于 x 轴对称。根据象限关系，由 $\lg\cos\delta=\bar{1}.74435p$ 决定了 $\delta=\varphi_3-\frac{2\pi}{2}$。从 5 位数字表得到 $\lg\cos 56.28°=\bar{1}.74440$ 和 $\lg\cos 56.29°=\bar{1}.74428$, 从 $d=-12\cdot 10^{-5}$, $c=-5\cdot 10^{-5}$, $z=\frac{5\cdot 10}{12}\approx 4$ 得到 $\delta=56.284°$。因此 $\varphi_2=123.716°\pm n\cdot 360°$, $\varphi_3=236.284°\pm n\cdot 360°$。

加法定理

加法定理说明两个角 α 和 β 的和或差的三角函数怎样能够用每一个角的三角函数来表示。

正弦和余弦的加法定理　在单位圆中，一个角 φ 的余弦值和正弦值分别表示为角 φ 自由臂方向上半径的带符号横坐标和纵坐标的数值。这两条线段是这条半径在 x 轴和 y 轴上的正投影。由向量代数的定理，这条半径的投影等于另外任意两个向量(只要它们的和等于这条半径)的投影之和。例如在图 10.1-26 中，在每一种情况中，都有 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TQ}$, 这里 $\overrightarrow{OT}$ 是角 β 的自由臂 $\overrightarrow{OQ}$ 在角 α 的自由臂 $\overrightarrow{OP}$ 上的垂直投影，而 $\overrightarrow{TQ}$ 是角 β 的自由臂 $\overrightarrow{OQ}$ 在跟正 x 轴交成角 $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 的方向 S 上的投影。因此，$\overrightarrow{OT}$ 的带符号数值是 $\cos\beta$, 而 $\overrightarrow{TQ}$ 的带符号数值是 $\sin\beta$。如果用 m_x 表示在 x 轴上垂直投影的带符号数值，而 m_y 表示在 y 轴上垂直投影的带符号数值，那末:

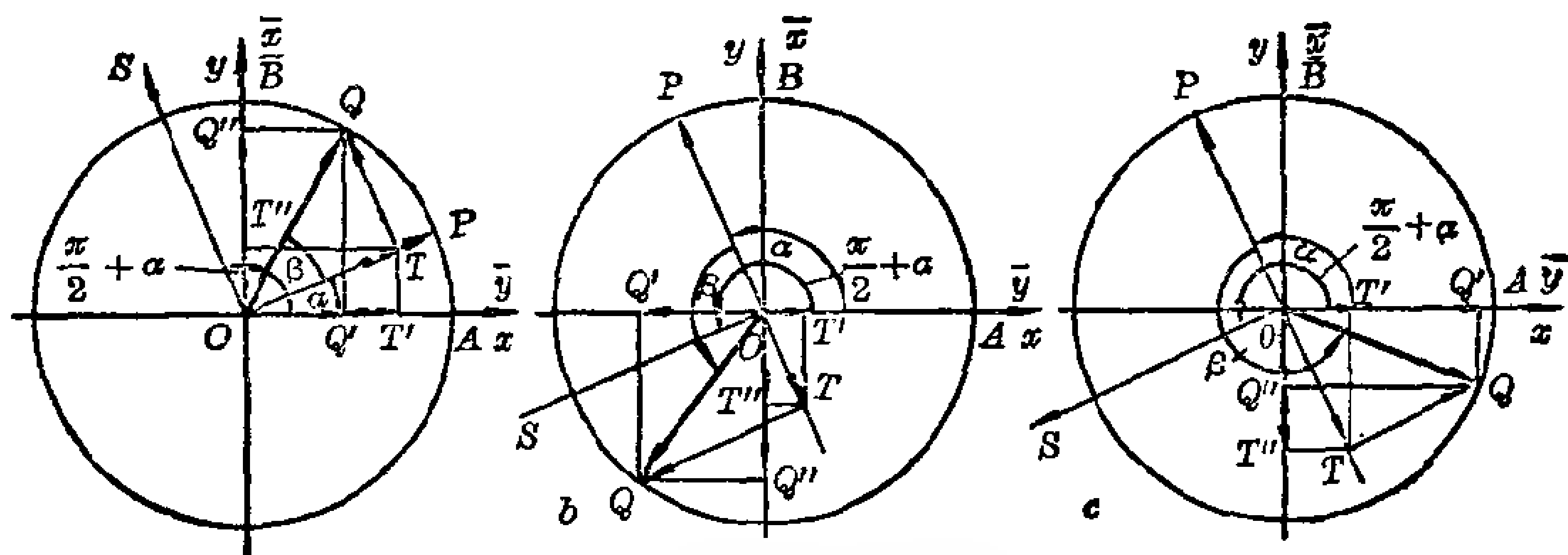


图 10.1-26　正弦函数和余弦函数加法定理的例子

$$m_x(\overrightarrow{OQ})=m_x(\overrightarrow{OT})+m_x(\overrightarrow{TQ}),$$

其中
$$m_x(\overrightarrow{OQ})=m(\overrightarrow{OQ'})=\cos(\alpha+\beta),$$
$$m_x(\overrightarrow{OT})=m(\overrightarrow{OT})=\cos\beta\cos\alpha,$$
$$m_x(\overrightarrow{TQ})=m(\overrightarrow{T'Q'})=\sin\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\beta\sin\alpha;$$

因此得到
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta。$$
$$m_y(\overrightarrow{OQ})=m_y(\overrightarrow{OT})+m_y(\overrightarrow{TQ}),$$

其中
$$m_y(\overrightarrow{OQ})=m(\overrightarrow{OQ''})=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\sin(\alpha+\beta),$$
$$m_y(\overrightarrow{OT})=m(\overrightarrow{OT''})=\cos\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\cos\beta,$$
$$m_y(\overrightarrow{TQ})=m(\overrightarrow{T''Q''})=\sin\beta\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]$$
$$=\sin\beta\cos(-\alpha)=\cos\alpha\sin\beta;$$

因此得到
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta。$$

对任意角 α 和 β 这些讨论都是正确的，这三张图是所选的三种情况的例子。$\bar{x}$, $\bar{y}$ 坐标是用来计算跟正 y 轴，即正 $\bar{x}$ 轴所形成的角度。在 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 坐标系中，正 x 轴跟正 $\bar{x}$ 轴相交成 $\frac{\pi}{2}$ 角，因此 $\overrightarrow{OT}$ 跟正 $\bar{x}$ 轴的交角是 $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，而 $\overrightarrow{OQ}$ 跟正 $\bar{x}$ 轴的交角是 $\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]$ 以及 $\overrightarrow{TQ}$ 跟正 $\bar{x}$ 轴的加角是 $\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]$。当然，不用 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 坐标系，我们应用余弦函数的交法定理和对任意角的象限变换关系，也能得到正弦函数的加法定理：

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta。$$

同时如果应用从周期性得到的明显事实，即对每一个角 β_1 用一个角 β_2 来代替，使得 $\beta_1+\beta_2=2\pi$（或者 400^g，或者 $360°$），那末在加法定理中也能出现角的差值：

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta。$$

正切和余切的加法定理　只要用除法并加以适当整理，立即可以得

到具有普遍意义的式子：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}。$$

分子和分母同时除以因子 $\cos\alpha\cos\beta$：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta};\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}。$$

类似地得到：

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta};\ \cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}。$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

倍角函数和半角函数

$$\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\sin\varphi=2\sin\varphi/2\cos\varphi/2$$

$$\tan 2\varphi=\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}=\frac{2}{\cot\varphi-\tan\varphi}$$

$$\cot 2\varphi=\frac{\cot^2\varphi-1}{2\cot\varphi}=\frac{\cot\varphi-\tan\varphi}{2}$$

$$\sin\varphi=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}\qquad \cos\varphi=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}$$

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=1-2\sin^2\varphi=2\cos^2\varphi-1$$

$$\cos\varphi=\cos^2\varphi/2\sin^2\varphi/2=1-2\sin^2\varphi/2=2\cos^2\varphi/2-1$$

$$\tan\varphi=\frac{2\tan\varphi/2}{1-\tan^2\varphi/2}=\frac{2}{\cot\varphi/2-\tan\varphi/2}$$

在下面表中。有一些例子说明导出这些关系的方法：

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\\&=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta\\&=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)\\&=\cos^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha\\&=\cos^2\beta-\cos^2\alpha。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sin 3\varphi=\sin(2\varphi+\varphi)\\&=\sin 2\varphi\cos\varphi+\cos 2\varphi\sin\varphi\\&=2\sin\varphi\cos^2\varphi+(1-2\sin^2\varphi)\sin\varphi\\&=2\sin\varphi(1-\sin^2\varphi)+\sin\varphi-2\sin^3\varphi\\&=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi。\end{aligned}$$

在等式 $\sin(\varphi+\psi)+\sin(\varphi-\psi)=2\sin\varphi\cos\psi$ 中，令 $\alpha=\varphi+\psi$，$\beta=\varphi-\psi$，因此 $\varphi=1/2(\alpha+\beta)$，$\psi=1/2(\alpha-\beta)$，得到 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$。

$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}。$$

三角函数的和、差、积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ+\alpha)=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=1/2[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=1/2[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

$$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

$$\tan\alpha\cot\beta=\frac{\tan\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha+\tan\beta}=\frac{\tan\alpha-\cot\beta}{\cot\alpha-\tan\beta}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cot\alpha-\cot\beta=\frac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha\cos\beta=1/2[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=1/2[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cot\alpha\cot\beta=\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=-\frac{\cot\alpha-\cot\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=1/4[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1/4[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=1/4[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma=1/4[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

三角函数的幂

$$\sin^2\varphi=1/2(1-\cos 2\varphi)$$

$$\cos^2\varphi=1/2(1+\cos 2\varphi)$$

$$\sin^3\varphi=1/4(3\sin\varphi-\sin 3\varphi)$$

$$\cos^3\varphi=1/4(3\cos\varphi+\cos 3\varphi)$$

$$\sin^4\varphi=1/8(\cos 4\varphi-4\cos 2\varphi+3)$$

$$\cos^4\varphi=1/8(\cos 4\varphi+4\cos 2\varphi+3)$$

$$\sin^5\varphi=1/16(10\sin\varphi-5\sin 3\varphi+\sin 5\varphi)$$

$$\cos^5\varphi=1/16(10\cos\varphi+5\cos 3\varphi+\cos 5\varphi)$$

正弦和余弦多倍角的一般公式 在复数理论中的棣莫弗(De Moivre)定理说明$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$，记住$i^2=-1$，用归纳法

和三角函数的加法定理，能够证明上面这个式子。如果用二项式把上面等式的左面展开，并令两边的实部和虚部分别相等，就给出：

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-\cdots$$

$$\sin n\varphi=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi-\cdots$$

一般正弦曲线　在自然界和工程技术领域中，比如高频技术、光学、声学或力学，是根据正弦函数和余弦函数对振动进行数学描述的。在这些振动中，一个正弦振动的最大位移量，即振幅 a，可以不是 1，而它的波长 λ 可以不是 2π，并且在零点的纵坐标可以不是 0。例如函数 $y=a\sin x$ 具有振幅 a(见图 10.1-27)，而函数 $y=\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ 具有波长 λ，这是因为对于 $0\leqslant x\leqslant\lambda$，幅角 $\frac{2\pi x}{\lambda}$ 的值从 0 跑到 2π(图 10.1-28)。函数 $y=\sin(nx)$，因为 $\lambda=\frac{2\pi}{n}$，因此它在 0 到 2π 区间中正好完成 n 次完全振动(其中 n 是整数)。最后，函数 $y=\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$，具有 $\lambda=\frac{2l}{n}$，表明这个振动要 n 个波的长度才是 $2l$。

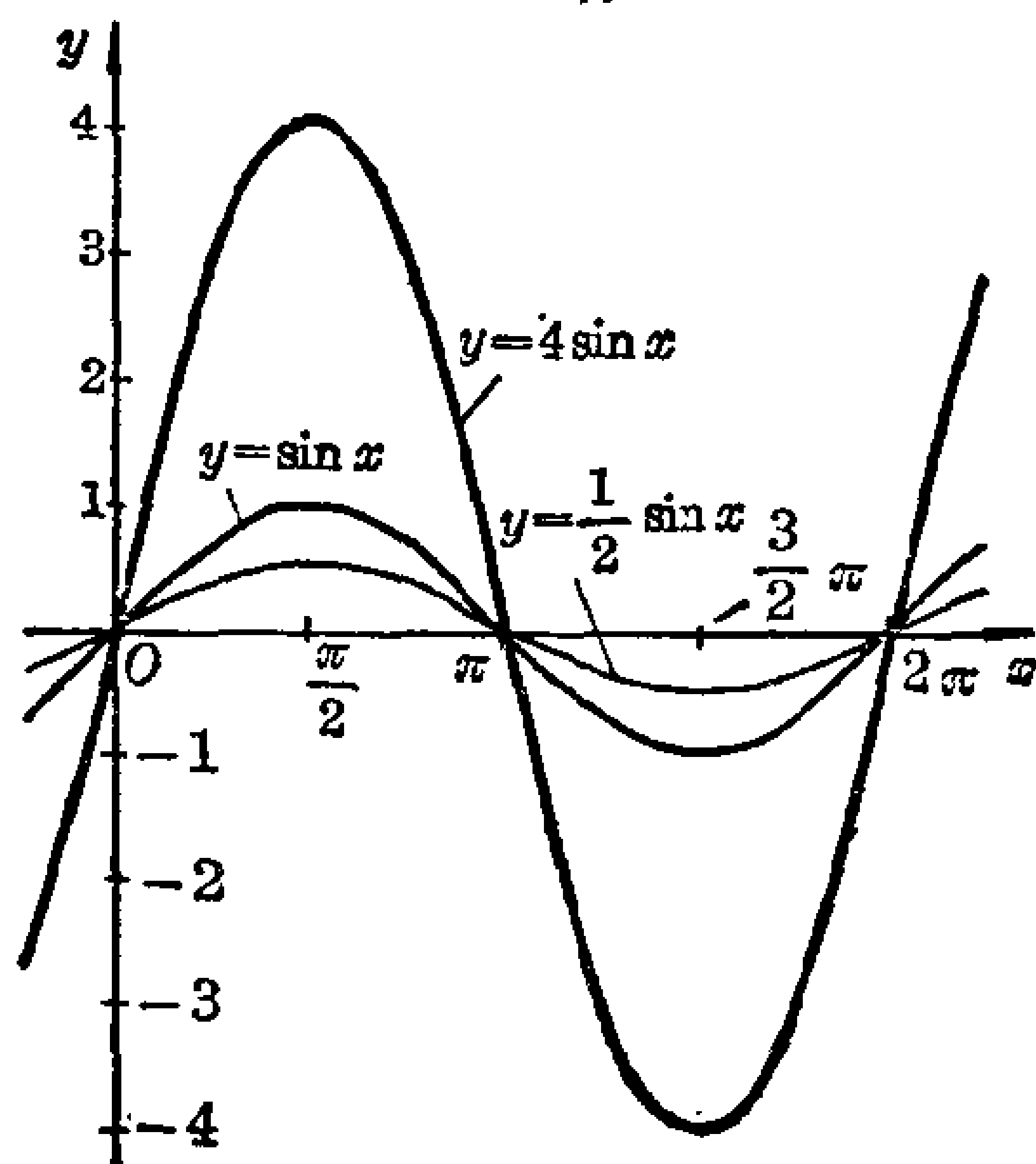


图 10.1-27　函数 $y=\sin x$, $y=4\sin x$ 和 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象

叠加。如果表示为振动的几个物理量作用于一个点上，那末这个点的纵坐标就相加，例如，$y_1=2\sin x$ 和 $y_2=-\cos 2x$ 给出 $y=y_1+y_2=2\sin x-\cos 2x$(见图 10.1-29)。

阻尼振荡。如果一个振动系统失去能量，那末振幅就要减小。例如，函数 $a=3e^{-\frac{2x}{\pi}}$，对 $x=\frac{\pi}{2}$，其值是 $\frac{3}{e}$；而对 $x=\frac{2\pi}{2}$，只有值 $\frac{3}{e^2}$，

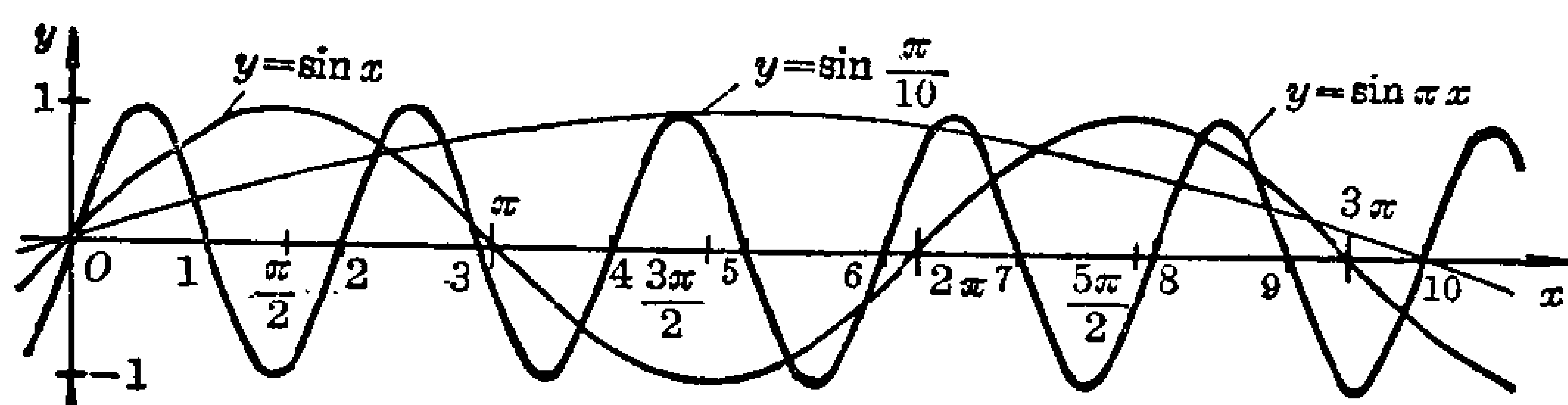


图 10.1-28 函数 $y=\sin \pi x$ 和 $y=\sin \frac{\pi x}{10}$ 的图象

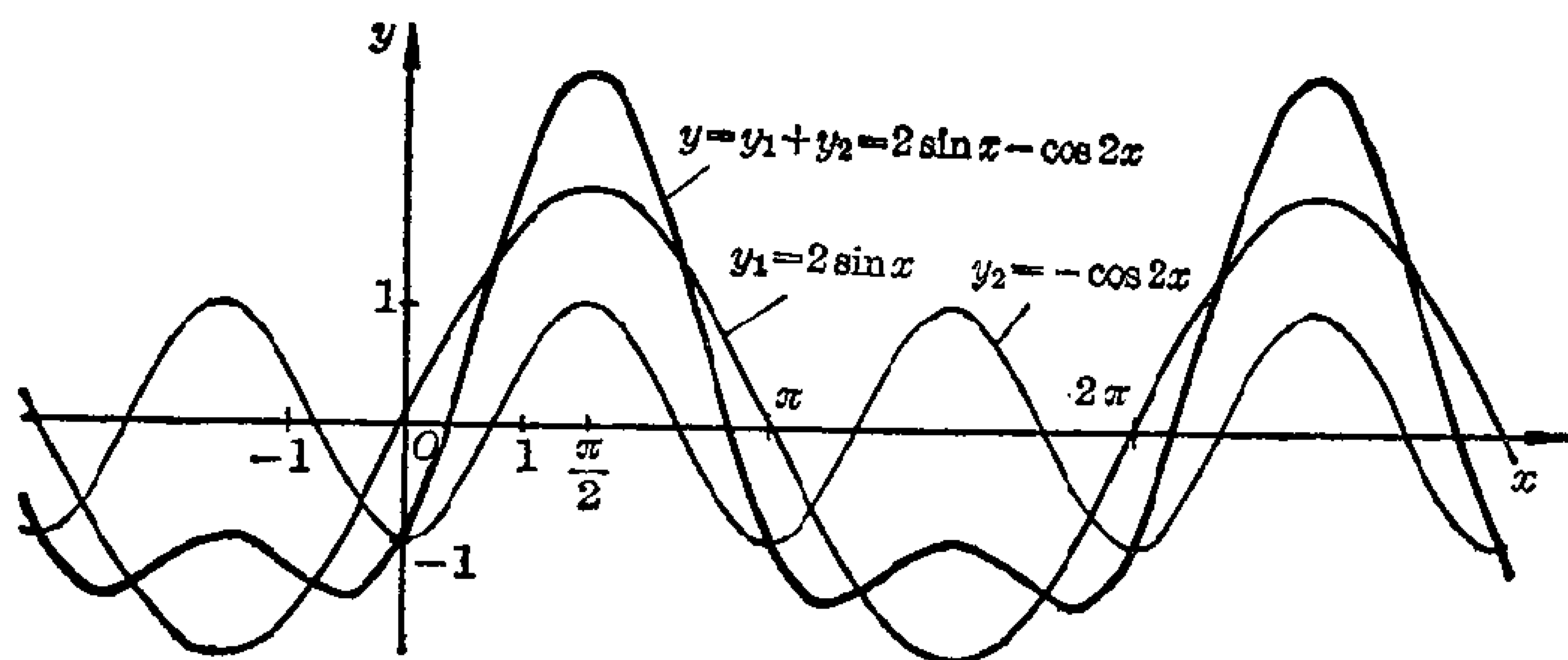


图 10.1-29 函数 $y=y_1+y_2=2\sin x-\cos 2x$ 的图象

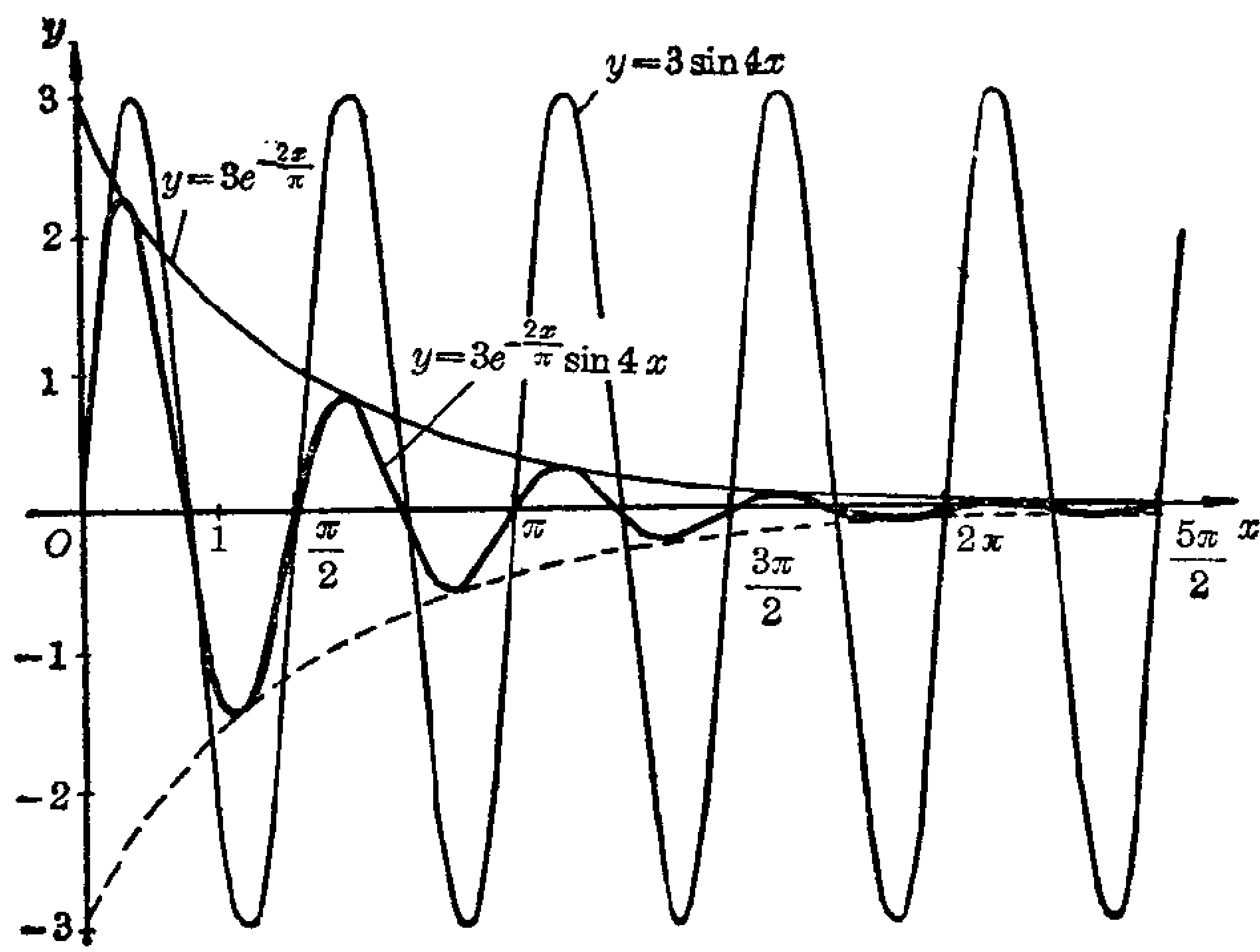


图 10.1-30 函数 $y=3e^{-\frac{2x}{\pi}}\sin 4x$ 的图象

了，如此等等。在图10.1-30中，画出了$y=3e^{-\frac{2x}{\pi}}\sin 4x$的图象。

角频率ω和相位差φ。 如果时间t看作为独立变量，则一般正弦曲线的方程形式是$y=a\sin(\omega t+\varphi)$。从完成一个完整的振动需要$\omega t=2\pi$这一事实得到，完成一个**完全振动**(通过波峰和波谷)所需要的时间是$t=\frac{2\pi}{\omega}$，这个时间叫做**振动的周期**并用T来表示。如果T用秒来计量，则$\frac{1}{T}$就是一秒钟内振荡的次数，就是振动的频率：$f=\frac{1}{T}$。角频率$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\left(\frac{1}{T}\right)=2\pi f$给出了在$2\pi$秒内的振动次数。最后，相位差$\varphi$是给定的曲线超前于正弦曲线的角度(见图10.1-31)。因为$t=0$时，函数y总是取值$y=\sin\varphi$，对负的相位差φ，我们称为**滞后**。对$a=1$并且$\varphi=+\frac{\pi}{2}$，函数$y=a\sin(\omega t+\varphi)$就变成了余弦函数$\cos\omega t$，即余弦曲线超前正弦曲线$\frac{\pi}{2}$。如果给出角频率为$\omega$的一般正弦曲线振动，那么相位图(向量图)就能用$a$和$\varphi$来完全确定。在图10.1-31中$a$是作出正弦曲线的圆的半径，而$\varphi$是在时间$t=0$时相位(向量)和正横坐标轴之间的夹角(见图10.1-31)。

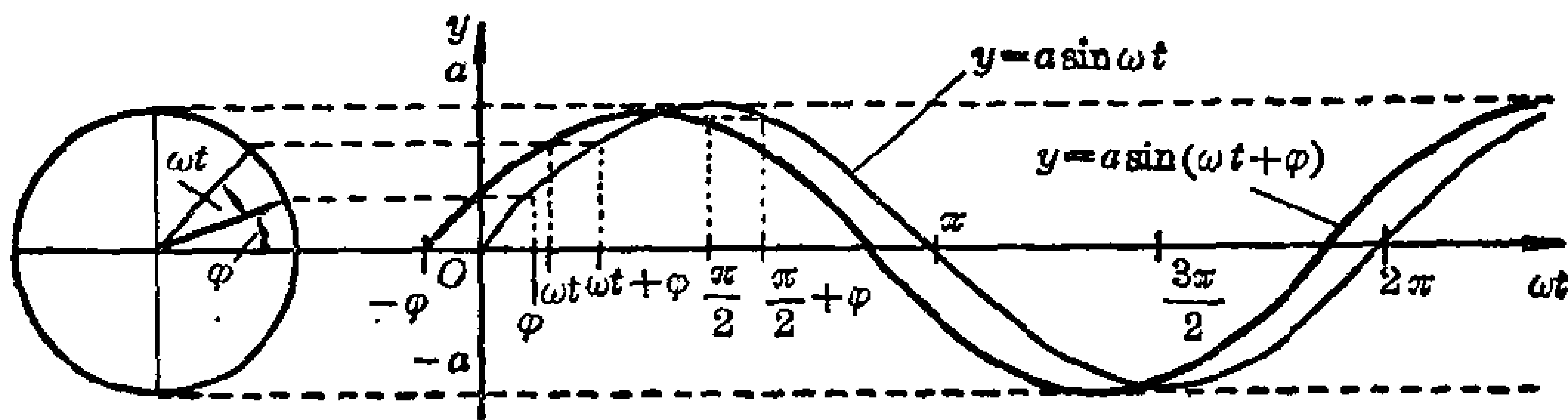


图10.1-31　一般正弦曲线$y=a\sin(\omega t+\varphi)$，左面是相位图或者向量图；右面是曲线表示法或者曲线图形

10.2　三角方程

到目前为止所考虑的表达式都是关于T的代数方程(参看**I.**第4章)。现在可把表达式的概念扩充使之包括$\sin T$, $\cos T$, $\tan T$和$\cot T$。使表达式的两边相等并在同时考虑到变量取值的范围，这样就形成了新的方程。在单变量的**三角方程**中，变量x至少出现在一个这种推广了的表达式里。在**纯三角方程**中，x只出现在这种三角表达式里，例如，在

$\sin(2x+\pi)-\sqrt{2}\cos x=0$ 中。在混合三角方程中，x 也出现于代数表达式里，例如，在 $\tan x-3x=0$ 中。

三角方程是超越方程(参看 **I.** 第 4 章)。没有求出它们解的一般算法，但是可以用图解法来进行求解，或者也可以用能达到任何精度的数值近似法进行求解。不过对于某些特殊类型的纯三角方程，还是存在求解的算法的。因为三角函数的周期性，三角方程变量的定义域常常限制在长度是基本周期的区间内，例如 $0\leqslant x<2\pi$。

纯三角方程

基本类型 一个纯三角方程称为属于基本类型是指：如果变量只出现在跟一个三角函数有关的表达式中，例如在 $\sin T$ 中，并且此方程关于这个表达式是一个代数方程。

【例 1】 方程 $\cos^2(2x)=b$ 是属于基本类型的，其中 x 是变量，而 b 是实参数。无论如何，关于 $\cos 2x$ 它是一个代数方程。用代换 $t=\cos 2x$，得到 $t^3=b$，它有解 $t=\sqrt[3]{b}$，从 $\cos 2x=\sqrt[3]{b}$，在数表的精度范围内，能够查得 x 的解。

【例 2】 方程 $\tan^2 x+p\tan x+q=0$ 同样地是属于基本类型的，其中 x 是变量，而 p 和 q 是参数。它是关于 $\tan x$ 的代数方程，用代换 $u=\tan x$，就变成二次方程 $u^2+pu+q=0$，其解是 $(\tan x)_{1,2}=\frac{1}{2}(-p\pm\sqrt{p^2-4q})$。利用数表能够求得 x 的解。

化简成基本类型 如果三角方程包含 $\sin T$, $\cos T$, $\tan T$, $\cot T$ 中的几项，但具有同样的 T，那末使用前面章节中得到的公式，就能把原来的方程排成只包含一个三角函数的新的方程。最有用的代换法是

$$\sin T=\frac{2\tan\left(\frac{T}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{T}{2}\right)},$$

$$\cos T=\frac{1-\tan^2\left(\frac{T}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{T}{2}\right)}。$$

【例 3】 $5\sin x-3\cos x=3,\ 0\leqslant x<2\pi$。

$$5\cdot\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}-3\cdot\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=3;$$

$$10\tan\left(\frac{x}{2}\right)-3+3\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)=3+3\tan^2\left(\frac{x}{2}\right);$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{5},\quad \frac{x}{2}=30.96°;\quad x=61.92°。$$

因为对 $x=\pi$, $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ 是不存在的，因而给出的变换方程对 $x=\pi$ 是没有意义的。为此把 $x=\pi$ 的值代到原来的方程进行测试，结果证明在给定的变量范围内，$x=\pi$ 是方程的第二个解。两个函数 $y_1=5\sin x$ 和 $y_2=3\cos x+3$ 的图象交点的横坐标就是由图解法得到的解（见图10.2-1）。

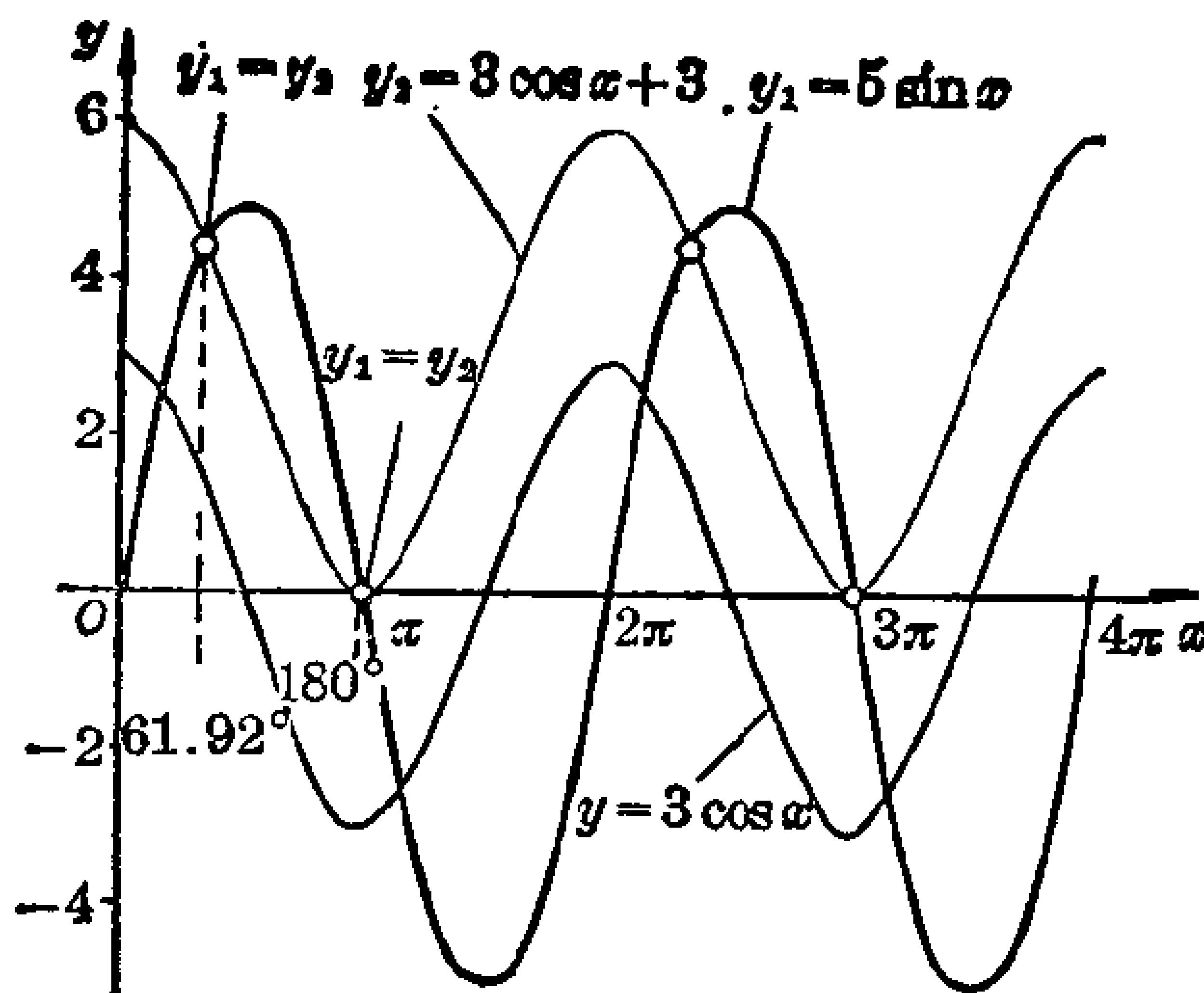


图 10.2-1　函数 $y_1=5\sin x$ 的图象和 $y_2=3\cos x+3$ 的图象的交点

【例 4】 方程 $a\cos x+b\sin x=c$，其中 $c^2\leqslant a^2+b^2$，也能用余弦函数的加法定理进行求解。用 $r=+\sqrt{a^2+b^2}$ 去除方程的两边，并令 $\frac{a}{(+\sqrt{a^2+b^2})}=\cos h$, $\frac{b}{(+\sqrt{a^2+b^2})}=\sin h$, $\tan h=\frac{b}{a}$，方程就变成 $\cos h\cos x+\sin h\sin x=\frac{c}{(+\sqrt{a^2+b^2})}$ 或者 $\cos(x-h)=\frac{c}{(+\sqrt{a^2+b^2})}$；$x+h=\operatorname{arc\,cos}\frac{c}{(+\sqrt{a^2+b^2})}$，其中辅助角 h 由 $\tan h=\frac{b}{a}$ 所唯一地确定。因此也就知道了 x（在 0 到 2π 中有两个解）。对于数值 $a=-3$, $b=5$,

$c=3$,得到 $-3\cos x+5\sin x=3$, $\tan h=\frac{5}{(-3)}=\frac{\sin h}{\cos h}$。因为 $\sin h>0$,和 $\cos h<0$, h 位于第 II 象限中; $h=120.96°$。从 $\cos(x-h)=\frac{3}{(+\sqrt{34})}=0.5145$ 得到 $(x-h)_1=59.04°$, 或者 $(x-h)_2=-59.04°$, 因此 $x_1=180°$, $x_2=61.92°$。

如果三角方程只是由一种三角函数所组成,例如是由 $\cot T_1$, $\cot T_2$, …所组成,其中 T_1, T_2, … 是各不相同的,那末在某种情况下,这种三角方程能化简成基本类型。例如,如果所有的 T_i 都是单独一项 T 的整数倍时,用加法定理就能把它化成基本类型。

【例 5】 $\frac{2\cot 2x}{1-3\cot x}=\frac{1}{2}$, 或者 $4\cot 2x=1-3\cot x$。因为 $\cot 2x=\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}$,原方程等价于 $\frac{2(\cot^2 x-1)}{\cot x}=1-3\cot x$,或者 $5\cot^2 x-\cot x-2=0$(见图 10.2-2)。令 $\cot x=u$, 得到 $u^2-\frac{u}{5}-\frac{2}{5}=0$; $u=\frac{1}{10}+\frac{\sqrt{41}}{10}$ 即 $u_{\rm I}=\frac{(\sqrt{41}+1)}{10}$, $u_{\rm II}=-\frac{(\sqrt{41}-1)}{10}$。

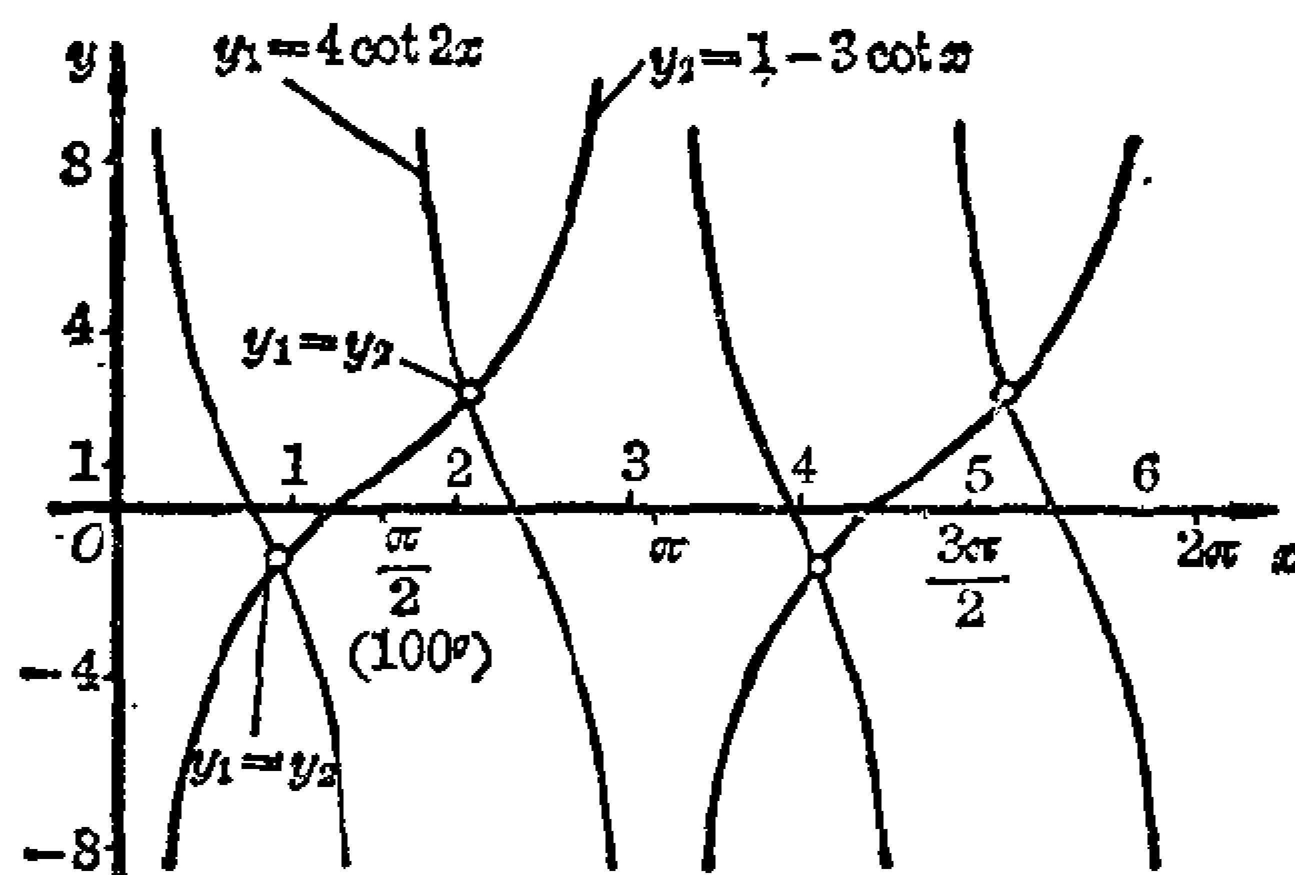


图 10.2-2 函数 $y_1=4\cot 2x$ 的图象和 $y_2=1-3\cot x$ 的图象的交点

对 $0\leqslant x<2\pi$ 的解

$(\cot x)_{\rm I}=0.7403$	$(\cot x)_{\rm II}=-0.5403$
$x_1=0.9335$ (59.43g) $x_2=4.0751$ (259.43g)	$x_3=2.0662$ (131.54g) $x_4=5.2078$ (331.54g)

验算:所有这 4 个值都满足方程。

$\cot 2x$ 的公式对于值 0 和 π 是没有意义的，但是从给出的方程中我们立刻可以看出这些值不是方程的解。

【例 6】 $\sin(2x+\pi)-\sqrt{2}\cos x=0$，使用象限变换或加法定理，得到 $-\sin 2x-\sqrt{2}\cos x=0$，或者 $2\sin x\cos x-\sqrt{2}\cos x=0$，

$$(2\sin x+\sqrt{2})\cos x=0。$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=0,$$

$$x_1=\frac{5\pi}{4},\quad x_3=\frac{\pi}{2},$$

$$x_2=\frac{7\pi}{4},\quad x_4=\frac{3\pi}{2}。$$

经过验算能够证明解是正确的(见图 10.2-3)。

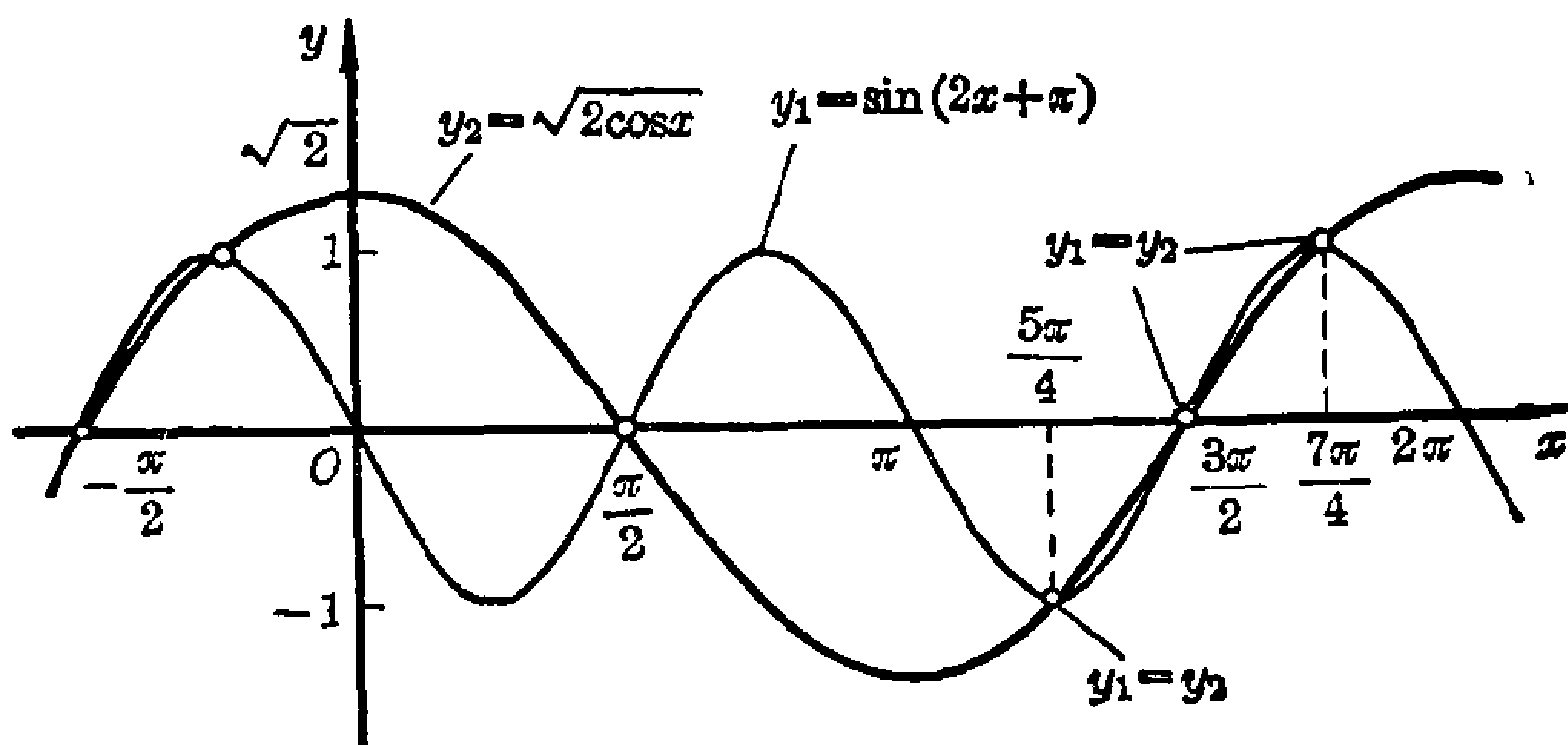


图 10.2-3　函数 $y_1=\sin(2x+\pi)$ 的图象和 $y_2=\sqrt{2}\cos x$ 的图象的交点

【例 7】 方程 $\cos\left(\frac{3x}{7}\right)+\sin x=0$，把 $\sin x$ 写成 $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，并使用公式 $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$，方程就简化成：

$$\cos\left(\frac{3x}{7}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0,$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2x}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{5x}{7}-\frac{\pi}{4}\right)=0。$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2x}{7}\right)=0,\quad \cos\left(\frac{5x}{7}-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

$$\frac{\pi}{4}-\frac{2x}{7}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad \frac{5x}{7}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

$$\text{或者}\frac{5x}{7}=\frac{3\pi}{4}+k\pi,$$

$$x_1=-\frac{7\pi}{8}-\frac{7k\pi}{2};\quad x_2=\frac{21\pi}{20}+\frac{7k\pi}{5}。$$

因为 k 能够取值 0, ±1, ±2, …, 在 x_1 的公式中能用 $+k$ 来代替 $-k$:

$$x_1=-\frac{7\pi}{8}+\frac{7k\pi}{2};\quad x_2=-\frac{21\pi}{20}+\frac{7k\pi}{5}。$$

经过验算证明所有的值都满足方程。应该注意到对连续整数 k 的解，所不同的不再是相差 2π, 而是分别相差 $\frac{7\pi}{2}$ 或者 $\frac{7\pi}{5}$(见图 10.2-4)。

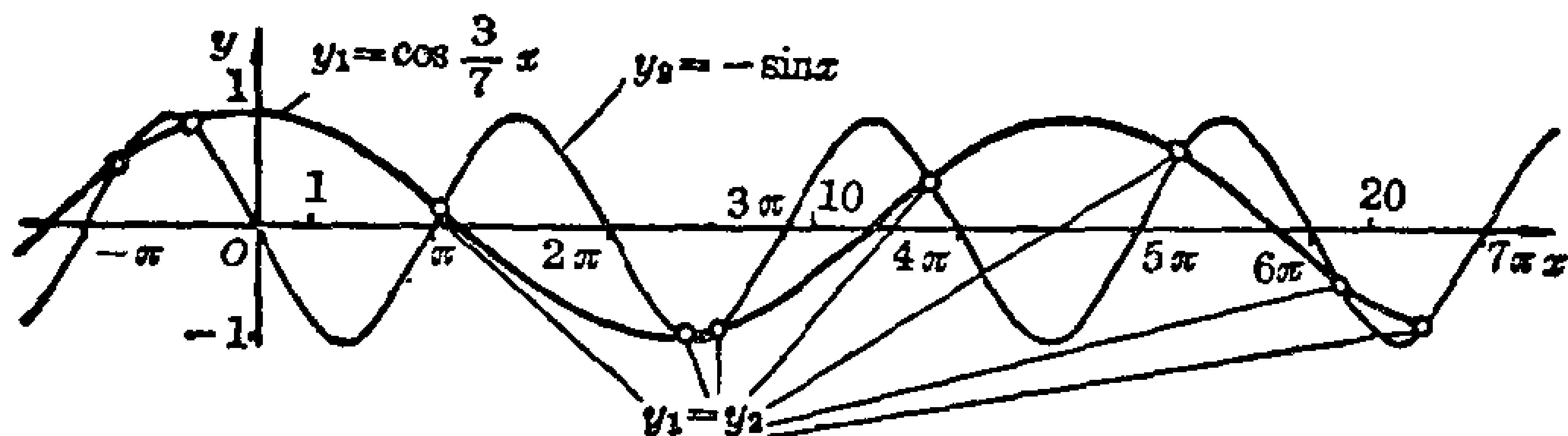


图 10.2-4　函数 $y_1=\cos\left(\frac{3x}{7}\right)$ 的图象和 $y_2=-\sin x$ 的图象的交点

混合三角方程

混合三角方程只能用图解法或迭代法来求解(参看 II. 第 16 章)。

【例 1】　方程 $\cos x-\frac{x}{2}+1.7=0$ 的解就是方程 $y_1=\cos x$ 的曲线和 $y_2=\frac{x}{2}-1.7$ 的曲线的交点的横坐标(见图 10.2-5), 它们只有一个交点, 其横坐标 $x_0\approx2.21$。如果这个交点附近的图象用更大的标尺来画, 则读出的精度能够得到改进, 这里可得到 $x_0\approx2.209$。

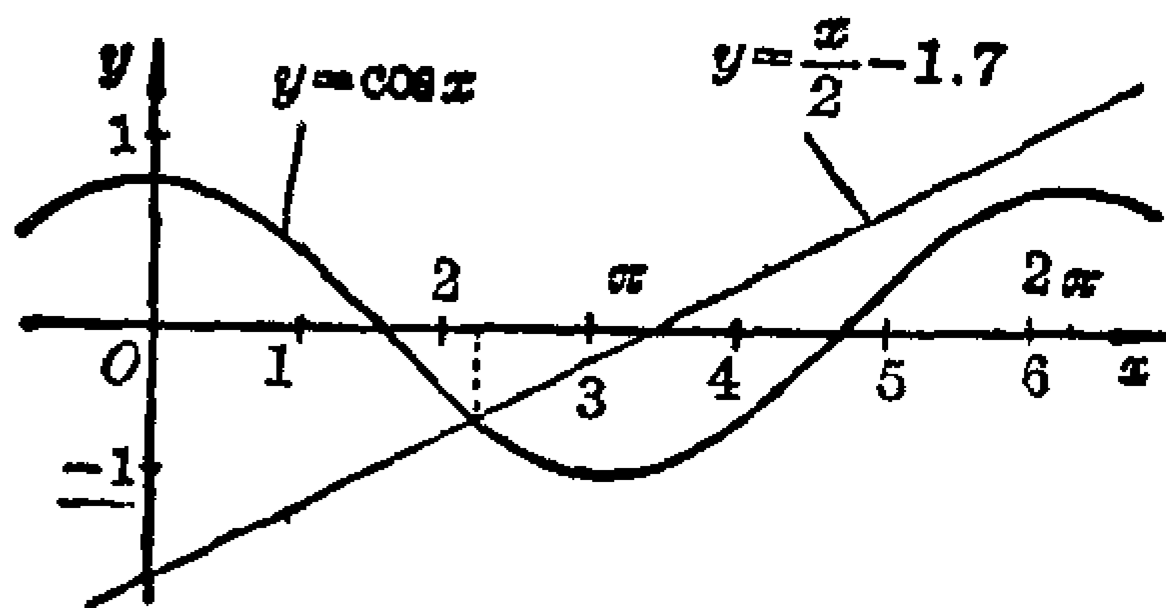


图 10.2-5　用图解法求方程 $\cos x=\frac{x}{2}-1.7$ 的解

验算：$\cos 2.209-\frac{2.209}{2}+1.7=\cos 140.63^{g}+0.5955$

$$=-0.5958+0.5955=-0.0003。$$

使用近似求解的牛顿(Newton)法可以给出更接近于正确值的近似值 x_1:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\ f(x_0)=\cos x_0-\frac{x_0}{2}+1.7=-0.0003,$$

$$f'(x_0)=-\sin x_0-\frac{1}{2}=-1.3032,\ x_1=2.2088。$$

重复使用牛顿法可以进一步改进近似值。

【例 2】 方程 $3\tan x-2x=0$ 的图解法。由函数 $y_1=\tan x$, $y_2=\frac{2x}{3}$, 能求出解 $x_1=0$, $x_2=\pm 4.73$, $x_3=\pm 7.65$, …, 随着 x 的增加, 解越来越接近 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍, 对每一个解 x_0 存在一个数值相等、符号相反的解 $-x_0$; 这是因为 $\tan x_0=\frac{2x_0}{3}$ 也包含了 $\tan(-x_0)=\frac{2(-x_0)}{3}$ 的缘故(见图 10.2-6)。

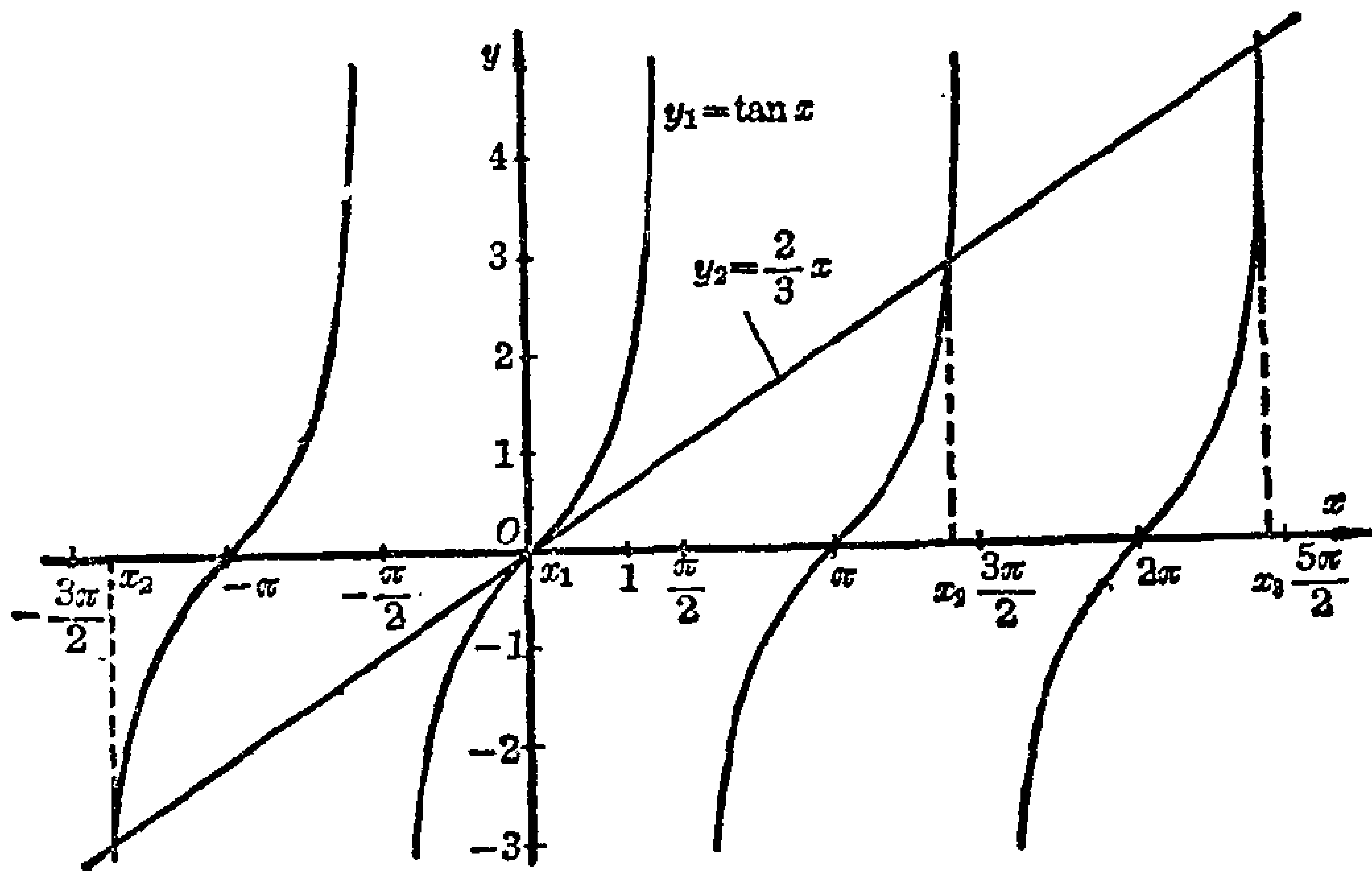


图 10.2-6　用图解法求方程 $3\tan x-2x=0$ 的解

第11章 平面三角学

11.1 解直角三角形…………411
一般方法………………411
应用……………………414
11.2 一般三角形中的三角函数……………………417
平面三角公式…………418
解三角形的四种主要情形……………………421
11.3 另外一些公式和应用…425
几何学…………………426
物理学…………………430
工程技术………………432
航海学…………………434
用三角法确定高度……435
测量学…………………439

已经定义的三角函数使我们有可能利用角度来计算平面上直线图形中的未知量。测量角度常常要比测量长度化费更少的气力而获得更高的精度。顾名思义，三角学跟三角形的测量或计算有关，而每个由直线围成的图形都可以用对角线把它们分成三角形。这时人们就会想到已知角的运用。

11.1 解直角三角形

一般方法

三角函数的定义，首先是在直角三角形中给出的，然后借助于单位圆推广到任意角。这些定义包括了直角三角形中边和角之间的所有关系，这样，当给出了这六个量中间的任意两个量时，就足以通过计算而得到所有其余的量。

在直角三角形 ABC（见图 11.1-1）中，直角用 γ 来表示，斜边用 c 来表示，于是我们可以利用几何学中的两个附加关系：

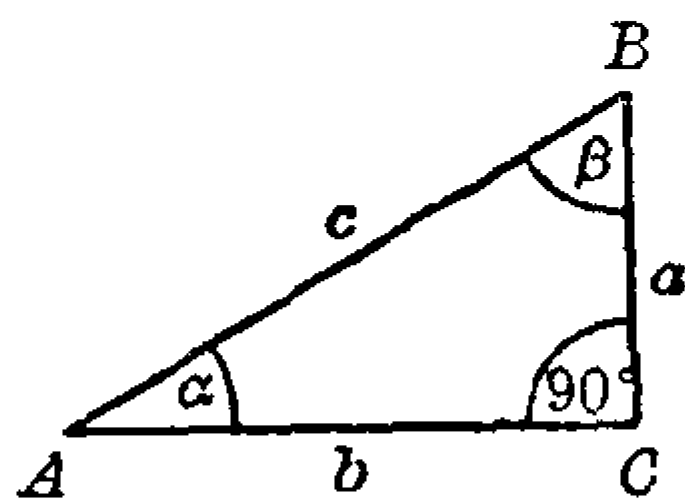


图 11.1-1 直角三角形

I. 毕达哥拉斯定理：$c^2=a^2+b^2$,

II. 顶点在斜边上的两个角互为余角：$\alpha+\beta=90°$。

从这些关系，或者用改写三角形字母的方法，在 a, b, c, α, β 中给出两个量的所有可能情形可减少到4种情况，即 c, α; c, a; a, α 和 a, b，现在说明这四种情况的解法：

I．给出斜边 c 和一个邻角，例如 α：

1．$\beta=90°-\alpha$;

2．$\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $a=c\sin\alpha$;

3．$\cos\alpha=\frac{b}{c}$, $b=c\cos\alpha$。

II．给出斜边 c 和另一条边，例如 a：

1．$\sin\alpha=\frac{a}{c}$;

2．$\beta=90°-\alpha$;

3a．$b=\sqrt{c^2-a^2}$，或者用已经计算好的角 α 来求：

3b．$\cot\alpha=\frac{b}{a}$, $b=a\cot\alpha$; 或者

3c．$\cos\alpha=\frac{b}{c}$, $b=c\cos\alpha$。

III．给出一个角和它所对的边，例如 a 和 α：

1．$\beta=90°-\alpha$;

2．$\cot\alpha=\frac{b}{a}$, $b=a\cot\alpha$;

3．$\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $c=\frac{a}{\sin\alpha}$，或者用已算好的角 β 来求：

2a．$\tan\beta=\frac{b}{a}$, $b=a\tan\beta$;

3a．$\cos\beta=\frac{a}{c}$, $c=\frac{a}{\cos\beta}$。

IV．给出两条直角边 a 和 b：

1．$\tan\alpha=\frac{a}{b}$;

2．$\beta=90°-\alpha$;

3a．$c-\sqrt{a^2+b^2}$，或者用已经算好的角 α 来求：

3b．$c=\frac{a}{\sin\alpha}$; 或者

3c. $c=\dfrac{b}{\cos\alpha}$。

验算和精度 一般我们总是想只用已知的量来求出答案。通过已经算好的量求得的**辅助解**可以用来验算，因为用不同方法计算同一个量所得到的值在理论上必须相等。根据三角形内角之和等于 180° 这一定理可以得到另一种验算。在测量术中，几乎对每一个三角计算都进行验算。在这里，对同一个量，其数值的允许偏差主要跟所使用的数表有关。在估计可能出现的偏差中，必须记住以下事实：对角 φ 的给定小区间 $\Delta_1\varphi$ 而言，在查找不同的三角函数值时，其偏差 Δy 具有不同的数量级。例如，在图 11.1-2 中，$y=\tan\varphi$ 的 $\Delta_3 y$ 大于 $y=\cos\varphi$ 的 $\Delta_1 y$。当然，反过来，对给定的小区间 $\Delta_2 y$ 而言，由正切函数或余切函数确定的角度值就比由另外两个三角函数确定的角度值更精确些。特别是函数 $y=\sin\varphi$ 的图形再次说明，函数值区间 Δy 的大小跟角度值区间的角度大小有关。在 $\varphi=0°$ 的邻域里，角度值较小，而 Δy 较大；另一方面，在 $\varphi=90°$ 的邻域里，角度值较大，而 Δy 却较小。由正弦函数的值来确定角度时，在第一种情形下得到的精度，比在第二种情形下得到的精度要高。当然，验算的精度必须跟测量值相一致。为了计算一架靠在垂直墙上的梯子和水平面所夹的角度（梯子的长为 $l=1.50$ 米，靠在墙上的高度为 $h=1.20$ 米），我们求得

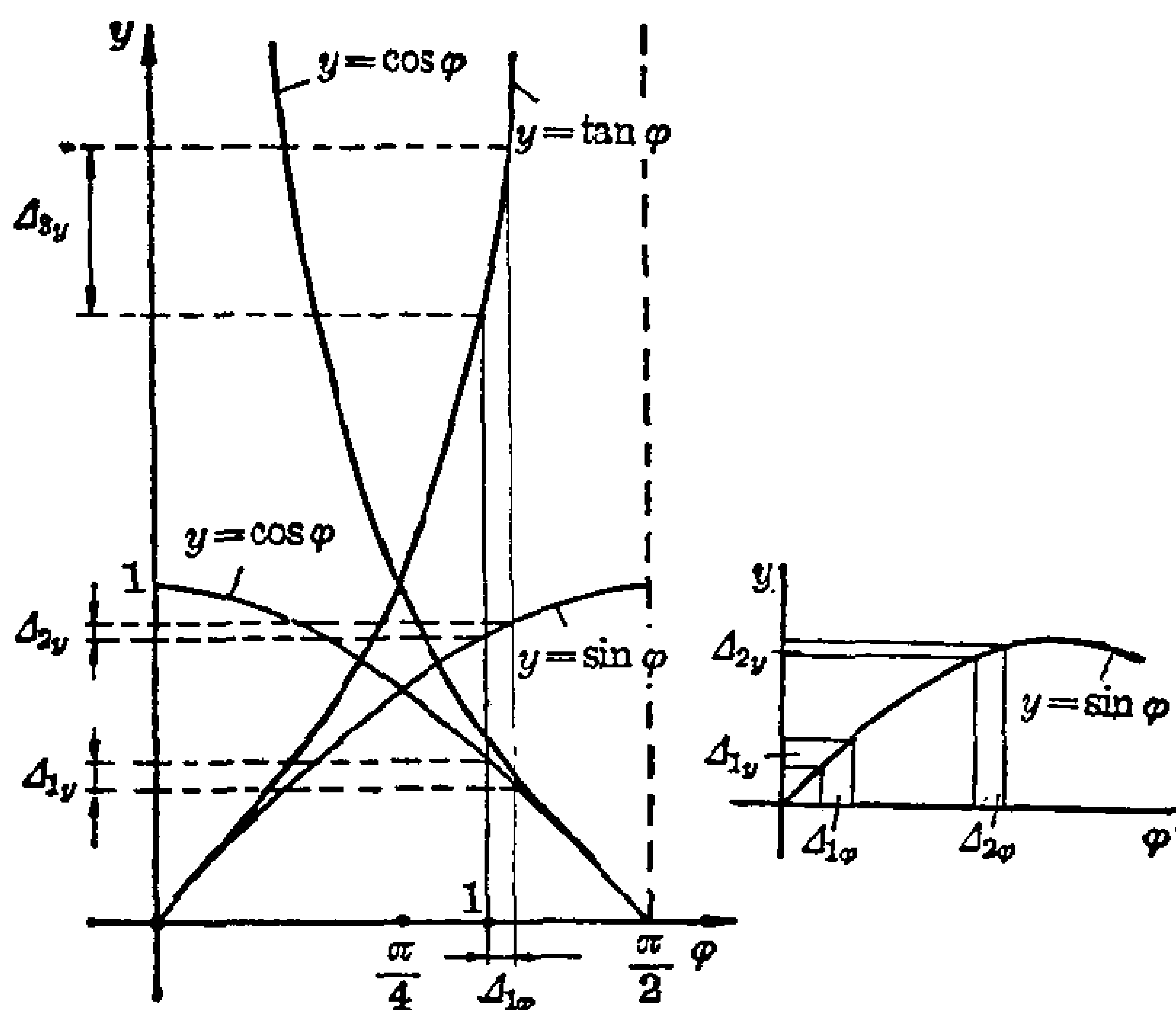


图 11.1-2 查三角函数时的精度

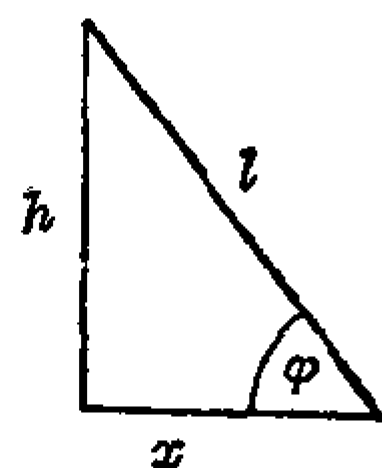


图 11.1-3 靠在墙上一架梯子的倾斜度，$h=1.2$，$l=1.5$

$\sin\varphi=\frac{1.2}{1.5}=0.8$（见图11.1-3）。梯子脚离开墙的距离为 x，$x=\sqrt{(1.5)^2-(1.2)^2}=0.90$ 米。作为验算，计算出 $x_s=1.5\cos\varphi$ 和 $x_t=1.2\cot\varphi$。从没有插值的4位数三角函数表得到整数值 $\varphi_1=53°$，由此给出 $x_{1s}=0.903$ 和 $x_{1t}=0.904$，这是跟 l 和 h 的精度相适应的。而从7位数三角函数表所得到的是缺乏实际意义的值 $\varphi_2=53°7'48.4''$，$x_{2s}=0.9000000$ 和 $x_{2t}=0.8999996$。梯子的距离几乎不能测到4毫米以内的精度，当然更不用说千分之四毫米的精度了。因此这个结果不可能比已给出的值更精确。

为了增加测量精度，要做辅助测量并采用误差法和最小二乘法计算最有代表性的值。

应用

圆内弦的长度　设圆的半径是 r，弦的长度是 s，则弦 s 所对的圆心角是同弦所对的圆周角的两倍（见图11.1-4）。从圆心 M 向弦 s 作垂线，则此垂线同时平分圆心角和弦 s，并且形成两个全等的直角三角形。然后得到：$\sin\gamma=\frac{s}{2r}$，或者 $s=2r\sin\gamma$。

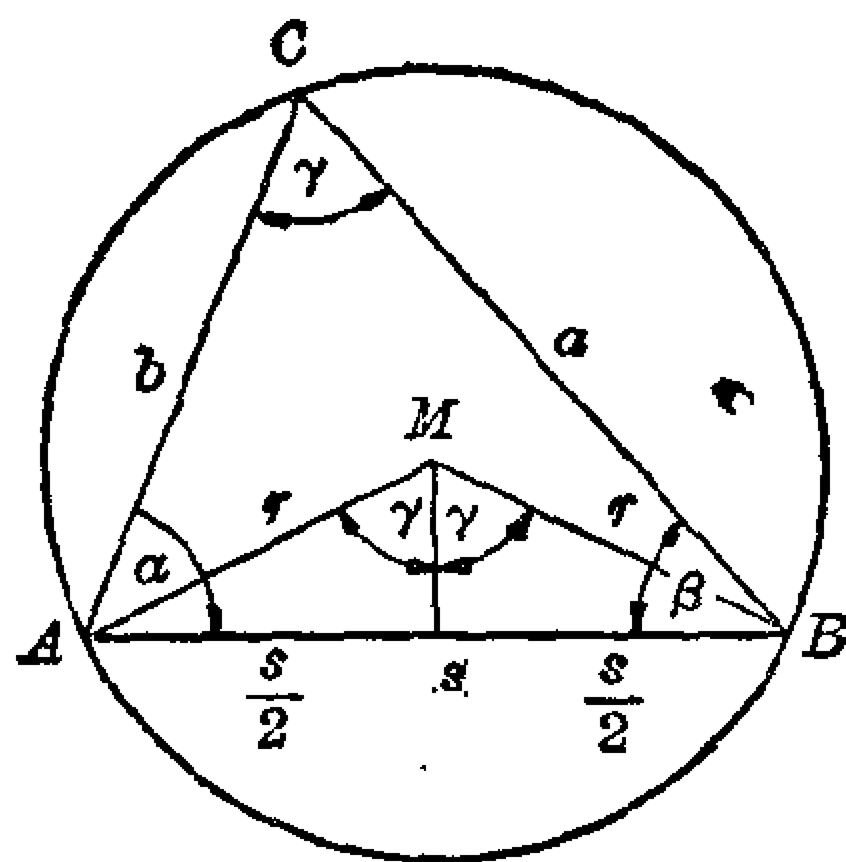


图11.1-4　圆的弦

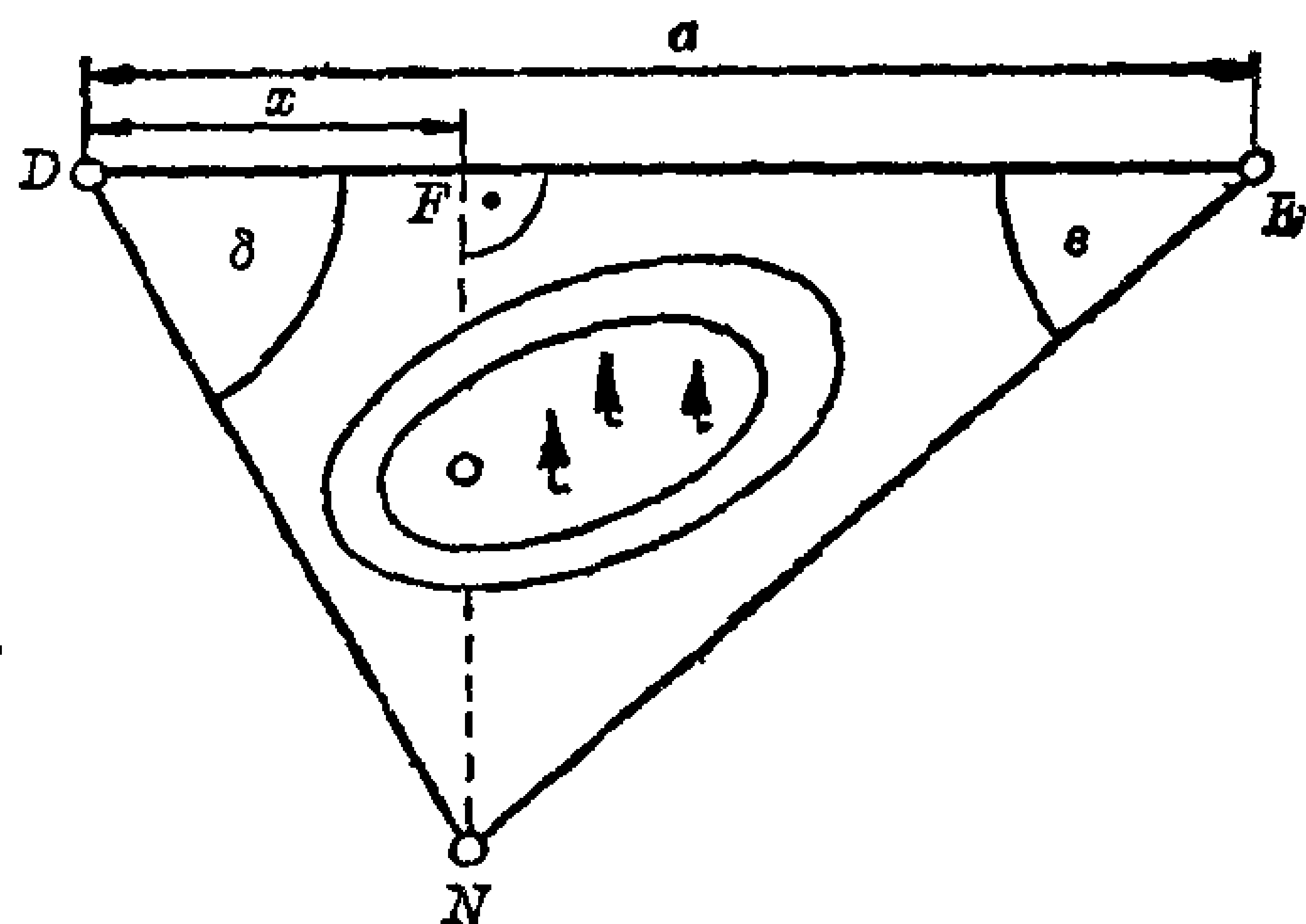


图11.1-5　确定从隐藏点出发的直角

确定从隐藏点发出的直角　在村子 D 和 E 之间有一条笔直的水管（见图11.1-5），要从这条水管造一条垂直的分支水管到 N 村去，并把水塔造在介于这中间的山脊上。分支水管离开主水管的分支点是 F，虽然从 D 和 E 可以看到 N 点，但从所求的点 F 却看不到 N。现已测得距离

$a=|DE|$ 和角 δ。F 在 DE 上的位置可以由距离 $x=|DF|$ 来确定。从直角三角形 DFN 和 EFN 得到: $|FN|=x\tan\delta$, $|FN|=(a-x)\tan\varepsilon$ 因此 $x\tan\delta=(a-x)\tan\varepsilon$, $x(\tan\delta+\tan\varepsilon)=a\tan\varepsilon$, $x=a\dfrac{\tan\varepsilon}{\tan\delta+\tan\varepsilon}$, 为了用对数来计算 x, 用加法定理对这个表达式进行变换:

$$x=\frac{a\sin\varepsilon/\cos\varepsilon}{\sin\delta/\cos\delta+\sin\varepsilon/\cos\varepsilon}=\frac{a\sin\varepsilon\cos\delta\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon(\sin\delta\cos\varepsilon+\cos\delta\sin\varepsilon)}$$

$$=a\frac{\cos\delta\sin\varepsilon}{\sin(\delta+\varepsilon)}。$$

确定高度 测量出从点 A 到树顶的仰角 ψ, 树根 F 和观察点的底部 S 之间的距离 s, 以及测量仪的高度 h_2(即垂直距离 $|AS|$), 由此就能确定树的高度(见图 11.1-6)。因 $h_1=s\tan\psi$, 于是树的实际高度由下式给出:

$$H=h_1+h_2=s\tan\psi+h_2。$$

确定高度的近似方法。

1. 不测量仰角 ψ, 而沿着等腰直角三角形 ABC 的斜边 AC 观察树顶, 此三角形的 CB 边是用铅垂线垂直放置的。此时 $\psi=45°$, 从而得到 $h_1=s$, $H=s+h_2$(见图 11.1-6)。

这种方法只有在有足够的空间来适当地选择观察点时才能使用, 否则,就只能使用下面这种常用于森林中的方法。

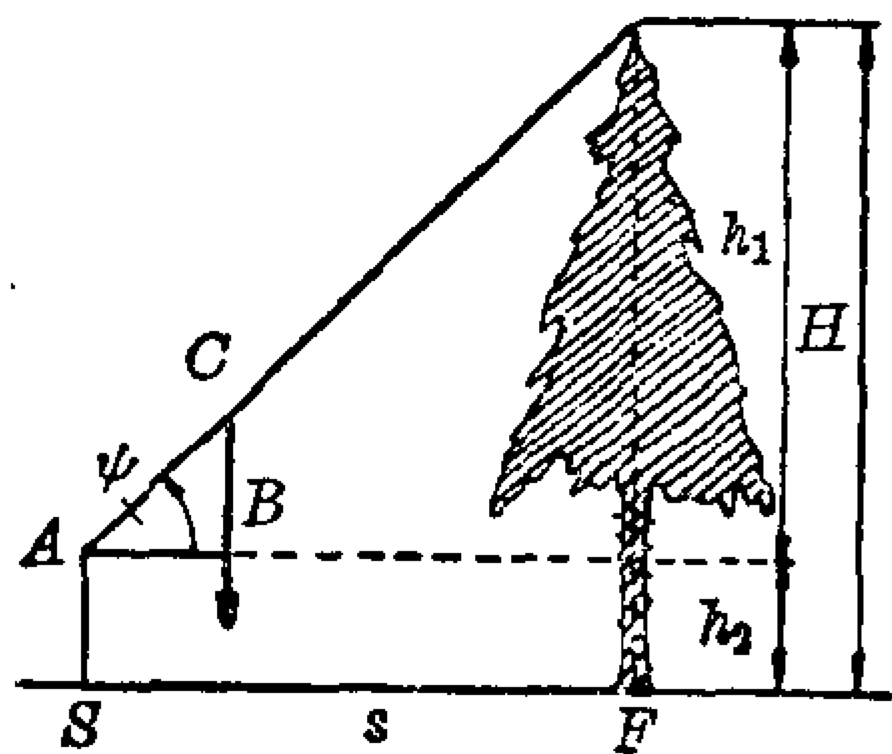


图 11.1-6 树高的确定

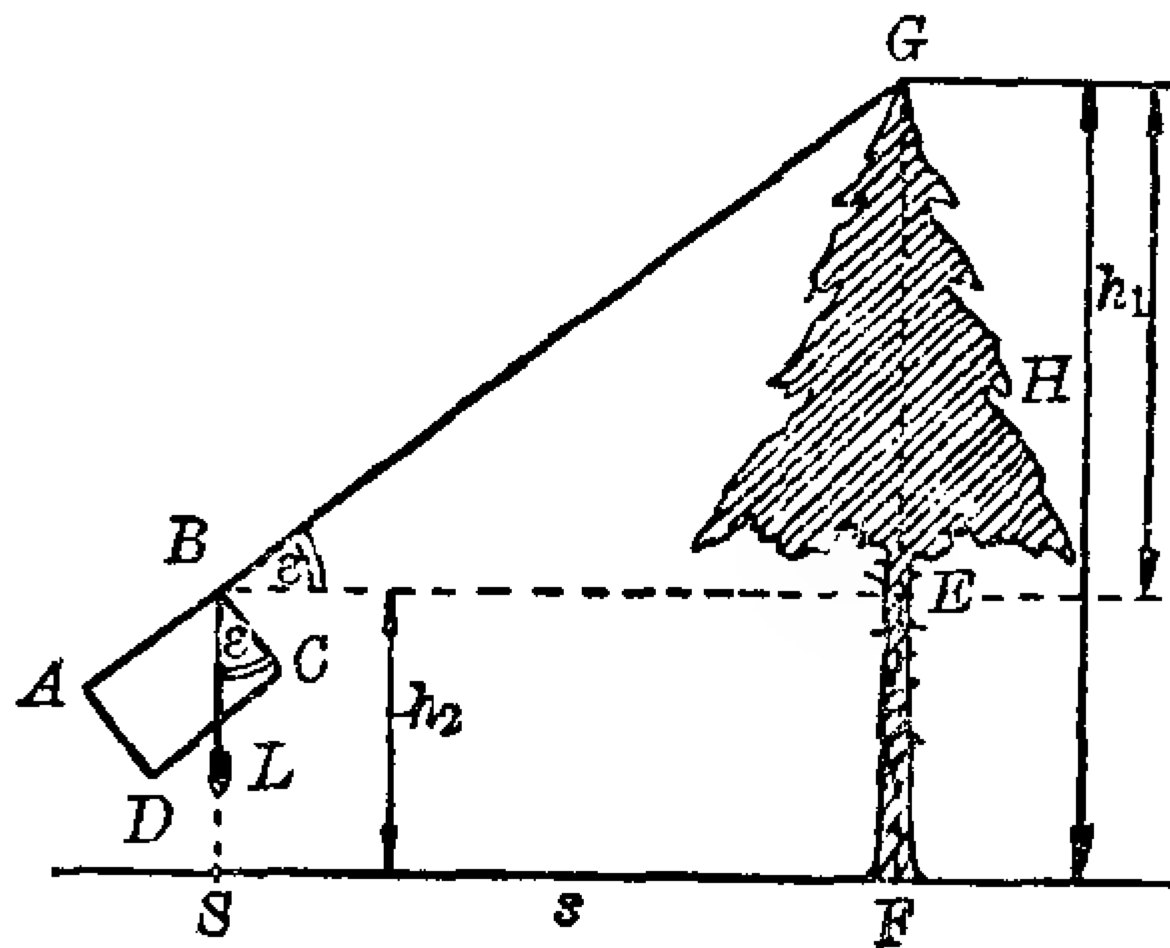


图 11.1-7 森林中测量高度的方法

2. (用木头或板做成的)*矩形* $ABCD$ 按如下位置放置: 使它沿着 AB 边看到树顶 G(见图 11.1-7), 从 B 点挂下一条铅垂线, 它跟矩形的边 CD 相交于点 L。图中标为 ε 的两个角相等, 这是因为这两个角的两条对应

边互相垂直。于是直角三角形 BCL 和 BEG 相似，故有 $\frac{|GE|}{|BE|}=\tan\varepsilon=\frac{|CL|}{|BC|}$，如选择 $|BC|=10$ 英寸，并把边 $|CD|$ 按英寸来划分，则 $\frac{|CL|}{|BC|}=\frac{|CL|}{10}$ 总是一个十进制分数，其值为 $\tan\varepsilon$，用这种方法"标出的"矩形 $ABCD$ 就好象是一个正切表，使用起来特别简便。从 $h_1=|GE|=s\tan\varepsilon$，就得到树高 $H=s\tan\varepsilon+h_2=s\cdot\frac{|CL|}{10}+h_2$。

确定太阳的高度　根据长度为 s 的垂直杆投影在水平面上阴影的长度 b，就能确定太阳光线和水平面之间的夹角 φ（见图 11.1-8），这个夹角 φ 就称为太阳的高度。我们得到 $\tan\varphi=\frac{s}{b}$，或者 $\cot\varphi=\frac{b}{s}$。如果杆的长度为 1 码，则按码来计量的影子长度立刻给出 $\cot\varphi$ 的值。

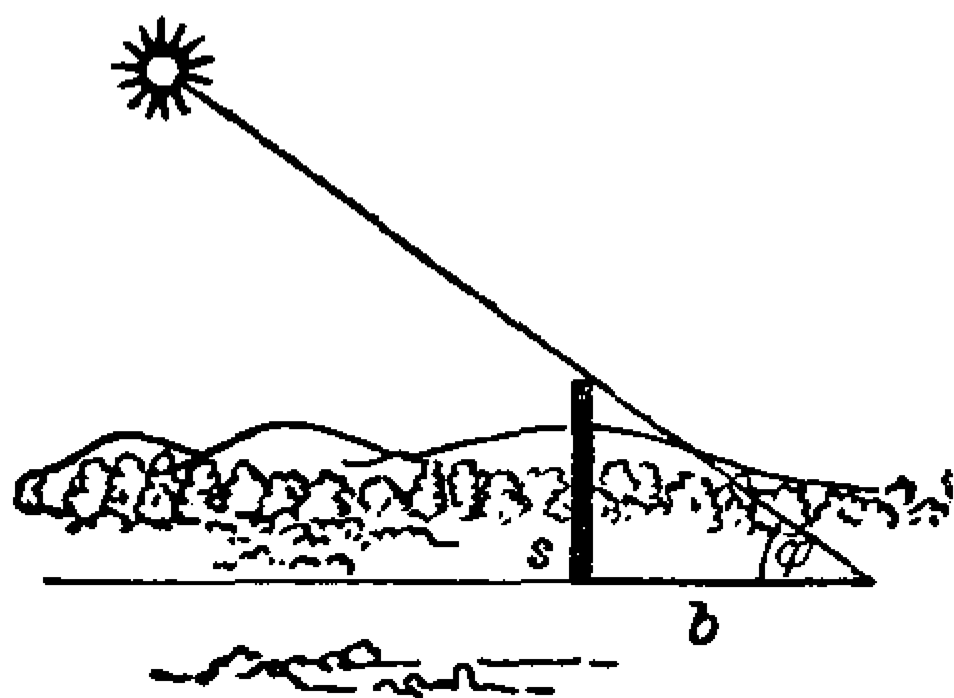


图 11.1-8　太阳的高度

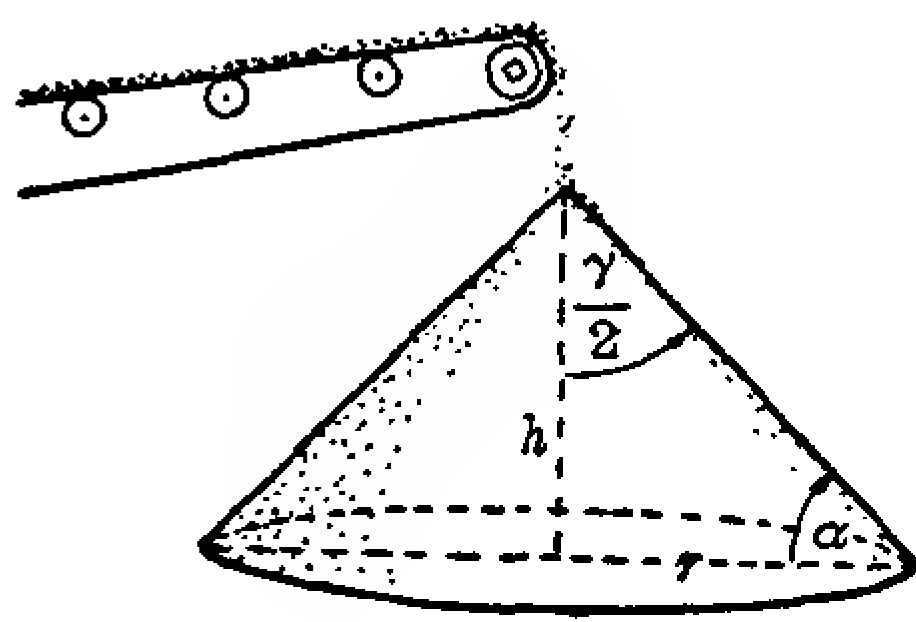


图 11.1-9　沙尖堆

尖堆的角度　如果在传送皮带上传送沙粒，则在沙粒落下时就形成了一个圆锥状的堆，或者叫作沙尖堆（见图 11.1-9）。它的容量能从它的圆形底面的直径 $d=2r$ 以及生成圆锥曲面的直线（即母线）和水平面之间的夹角即**尖堆角** α 来求出：$V=\pi r^2h/3$，其中 $h=r\tan\alpha$，故有 $V=\frac{\pi r^3}{3}\tan\alpha$，如果用圆锥的顶角 γ 来代替尖堆角 α，则 $h=r\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ 和 $V=\frac{\pi r^3}{3}\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)$。

对沙粒而言，其尖堆角近似于 33°，而对硬橡皮大约是 36°。

正四面体和正八面体各平面之间的夹角　正四面体由四个全等的等边三角形和长度都为 k 的六条边所围成。两个相邻三角形面之间的夹角 ν 可以在四面体的一个过 BD 而垂直平分 AC 的截面上看到（见图 11.1-10）。截面 BDM 是等腰三角形，它的两腰都是四面体的面

的高，其长为$h=\frac{\sqrt{3}}{2}k$。四面体的高η跟其中一腰垂直，并把MB按比例$|MF|:|FB|=1:2$分成两段，因为等边三角形ABC的高也就是中线。在直角三角形MFD中，h是斜边，而$|MF|=\frac{h}{3}$是角ν的邻边，因此$\cos\nu=\frac{h}{3}\Big/h=\frac{1}{3}$，$\nu=70°31'44''$。

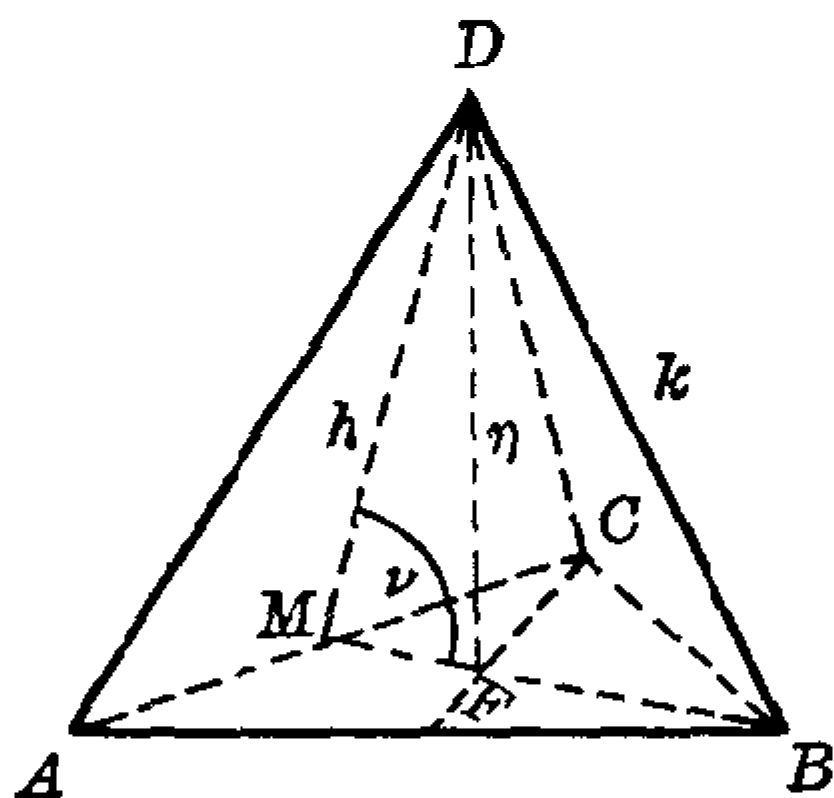


图 11.1-10 四面体

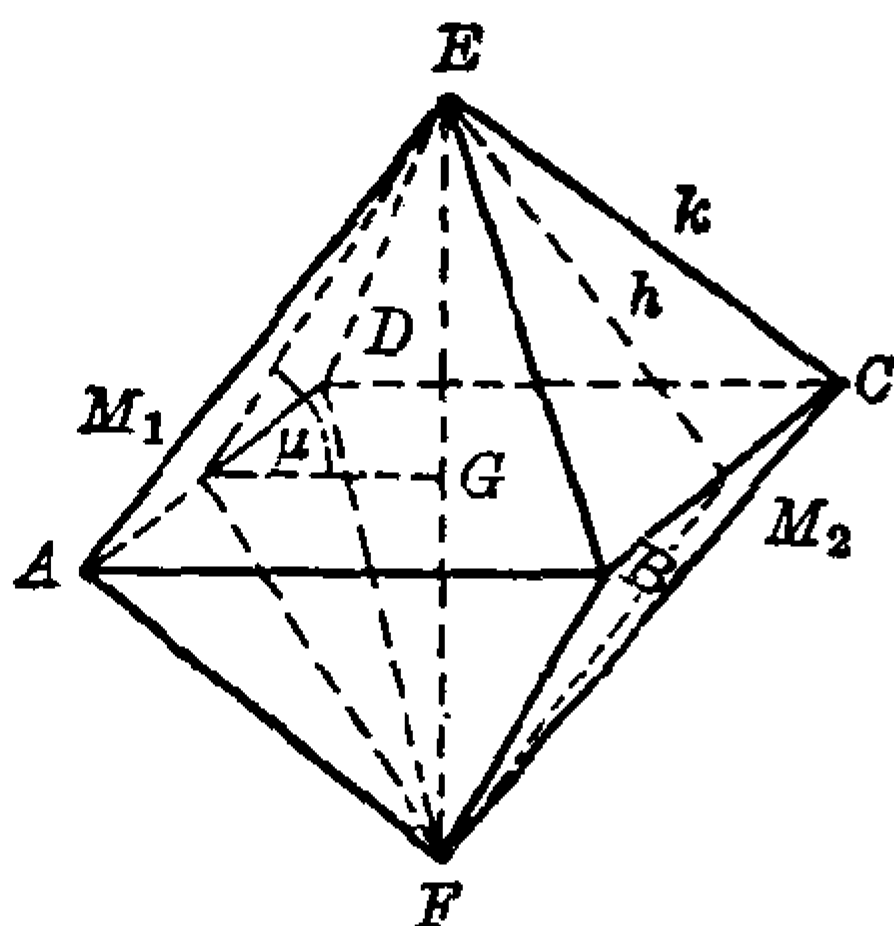


图 11.1-11 八面体

正八面体是由8个全等的等边三角形和12条长度都为k的边所围成。过两个相对的顶点E, F和两条平行边($AD \parallel BC$)的中点M_1，M_2作一平面跟八面体相截，两个相邻三角形表面之间的角度2μ能在此截面中看到，其中直线EF跟边AD，BC是异面的(见图11.1-11)。此截面是边长$h=\frac{\sqrt{3}}{2}k$的菱形，其对角线$|EF|=\sqrt{2}k$，$|M_1M_2|=k$，它们互相垂直平分，并且等分菱形的顶角。因此由直角三角形M_1GE给出半角μ:

$$\cos\mu=\left(\frac{1}{2}k\right)\Big/\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\mu=54°44'07'' \quad 或 \quad 2\mu=109°28'14''。$$

11.2 一般三角形中的三角函数

在许多情形下，测量得到的长度和角度不在直角三角形中，因而引进了一般三角形中边和角的关系，其中最重要的就是正弦定理和余弦定理。对于跟三角形有关的计算来说，有这两个定理就足够的了。在计算时，特别是在用查表法时，使用余弦定理不太方便，因为这个公式包含了

平方项和乘积项的和。因此，可以用正切公式或半角公式来代替它。

平面三角公式

正弦定理　每一个三角形 ABC（见图 11.2-1）有一个外接圆，其圆心 M 是三角形三条边的垂直平分线的交点。三角形的边是外接圆中的弦，这条边所对的角是外接圆的圆周角。若用 R 表示外接圆的半径，则三角形的边作为圆内的弦可以这样来计算：$a=2R\cdot\sin\alpha$，$b=2R\sin\beta$，$c=2R\sin\gamma$。从这些式子就得到直径

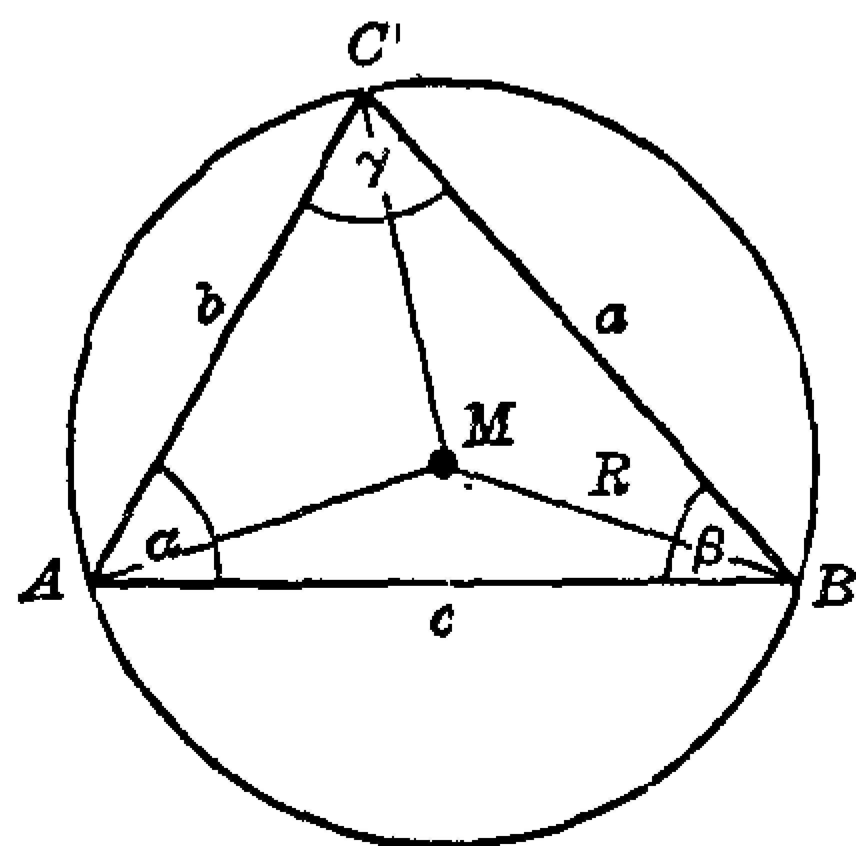


图 11.2-1　正弦定理

$$2R=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}。$$

> 正弦定理
>
> $$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$
>
> 或者　　$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$

在任一三角形中，每一条边跟它所对角的正弦之比是一个常数（等于外接圆的直径）。

正弦定理　在平面三角形中，任何两条边之比等于它们所对角的正弦之比。

正弦定理把相对应的数据联系了起来。如果给出了两个相对应的数据，再任意给第三个数据，就可算出它所对应的那个数据。例如给出 a，α 和 b，从 $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{b}{a}$，$\sin\beta=\frac{b}{a}\sin\alpha$，就可确定 β 的值；或者给出 b，β 和 γ，从 $\frac{c}{b}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$，$c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$，就可确定边 c 的值。

用正弦定理计算角度时，当然可以看到由 $\sin\varphi$ 的值给出了两个角 φ_1 和 φ_2，正如在单位圆内看到的情形一样。这两个角中一个角是锐角，而另一个角是 180° 与此锐角之差；$\varphi_1+\varphi_2=180°$。在每一具体场合，必须区分这两个角中那一个角是跟给出的几何条件相符合的。

余弦定理　三角形 ABC 中，设高 h_c 的垂足是 D，边 b 在边 c 上的投

影是 $|AD|=q$(见图 11.2-2)。这个投影 $q=b\cos\alpha$,对锐角 α 是正的,对钝角 α 是负的, 这样对任何 α 的值, 线段 DB 的长度为 $c-q=|DB|$, 高 h_c 的长度为 $h_c=b\sin\alpha$。对直角三角形 DBC 应用毕达哥拉斯定理, 得到: $a^2=h_c^2+(c-q)^2=b^2\sin^2\alpha+c^2+b^2\cos^2\alpha-2cb\cos\alpha$, 或 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$。用高 h_a 和 h_b, 能得到相应的关系式。用循环置换法, 即 a 用 b 代替, b 用 c 代替, c 用 a 代替; 对角同样有 $\alpha\to\beta\to\gamma\to\alpha$, 就可从形式上得到这些公式。

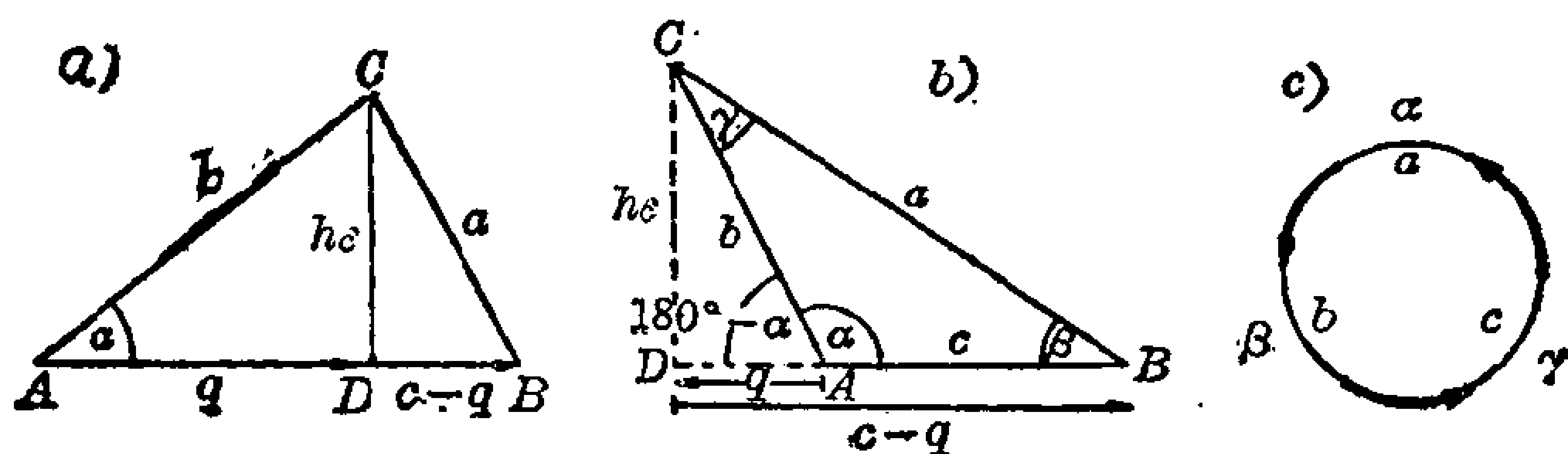


图 11.2-2　余弦定理

a) 锐角三角形; b) 钝角三角形; c) 循环置换

余弦定理	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

余弦定理　在平面三角形中, 一条边的平方等于其他两条边的平方和减去这两条边跟这两边夹角的余弦之积的两倍。

当已知两边及其夹角时,用余弦定理能计算出第三条边,而当已知三条边时,就可以求得任一角:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}。$$

正切公式　应用对应项的和差比例法则及加法定理,我们可推出:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}。$$

分子和分母同时除以 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,就得到关于边 a 和 b 的正

切公式，用循环置换得到其余几对边之间的相应公式：

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}},\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\tan\dfrac{\beta+\gamma}{2}},\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}{\tan\dfrac{\gamma+\alpha}{2}}。$$

正切公式	
	$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{180^\circ-\gamma}{2}$
	$\tan\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}\tan\frac{\beta+\gamma}{2},\quad \frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{180^\circ-\alpha}{2}$
	$\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}=\frac{c-a}{c+a}\tan\frac{\gamma+\alpha}{2},\quad \frac{\gamma+\alpha}{2}=\frac{180^\circ-\beta}{2}$

从两条边(例如 a 和 b)以及夹角(γ)就可使用上述公式求得其余两个角(α 和 β)：α 和 β 的半角和 $\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$ 由夹角 γ 给出，而半角差 $\frac{\alpha-\beta}{2}$ 由正切公式给出；从 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\xi$ 和 $\frac{\alpha-\beta}{2}=\eta$，就得到 $\alpha=\xi+\eta$，和 $\beta=\xi-\eta$。

半角公式　在给出三条边的情形下，为了得到适合于对数计算的公式，把余弦定理给出的表达式 $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 代到下面公式中去：

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\quad(\text{参看 I. 第 10 章})：$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{1}{bc}}。$$

对 $\cos\frac{\beta}{2}$ 和 $\cos\frac{\gamma}{2}$ 也有类似的公式。如引进三角形的周长 $2s$，则 $a+b+c=2s$，或者 $s=\frac{a+b+c}{2}$，于是

$$s-a=\frac{1}{2}(b+c-a),\quad s-b=\frac{1}{2}(c+a-b),\quad s-c=\frac{1}{2}(a+b-c)。$$

因此

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)s}{bc}},\quad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)s}{ca}},\quad \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)s}{ab}}。$$

类似地将余弦定理给出的 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 之值代到公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}},\ \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}},$$

得到关系:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}。$$

将对应等式相除就得到半角公式:

半角公式	$2s=a+b+c$
$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\ \tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$ $\tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$	

对具体计算而言,当需要由三条边 a, b, c 来计算三个角 α, β, γ 时,建议采用上述公式。已知的三角形三个角之和能用来验算。

解三角形的四种主要情形

在三角形中可以给出下列数据: 两个角和一条边;两条边和一个角,这个角既可以是这两条边中一条边的对角,也可以是这两条边的夹角;三条边。对这些情形的解法将在下面给出。

I. 已知两个角和一条边 因为三角形的内角和是180°,因而第三个角也就知道了。根据正弦定理可计算出其余的边; 例如,从已知 c, α, β,得到 $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$, $a=c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, b=c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$。

【例】 力 $F=130$ 个单位,要把它分解成两个分力 F_1 和 F_2,使 F_1 和 F 形成 $\delta=18°$的角,而这两个分力之间形成$\varepsilon=65°$的角(见图 11.2-3)。已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $F=|AC|$,由角 $\delta=18°$ 和 $\omega=\varepsilon-\delta=47°$,就确定了 B 点的位置。在三角形 ABC 中,有

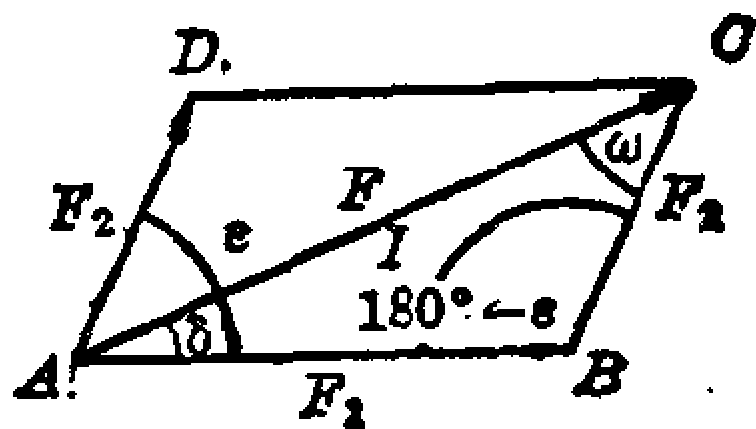


图 11.2-3 力 F 分解成两个分力 F_1 和 F_2

$$F_1=F\frac{\sin\omega}{\sin(180°-\varepsilon)}=F\frac{\sin 47°}{\sin 65°};\ F_1=104.902\text{ 个单位,}$$

$$F_2=F\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}=F\frac{\sin 18°}{\sin 65°};\ F_2=44.324\text{ 个单位。}$$

II. 已知两条边和其中一条边的对角　设 a、c 和 γ（见图 11.2-4）为已知，则得到:

1. $\sin\alpha=\frac{a}{c}\sin\gamma$;
2. $\beta=180°-(\alpha+\gamma)$;
3. $b=c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$。

当然，仅当 $\frac{a}{c}\sin\gamma\leqslant 1$ 时等式1.才能成立。由于这个条件，因此存在着几种可能情形。

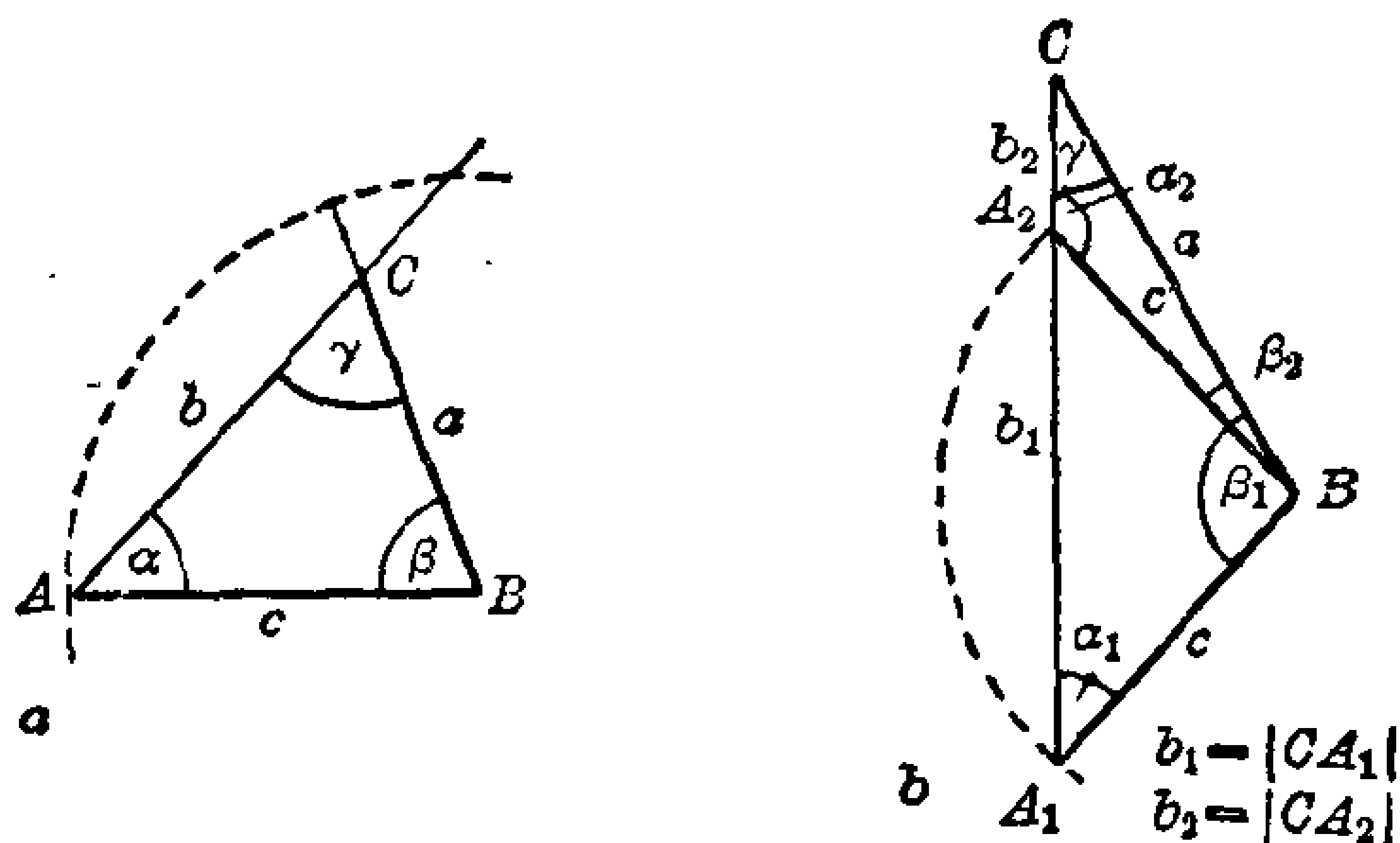


图 11.2-4　给出两条边和其中一条边的对角，求解三角形
a）一个解；b）两个解

II(1) $a<c$，即给出的角对着较长的边。那末总是存在一个必须比角 γ 要小的角 α，这是因为角 α 对着一条较短的边。并且，解是唯一的；虽然对于角 α_1 和 $\alpha_2=180°-\alpha_1$，其正弦值相等，但只有 $\alpha_1<\gamma_1$ 才是问题的解。

【例】　$a=56.9$ 米，$c=68.0$ 米，$\gamma=63°57'$。

1. $\sin\alpha=\frac{a}{c}\sin\gamma=\frac{56.9}{68.0}\sin 63°57'$; $\alpha_1=48°45'$; $\alpha_2=180°-\alpha_1=$ $131°15'$，比 γ 要大。

2. $\beta=180°-(\alpha_1+\gamma)$; $\beta=67°18'$。

3. $b=c\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}=68.0$ 米$\cdot\dfrac{\sin 67°18'}{\sin 63°57'}$; $b=69.8$ 米。

II(2) $a=c$; 三角形是等腰三角形，因此 $\alpha=\gamma$。

II(3) $a>c$, 即给出的角对着较短的边，则 a 可能大到使 $\sin\alpha\leqslant1$ 的条件不能满足。因此 II(3.1): $\sin\alpha>1$ *没有解存在*，即从给定的数据不能作出一个三角形来，例如，$c=2$ 英寸，$a=5$ 英寸，$\gamma=75°$。II(3.2): $\sin\alpha=1$, 于是 α 是一个直角，并且 $\alpha_2=180°-\alpha_1=\alpha_1$。因而解和作图都是唯一的，例如，$a=2$ 英寸，$c=1$ 英寸，$\gamma=30°$。II(3.3): 如果 $\sin\alpha<1$, 则能求得 α_1 和 $\alpha_2=180°-\alpha_1$, 因为 $\sin\alpha>\sin\gamma$, 因而 $\alpha_1>\gamma$, 从而 $\alpha_2+\gamma=(180°-\alpha_1)+\gamma<180°$, 即角 α_2 也满足几何条件。问题有**两个解**。

【例】 $a=87.23$ 米，$c=65.95$ 米，$\gamma=30.42°$。

1. $\sin\alpha=\dfrac{87.23}{65.95}\sin 30.42°$; $\alpha_1=42.04°$; $\alpha_2=180°-\alpha_1=137.96°$; $\alpha_1>\gamma$, $\alpha_2>\gamma$。
2. $\beta_1=180°-(\alpha_1+\gamma)$; $\beta_1=107.54°$, $\beta_2=11.62°$。
3. $b_1=65.95$ 米$\cdot\dfrac{\sin 104.54°}{\sin 30.42°}=126.0$ 米 和

   $b_2=65.95$ 米$\cdot\dfrac{\sin 11.62°}{\sin 30.42°}=26.23$ 米。

III. 已知两边和夹角 从余弦定理或正切公式可以得到解。在三角形 ABC 中，已知 b、c、和 α 的值，那末由*余弦定理*给出 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, 并从这个公式得到唯一的值 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$。从余弦定理也能唯一地定出角 β, 即从 $\cos\beta=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ 可定出 β。但是一般宁可使用正弦定理 $\sin\beta=\dfrac{b}{a}\sin\alpha$ 来得到 β, 满足这个方程的两个角 β_1 和 β_2 中只有一个角适合于几何条件。从 $\dfrac{\gamma+\beta}{2}=90°-\dfrac{\gamma}{2}$, 并由*正切公式*得到: $\tan\dfrac{\gamma+\beta}{2}\cdot\dfrac{c-b}{c+b}=\tan\dfrac{\gamma-\beta}{2}$; 从 $\dfrac{\gamma+\beta}{2}$ 和 $\dfrac{\gamma-\beta}{2}$ 的值就能求得角 β 和 γ 的值。用正弦定理能定出第三条边的值: $c=a\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$。

【例】 R 和 S 两地之间沿着直线敷设一条电缆。因两地之间有一片林区，使它们不能互相看到，但能找到一点 A, 可测出 A 跟这两地的距离分别是 $d=|AR|=2.473$ 英里和 $e=|AS|=3.752$ 英里，以及夹角

$\tau=\measuredangle RAS=42°26'10''$ (见图 11.2-5), 问电缆的长度 x 应为多少, 以及从 R, S 应该分别沿着什么角度 ε, δ 敷设才行? 为了进行比较, 给出两种解法:

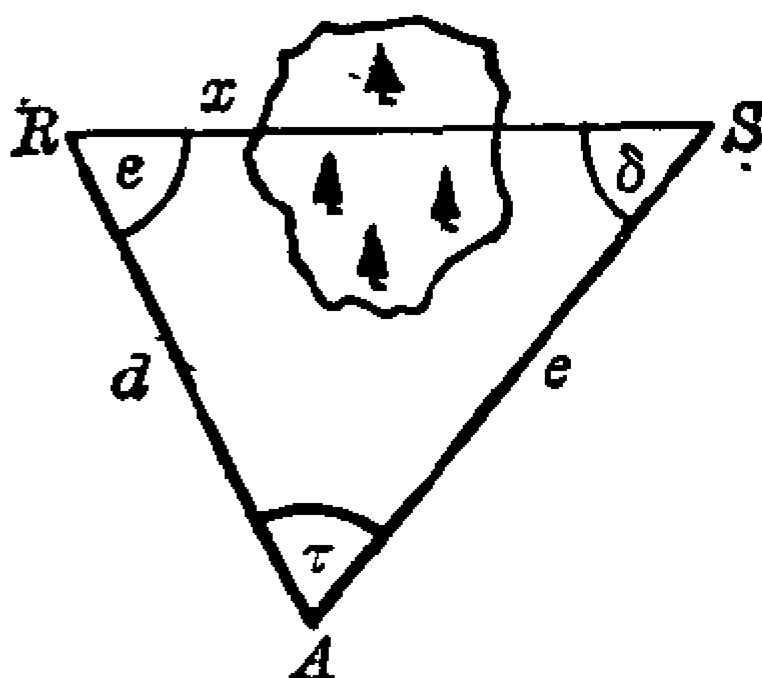


图 11.2-5 一条不可接近的边的长度

1. $x^2=d^2+e^2-2de\cos\tau$

   $x^2=6.497313$

   $x=2.549$ 英里

2. $\sin\varepsilon=\dfrac{e}{x}\sin\tau$

   $\varepsilon_1=83°20'00''$

   $\varepsilon_2=96°40'00''$

3. $\delta=180°-(\varepsilon+\tau)$

   $\delta_1=54°13'50''$

   $\delta_2=40°53'50''$

因为 $e>x>d$, 因此必须有 $\varepsilon>\tau>\delta$,只有 δ_2 满足此条件,因此解是 x, ε_2, δ_2。

$$\tan\frac{\varepsilon-\delta}{2}=\frac{e-d}{e+d}\tan\frac{\varepsilon+\delta}{2}$$

1. $\varepsilon+\delta=180°-\tau=137°33'50''$

   $\dfrac{\varepsilon+\delta}{2}=68°46'55''$

   $\dfrac{\varepsilon-\delta}{2}=27°53'18''$

   $\varepsilon=96°40'13''$

   $\delta=40°53'37''$

   $\tau=42°26'10''$

   $\varepsilon+\delta+\tau=180°00'00''$(验算)

2. $x=e\dfrac{\sin\tau}{\sin\varepsilon}=2.549$ 英里

这两个结果有些不一致。其原因(在导论中详细讨论过)是在 90° 邻域里,由正弦函数的值来确定角度时精度较差: $\sin 96°40'00''=0.99324$, $\sin 96°40'10''=0.99323$, $\sin 96°40'20''=0.99323$; 根本定不出秒的数值是多少。在这种情形下, 如果用余弦定理, 即从等式 $\cos\varepsilon=\dfrac{x^2+d^2-e^2}{2xd}$ 来计算角度 ε, 就能得到较高的精度。我们得到唯一的值 $\cos\varepsilon=\dfrac{-1.464462}{2(2.549)(2.473)}$ 或者 $\varepsilon_2'=96°40'14''$, 这就跟从正切公式得到的值相当接近。因此从余弦定理得到的解是: $x=2.549$ 英里, $\varepsilon_2'=96°40'14''$, $\delta_2=40°53'36''$。

IV. 已知三条边 从余弦定理或半角公式即从公式 $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 或 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ 可以求出解答，其他类似的公式用循环置换来得到。两种解法答案都是唯一的，而且既可从六个数 a^2, b^2, c^2, $2ab$, $2bc$, $2ca$ 的适当组合，也可以从四个数 s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ 的适当组合来得到答案。因而三个角 α, β, γ 中每一个角都应当求出来，而三角形的内角和可用来验算。

【例】 在高地上的三个点 R_1, R_2, R_3 要用雷达进行联系（见图 11.2-6）。在 R_1, R_2, R_3 的每一点处建造的发射器和接收器必须朝着什么角度才行？已知 $|R_1R_2|=e=45.21$ 英里；$|R_2R_3|=a=52.46$ 英里；$|R_3R_1|=b=39.37$ 英里。

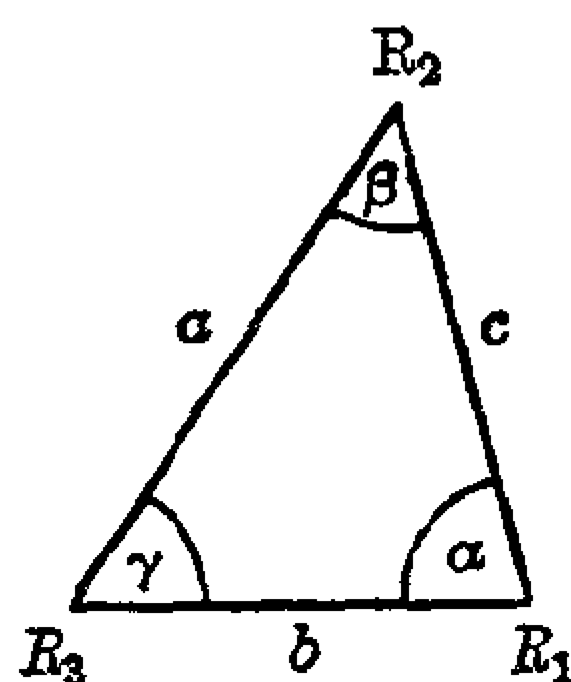


图 11.2-6 给出三条边求解三角形

余弦定理

$a^2=2752.0516$
$b^2=1549.9969$
$c^2=2043.9441$

$b^2+c^2-a^2=841.8894$
$c^2+a^2-b^2=3245.9988$
$a^2+b^2-c^2=2258.1044$

$\alpha=76°19'12''$
$\beta=46°49'06''$
$\gamma=56°51'42''$
$180°00'00''$

半角公式

		lg
$a=52.46$	$s-a=16.06$	1.20575
$b=39.37$	$s-b=29.15$	1.46464
$c=45.21$	$s-c=23.31$	1.36754
$2s=137.04$	$\longrightarrow s=68.52$	1.83582

$\alpha=76°19'12''$
$\beta=46°49'06''$
$\gamma=56°51'42''$
$180°00'00''$

11.3 另外一些公式和应用

在许多领域中，借助数学的关系式可以使论证更加精确；例如，当在平面直线图形中出现方向和角度时，就要用平面三角的定理。其中一个领域，即测量学，起着特殊的作用。在这门学科中所提到的关系要比其他领域更直接与这些定理有关，而且在历史上也是由于测量学的需要才引起平面三角的发展。因此，我们用专门一节来讨论在这个领域中的应用。

几何学

内切圆的半径 r　在三角形 ABC 中，内角平分线相交于内切圆的圆心 M 上。如果过三角形边上的切点 E, F, G 画三条半径(见图11.3-1)，则形成六个直角三角形。它们两两全等，特别是，分别用 x, y, z 来表示的三组对边是相等的，其长度是 $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$，其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$。在三角形 AGM 中，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\gamma}{x}=\frac{\gamma}{s-a}$，但由整个三角形的正切公式 $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$，因此 $\frac{\gamma}{s-a}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$，$\gamma=(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$，考虑 $\tan\frac{\beta}{2}$ 或 $\tan\frac{\gamma}{2}$ 可以得到同样的结果。

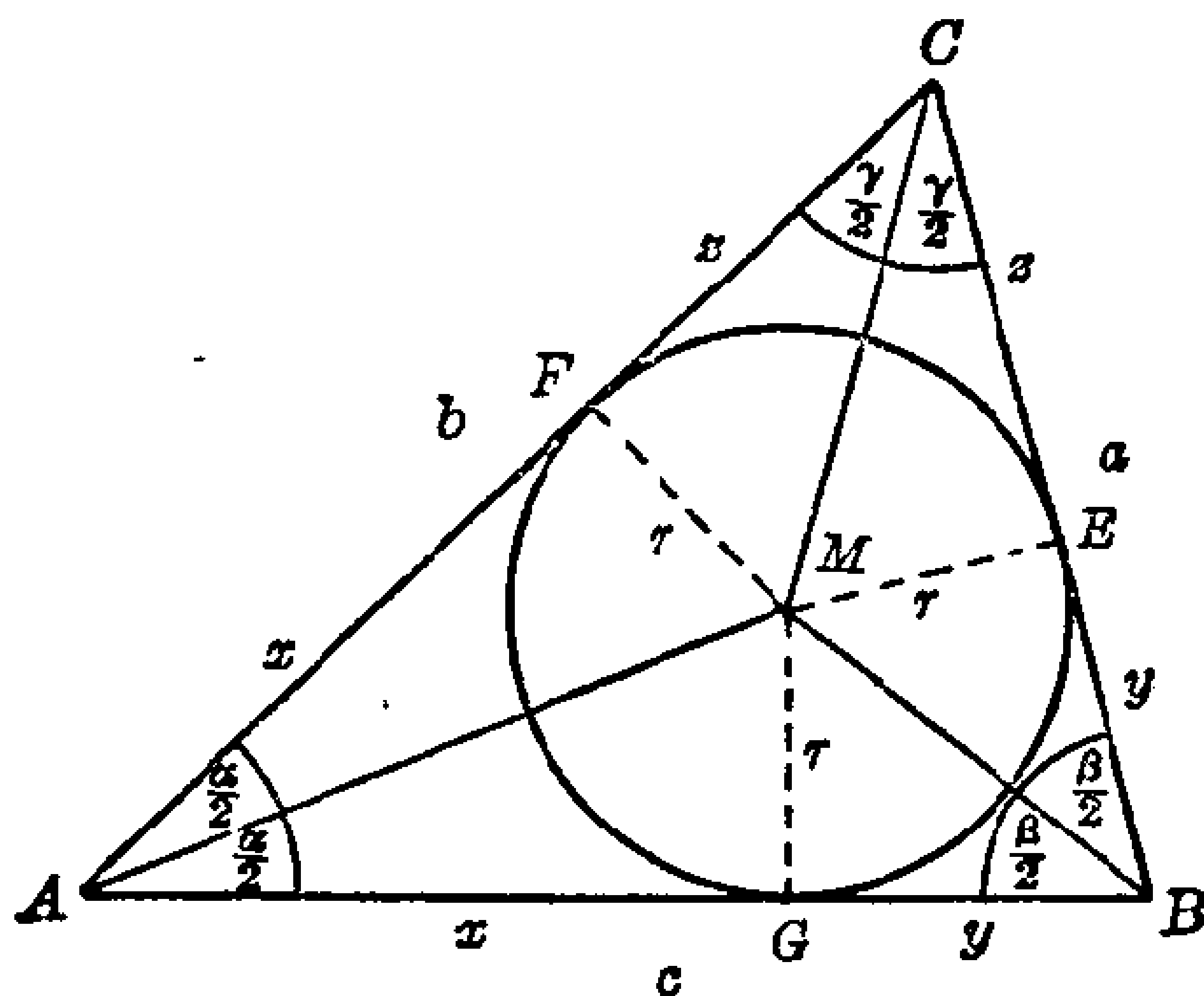


图 11.3-1　三角形的内切圆

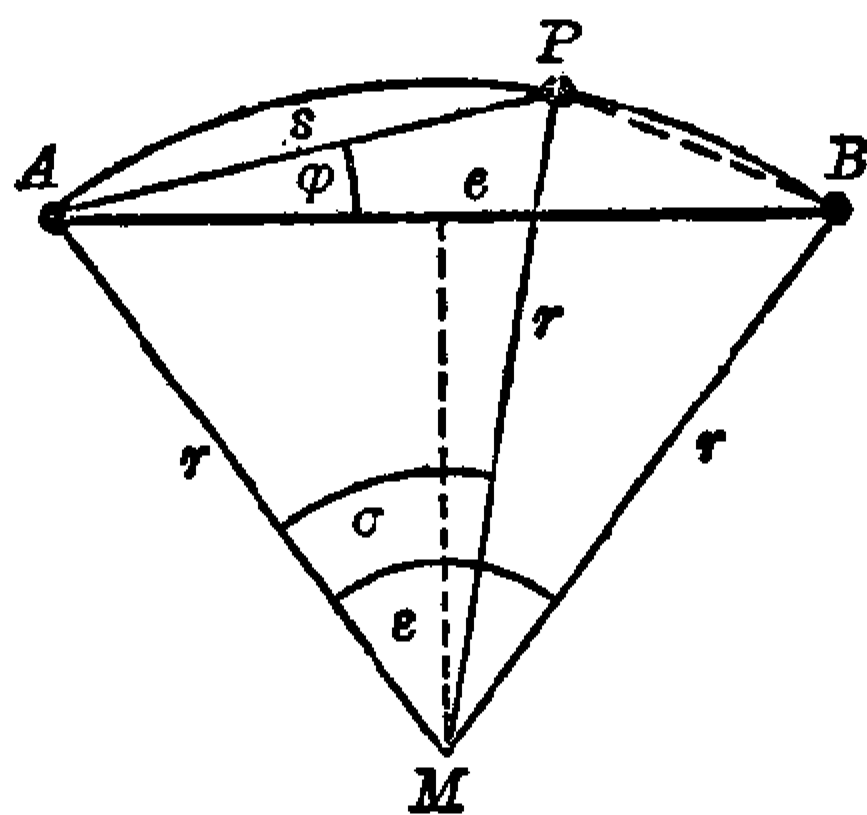


图 11.3-2　标出一条圆弧

内切圆半径公式	$\gamma=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

画出一条其圆心不可接近的圆弧　在两点 A 和 B 之间作出任意多个点 P_i，使这些点都位于过 A 和 B 并且半径为 r 的圆周上，其中 A 和 B 之间的距离 e 是已知的(见图 11.3-2)，圆心是不可接近的，这就需要求出从 A 点到 P_i 点的距离 s 和 AP_i 跟 AB 之间的角度 φ。设 P 是所需要的点之一，则三角形 AMP 是一个等腰三角形，对着圆心角 σ 的底边长 $s=2r\sin\frac{\sigma}{2}$，对着弦 PB 的圆心角 $\sphericalangle PMB$ 是 $\varepsilon-\sigma$，而对着弦 PB 的圆

周角是φ,这样,$\varphi=\frac{\varepsilon-\sigma}{2}$,或者$\sigma=\varepsilon-2\varphi$,可是在三角形$ABM$中的角$\varepsilon$能用$e=2r\sin\frac{\varepsilon}{2}$来确定,因此$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{e}{2r}$。从而依赖于角$\varphi$的距离$s$由下式给出:$s=2r\sin\frac{\sigma}{2}=2r\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}-\varphi\right)$,其中$\frac{\varepsilon}{2}=\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{e}{2r}\right)$。

三角形的面积　从面积公式$A=\frac{1}{2}ch_c$和$h_c=b\sin\alpha$,得到$A=\frac{1}{2}\cdot bc\sin\alpha$。从关系式$\sin\alpha=\frac{a}{2R}$,得到$A=\frac{abc}{4R}$,其中$R$是三角形外接圆的半径(参看图11.2-1),或者从$b=2R\sin\beta$和$b=2R\sin\gamma$,得$A=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$。再因为$R=\frac{a}{2\sin\alpha}$,得$A=a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$,在图11.3-1中,将高等于内切圆半径$r$的小三角形$ABM$,$BCM$和$CAM$的面积相加,得到赫伦公式:

$$A=\frac{1}{2}(cr+br+ar)=rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中
$$2s=a+b+c。$$

三角形面积	$A=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ca\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ $A=a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}=b^2\frac{\sin\gamma\sin\alpha}{2\sin\beta}=c^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$
赫伦公式	$A=rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

【例】　已知边$a=345.8$,$b=236.5$,$c=497.3$,需要计算三角形的面积,使用赫伦公式求得$s=539.8$,$s-a=194.0$,$s-b=303.3$,$s-c=42.5$;因此用4位对数表得到$A=36740$。常介绍一种粗略的计算法,在此情形下用计算尺得到:

$$A=\sqrt{539.8\cdot194\cdot303.3\cdot42.5}$$
$$\approx\sqrt{5.40\cdot10^2\cdot1.94\cdot10^2\cdot3.03\cdot10^2\cdot4.25\cdot10}$$
$$=10^3\sqrt{5.40\cdot1.94\cdot3.03\cdot42.5}=36700。$$

小数点位置的估计如下:

$$A\approx10^3\sqrt{10\cdot3\cdot10\cdot4.2}=10^4\sqrt{12.6}\approx3.5\cdot10^4。$$

等腰三角形。 如果腰用 a 来表示，底边用 c 来表示，而底角用 α 来表示(见图 11.3-3)，则面积由下式给出:

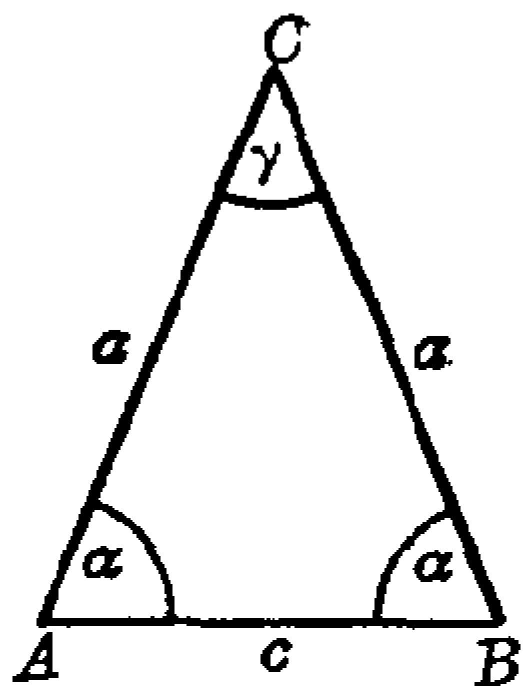


图 11.3-3 等腰三角形的面积

1. $A=\frac{1}{2}a^2\sin\gamma$，其中 $\gamma=180°-2\alpha$;

2. $A=\frac{c^2\sin^2\alpha}{2\sin\gamma}=\frac{c^2\sin^2\alpha}{2\sin 2\alpha}=\frac{c^2\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha}$,

$A=\frac{c^2}{4}\tan\alpha$;

3. $s=a+\frac{c}{2}$, $s-a=\frac{c}{2}$, $s-c=a-\frac{c}{2}$,

因此

$$A=\sqrt{\left(a+\frac{c}{2}\right)\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\left(a-\frac{c}{2}\right)}=\frac{c}{2}\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}=\frac{c}{4}\sqrt{4a^2-c^2}。$$

等边三角形。 每一条边的长为 a。

1. $A=\frac{1}{2}a^2\sin 60°$, $A=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

2. 由赫伦公式: $s=\frac{3}{2}a$, $s-a=s-b=s-c=\frac{a}{2}$。

因此
$$A=\sqrt{\frac{3}{2}a\cdot\left(\frac{a^3}{8}\right)}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2。$$

正六边形 这个多边形是由六个边长为 R(即外接圆的半径)的等边三角形所组成，因此有

$$A_6=\frac{6}{4}\cdot R^2\cdot\sqrt{3},\ A_6=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2。$$

正 n 边形 其面积是由 n 个腰为外接圆半径的等腰三角形所组成，而夹在两条腰之间的圆心角的大小是整个圆周角的 n 分之一; 即 $\varphi_n=\frac{360°}{n}$(见图 11.3-4)。

在每一个单独的等腰三角形中，高 h_n 将多边形的边 s_n 和圆心角 φ_n 等分，这样 $s_n=2R\sin\frac{\varphi_n}{2}$, $h_n=R\cos\frac{\varphi_n}{2}$; 因此

$$A_n=\frac{n}{2}s_nh_n=\frac{n}{2}R^2\cdot 2\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)$$
$$=\frac{n}{2}R^2\sin\varphi_n=\frac{n}{2}R^2\sin\left(\frac{360°}{n}\right)。$$

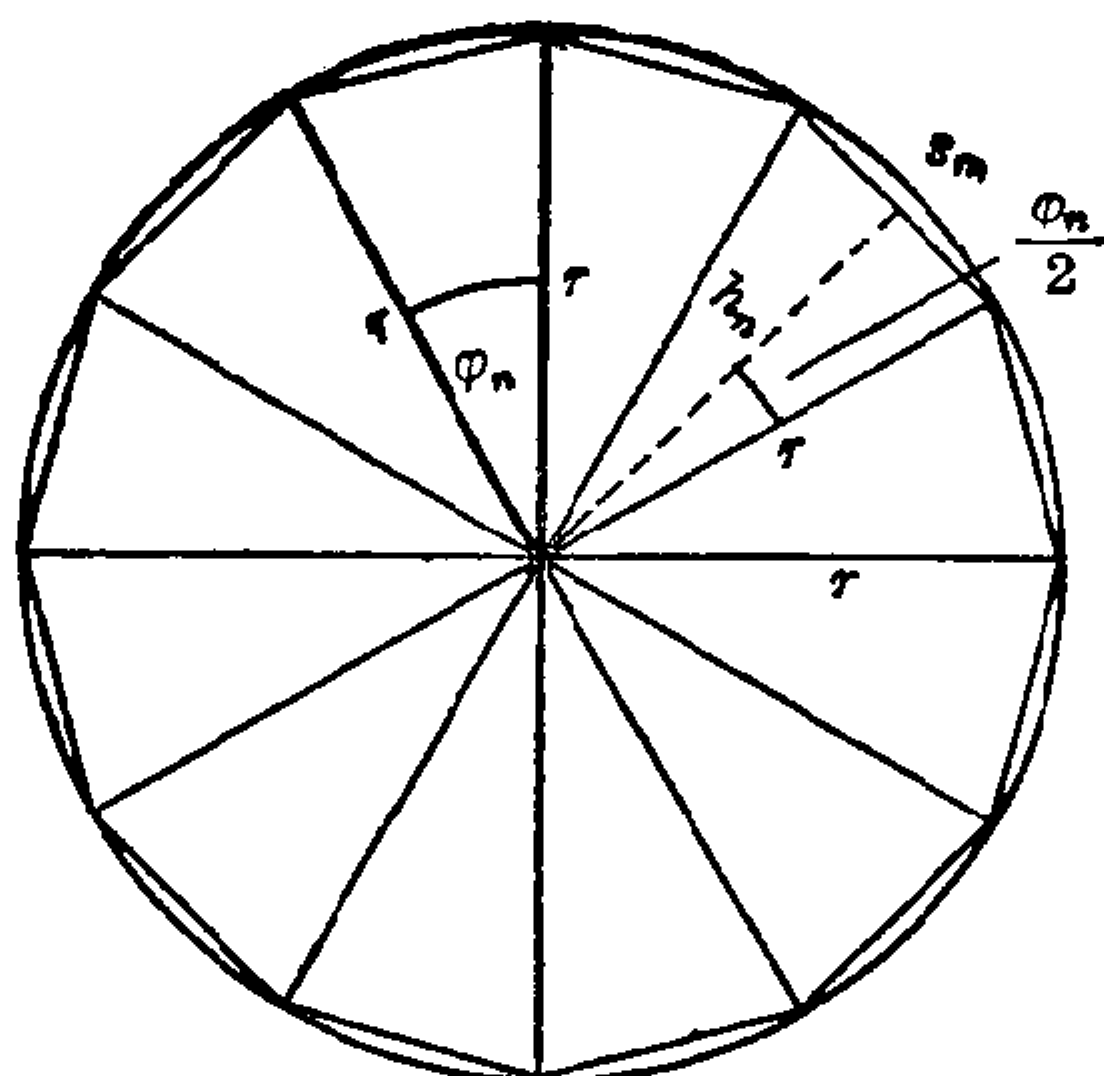


图 11.3-4 正 n 边形

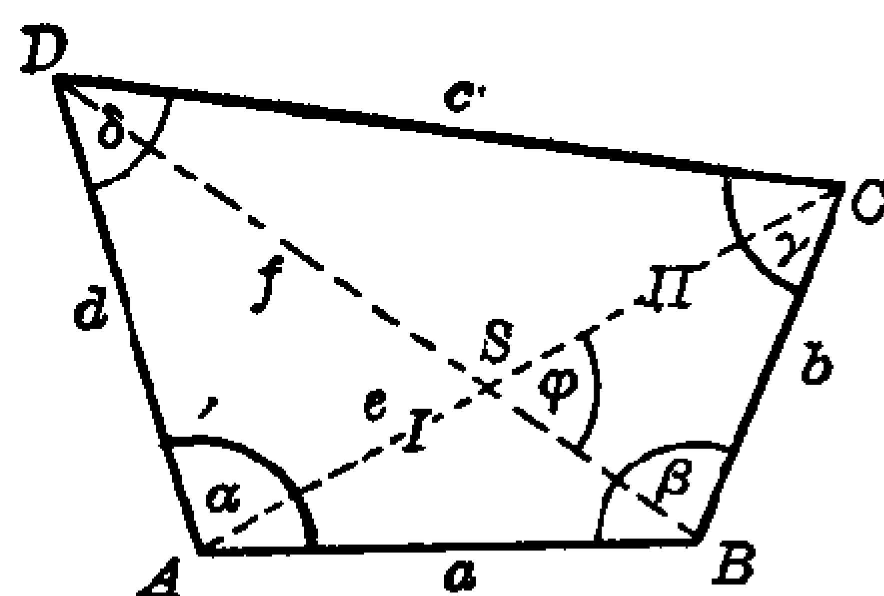


图 11.3-5 一般四边形的面积

正 n 边形	$A_n=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{360°}{n}$

一般四边形 对于一般四边形 $ABCD$，可以导出一个类似于赫伦公式的公式，因为四边形由5个数据所确定，我们可以取已知四条边和一对对角之和，例如 α 和 γ 之和(见图 11.3-5) 作为这五个数据。用 s 表示半周长，$s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$；用 2ε 表示角 α 和 γ 之和，则三角形 ABD 和 BCD 的面积 A_I 和 A_{II} 以及四边形的面积 A_q 由下式给出:

$$A_I=\frac{1}{2}ad\sin\alpha;\quad A_{II}=\frac{1}{2}bc\sin\gamma;$$

$$A_q=\frac{1}{2}(ad\sin\alpha+bc\sin\gamma)。$$

在这两个三角形中应用余弦定律，得到:

$$a^2+d^2-2ad\cos\alpha=f^2=b^2+c^2-2bc\cos\gamma$$

或者 $$a^2+d^2-b^2-c^2=2(ad\cos\alpha-bc\cos\gamma)。$$

于是 $$(4A_q)^2+(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=4(a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos 2\varepsilon),$$

最后 $$16A_q^2=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)\cdot(b+c-a+d)-16abcd\cos^2\varepsilon。$$

一般四边形的面积
$A_q=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\varepsilon}$

若φ是四边形对角线的交角(交点为s)，则四边形的面积A_q能表示成四个三角形ABS, BCS, CDS,和DAS的面积之和,因此

$$A_q=\frac{1}{2}[|AS|\cdot|BS|\sin(180°-\varphi)-|BS|\cdot|CS|\sin\varphi$$
$$+|CS|\cdot|DS|\sin(180°-\varphi)+|DS|\cdot|AS|\sin\varphi]$$
$$=\frac{1}{2}[|AS|(|BS|+|DS|)+|CS|(|BS|+|DS|)]\sin\varphi$$
$$=\frac{1}{2}[(|AS|+|CS|)(|BS|+|DS|)]\sin\varphi,$$
$$A_q=\frac{1}{2}ef\sin\varphi。$$

这样,**四边形的面积等于两对角线与其夹角正弦的乘积之半。**

圆内接四边形 在圆内接四边形中，对角之和是180°，即$\alpha+\gamma=\pi=180°$，$\varepsilon=90°$，$\cos\varepsilon=0$。

因此面积的一般公式简化为$A_{cq}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$。由于$abcd\cos^2\varepsilon$这一项永不为负，因而边长相同的其他四边形的面积小于圆内接四边形的面积。

在边长为a, b, c, d的所有四边形中，圆内接四边形有最大的面积。

物理学

所有能用向量来表示的物理量(例如力或者速度)，都需要用三角函数来进行计算。

【例1】 横梁B的一端以直角固定在墙上(见图11.3-6)，f磅的负载悬挂另一端。这根横梁或者用a)一根连杆T,或者用b)一根撑杆S来支承，并且它们与横梁的交角分别是α或β。试求出B中和T或S中的力(张力或推力)各为多少?

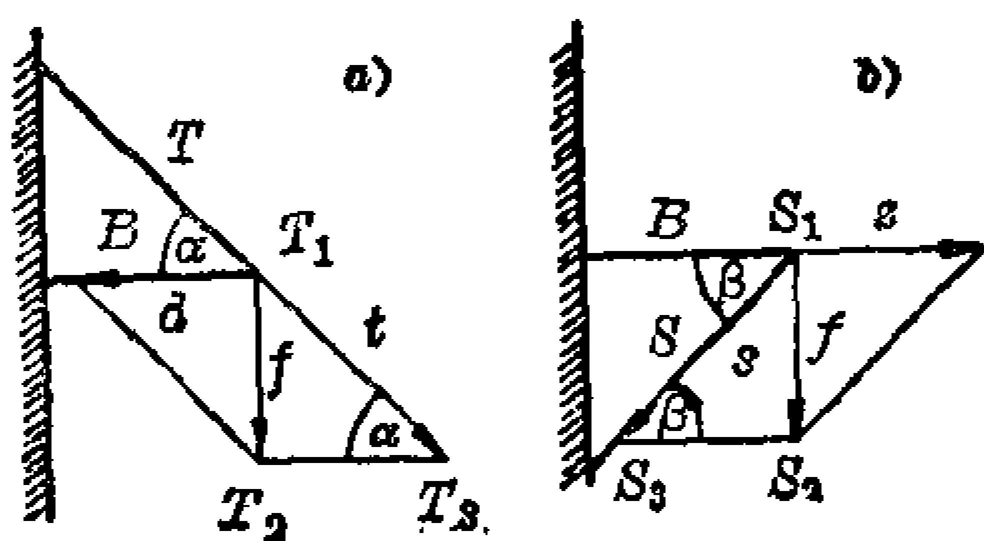


图11.3-6 横梁a)和连杆b)和撑杆

负载的重量f是两个力的合力,其中一个力沿着横梁B的方向;而另一个力，在a)中是沿着连杆T的方向，在b)中是沿着撑杆S的方向。因为f垂直于B,因此三角形$T_1T_2T_3$和$S_1S_2S_3$是直角三角形;a)在横梁B上有一个推力$d=f\cot\alpha$，而在连杆T上有一个张力$t=f/\sin\alpha$;

b) 在横梁 B 上有张力 $z=f\cot\beta$，而在撑杆 S 上有一推力 $s=f/\sin\beta$。

【例 2】 一架飞机的平均速度是 $v_1=360$ 英里/时，它沿着北 23.5° 东的方向，从 A 地飞向跟它相距 300 英里的 B 地。风速是 $v_2=45$ 英里/时，风向是北 18° 西，试求飞机沿着什么航向飞行以及到达 B 地所化费的时间。

如果没有风的话，飞机将花费 $\frac{300}{360}$ 小时 $=\frac{5}{6}$ 小时，即 50 分钟的时间到达 B 地。由于有侧向风，因此它必须沿北 α_3 东的方向飞行（见图 11.3-7）。根据速度平行四边形法则，在三角形 ACE 中，从给出的三个量，即边 v_1 和 v_2 以及角 $\measuredangle AEC=\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，可以求得角 $(\alpha_3-\alpha_1)$，由正弦定理

$$\sin(\alpha_3-\alpha_1)=\sin(\alpha_1+\alpha_2)v_2/v_1,$$

以及

$$v=v_1\frac{\sin(180°-\alpha_2-\alpha_3)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)},$$

因为 $\alpha_3-\alpha_1=4.75°$，所以 $\alpha_3=28.25°$，$v\approx 390.18$ 英里/时。

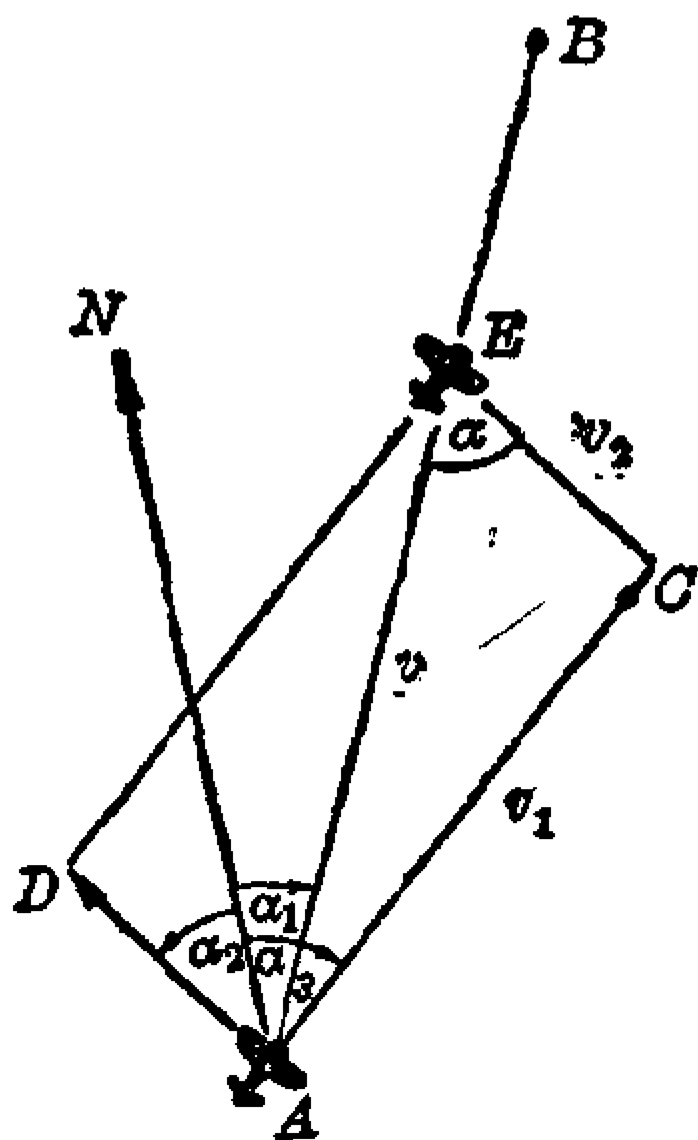


图 11.3-7 有侧向风时飞机的航线

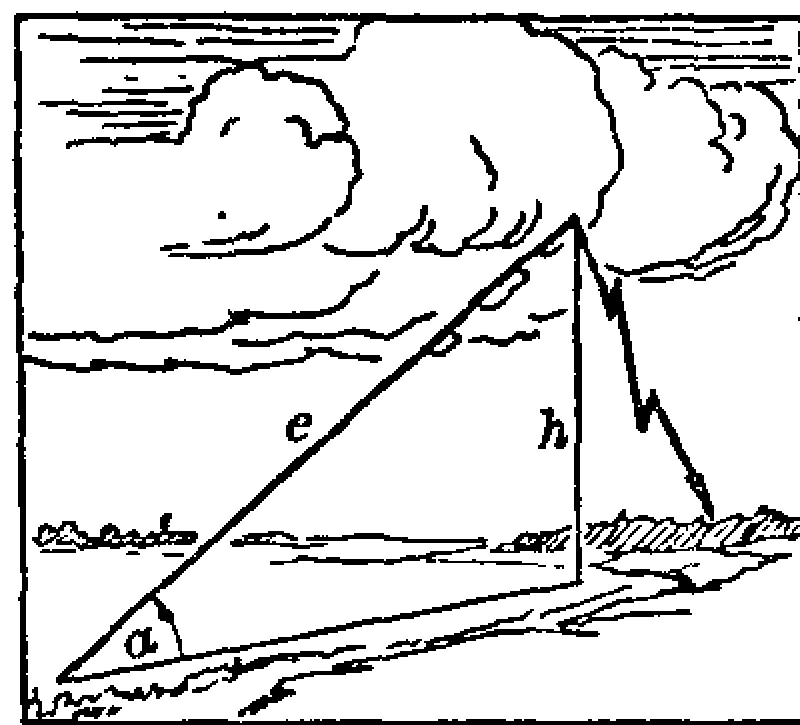


图 11.3-8 闪电的高度和距离

于是飞机沿着北 28.25° 东方向飞行，并以 $v=390.18$ 英里/时的速度在大约 46 分钟的时间内到达 B 点。

【例 3】 在跟水平面成 α 角的方向观察到一个闪电，t 秒钟以后在观察点听到雷声，因此闪电出现的距离是 $e=333t$ 米，高是 $h=333t\sin\alpha$ 米（见图 11.3-8）。这里 333 米/秒是音速，由于光速是 $c=3000000$ 千米/秒，因此相对于声音来说，光到达观察点所化费的时间可以忽略不计。

工程技术

在工程技术中的定律要用到物理学中的定律。因此跟物理学一样，角度以及三角函数和三角学定理都起着同样的作用。

曲轴　在曲轴中，大头 K 的位置是曲柄的旋转角 φ 的函数（见图11.3-9）。如果 r 是曲柄的半径，而 l 是连杆的长度，那末由余弦定理：

$$l^2=x^2+r^2-2xr\cos(180°-\varphi) \Longrightarrow x^2+2rx\cos\varphi=l^2-r^2。$$

这个二次方程的解给出：

$$\begin{aligned} x &= -r\cos\varphi+\sqrt{r^2\cos^2\varphi+l^2-r^2} \\ &= -r\cos\varphi+\sqrt{r^2(\cos^2\varphi-1)+l^2} \\ &= -r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}。\end{aligned}$$

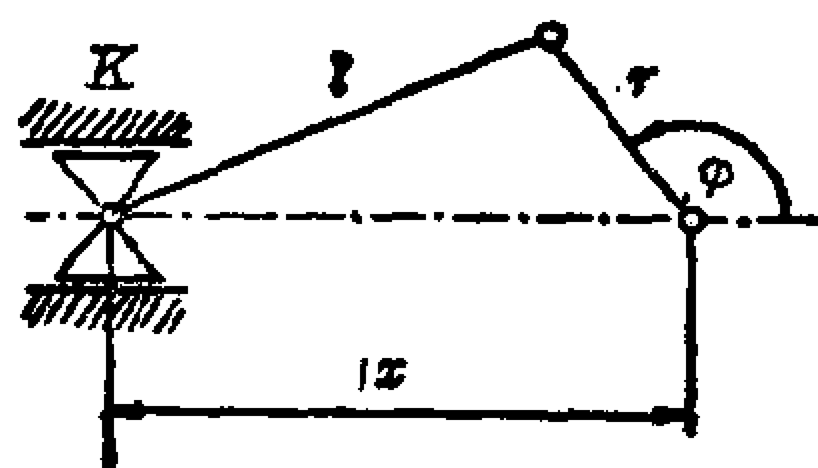


图 11.3-9　曲轴

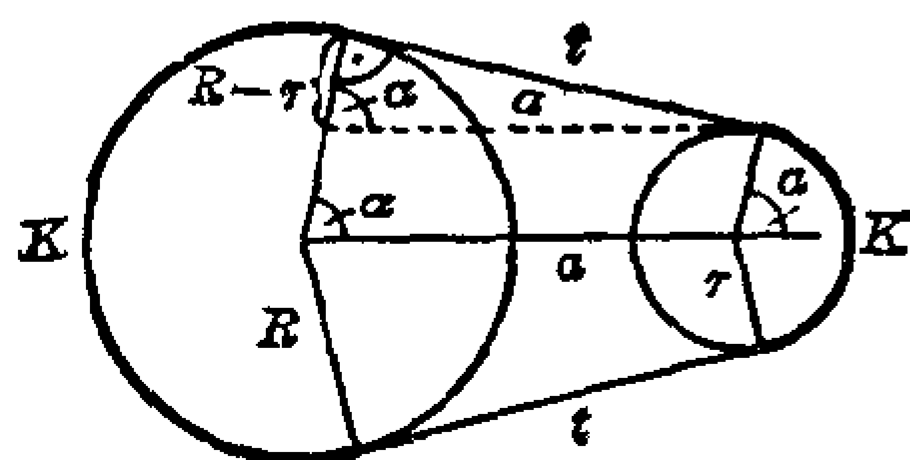


图 11.3-10　驱动皮带的长度

驱动皮带的长度　如果半径为 R 和 r 的两个皮带轮中心轴之间相距 a，驱动皮带张紧在这两个皮带轮上（见图 11.3-10），则我们就能求得皮带的长度 L：$t^2=a^2-(R-r)^2$，$\cos\alpha=\dfrac{R-r}{a}$ 或者以弧度计 $\alpha=\arccos\dfrac{R-r}{a}$，由此推出

$$L=2t+K+R=2\sqrt{a^2-(R-r)^2}+R(2\pi-2\alpha)+r\cdot 2\alpha,$$

$$L=2\{\sqrt{a^2-(R-r)^2}-\alpha(R-r)+R\pi\}。$$

对 $r=\dfrac{R}{2}$ 且 $a=2R$ 这种情形，得到 $L=8.838R$。

力的平行四边形　一只街灯挂在两根长度不等的绳子上，这两根绳子分别跟水平面倾斜成角 α 和角 β。如果绳子的下垂可以忽略，则使用正弦定理就可以计算在绳子上的张力 S_1 和 S_2（见图 11.3-11）。注意 $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$，我们得到

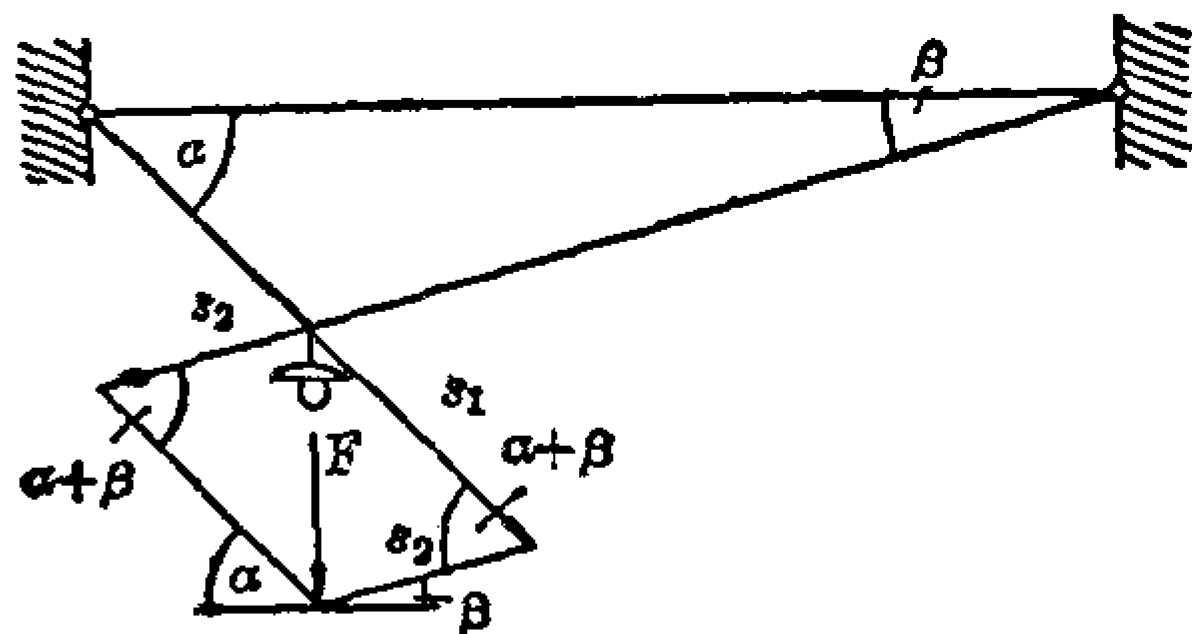


图 11.3-11 力的平行四边形

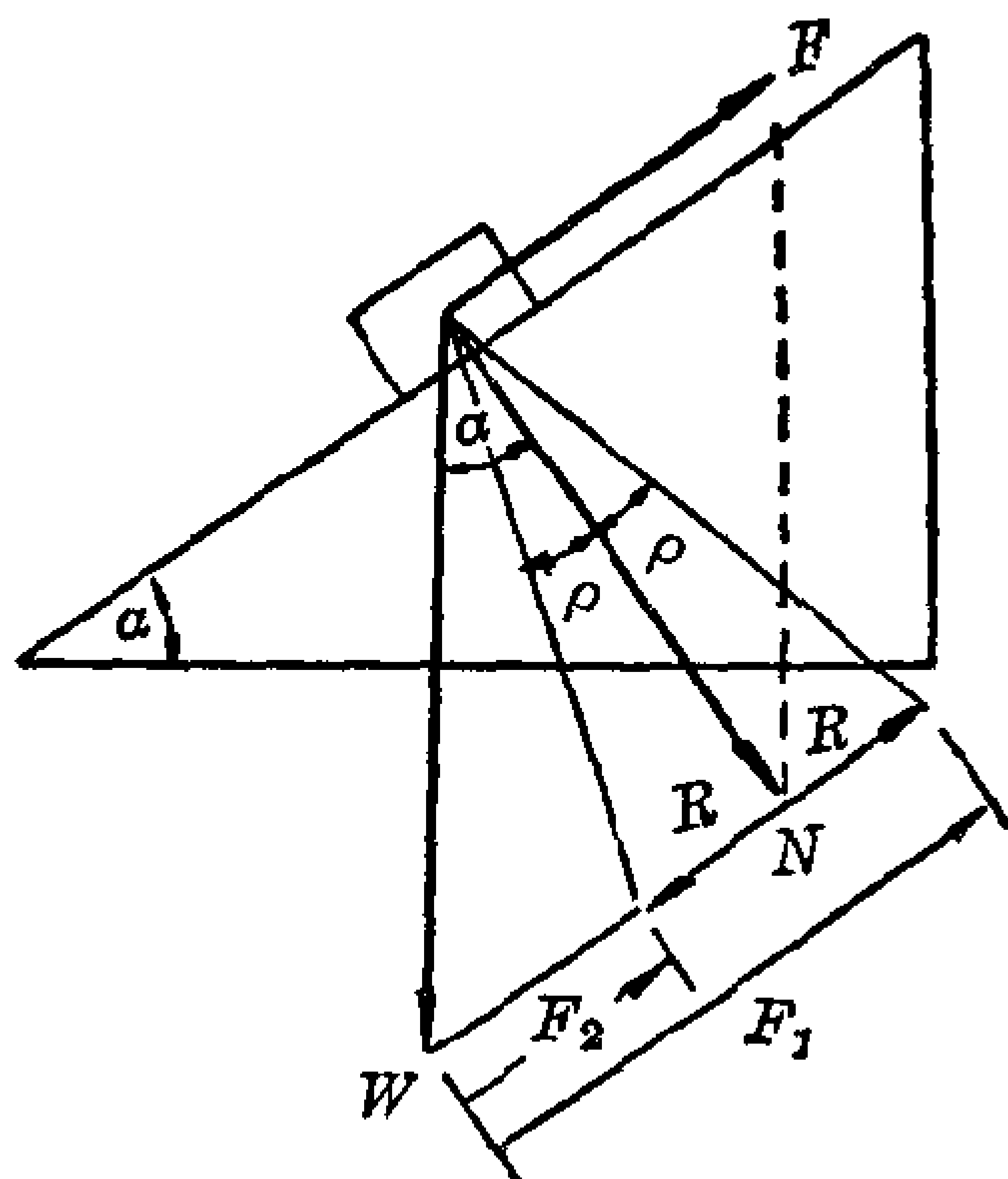


图 11.3-12 斜面运动和对应的力三角形

$$S_1=F\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\quad S_2=F\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}。$$

在斜面上的运动 一个重量为 W 的物体放在跟水平面倾斜成 α 角的平面上。需要求出能够使物体匀速向上运动的沿斜面方向的力 F_1, 和足以阻止物体下滑的沿斜面方向的力 F_2。

摩擦力 R 正比于在物体和斜面之间的正压力 N:$R=\mu N$, 这里 μ 叫作*摩擦系数*, 设 $\mu=\tan\rho$, 摩擦角 ρ 是使一给定物体正好沿斜面下滑时的斜面倾斜度。在力三角形中 (见图 11.3-12), 第一种情形需要将摩擦力 $R=N\tan\rho$ 加到力 F 中去, 而在第二种情形要将摩擦力 R 从力 F 中减去, 从而分别给出 $F_1=F+R$, $F_2=F-R$, 由正弦定理:

$$\frac{F_1}{W}=\frac{\sin(\alpha+\rho)}{\sin(90°-\rho)},\quad F_1=W\frac{\sin(\alpha+\rho)}{\cos\rho}$$

和

$$\frac{F_2}{W}=\frac{\sin(\alpha-\rho)}{\sin(90°+\rho)},\quad F_2=W\frac{\sin(\alpha-\rho)}{\cos\rho}。$$

作用于定滑轮上的力 为了计算定滑轮和转轴之间的摩擦力, 必须得到负载 Q 和所加的外力 F 之间的合力 F_r。若绕在定滑轮上的绳子对着圆心角 γ, 则力 F_r 由余弦定理给出(见图 11.3-13):

$$F_r=\sqrt{F^2+Q^2-2FQ\cos\gamma}。$$

对一个光滑的滑轮而言, 绳子的张力 F 和 Q 相等, 又因为 $2-2\cos\gamma$

$=2(1-\cos\gamma)=4\sin^2\frac{\gamma}{2}$，方程可简化成 $F_r=2Q\sin\frac{\gamma}{2}$。对 $\gamma=180°$，即 F 和 Q 互相平行，则 $F_r=2Q$。

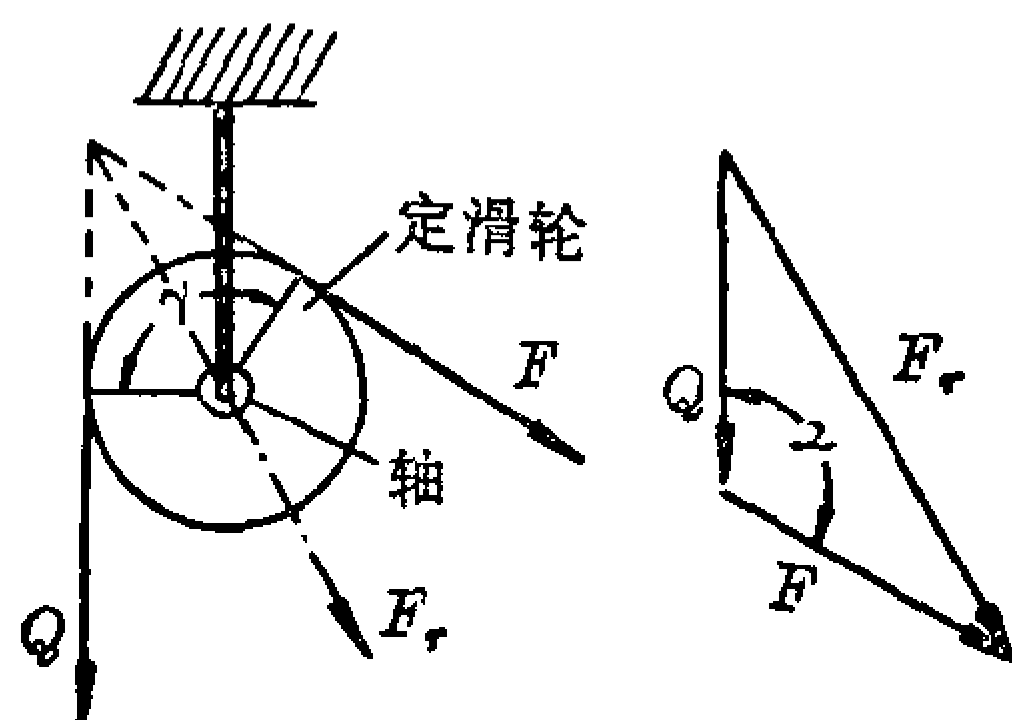


图 11.3-13　定滑轮上的力

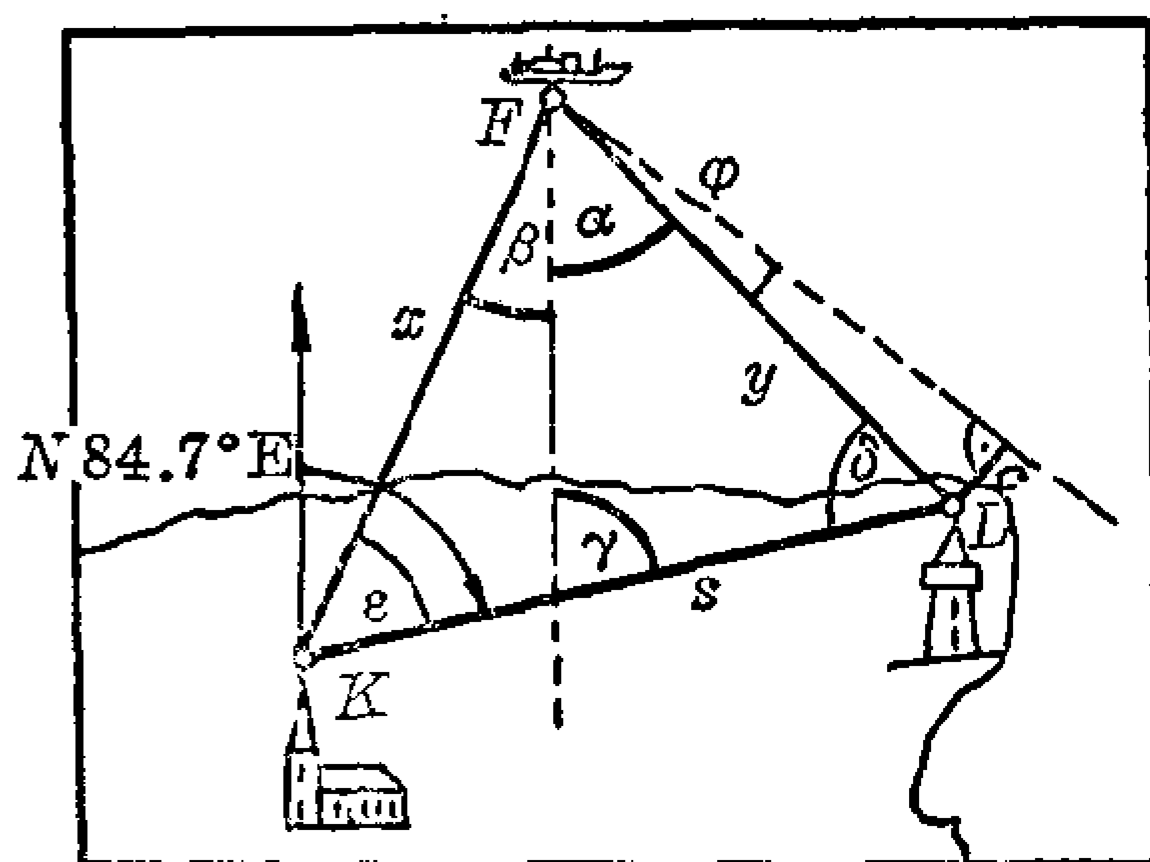


图 11.3-14　船的航向

航海学

为了确定一条船的位置以及它在海上的航道，必须把地球看成是一个球体，因此必须根据球面三角学的定理进行计算，用来定位的天文方法也是根据这些定理。但在较小的范围内，例如在海岸附近的旅行，可以把它看成是平面。标在海岸地图上的特定点的位置和相对距离都是取为已知的。

一条船的运动方向，即它的**航向**，是由它的龙骨和一个固定参考方向之间的夹角所确定的。而**真正航向**是把地理北方取作为固定参考方向，向东面开始计算角度，直到 360° 为止；**磁航向**以同样的含义进行计量，只是把磁北方作为固定参考方向而已。这两者之间的差别是地理子午线和磁子午线之间有一个叫作**磁偏角**的角度。在一个具有自身磁场的铁船上，罗盘子午线跟磁子午线之间还偏离一个叫作**罗盘偏差**的角度，它跟船的位置及其航向有关。这样确定的罗盘航向总是可以直接测量得到的。这个航向由罗盘上两点之间的角度给出，例如，$N\,35°\,E$ 读成**北 35 度东**。

【例】　从船 F 上同时看到灯塔 L 在南 55.3° 东的方向，而教堂塔 K 在南 28.5° 西的方向。根据海岸地图，给出距离 $|KL|=s=33.25$ 公里 ≈ 17.95 海里，并且给出 KL 的方向是北 84.7° 东（1 海里 $=1.852$ 公里）。

a）求距离 $|FK|=x$ 和 $|FL|=y$（见图 11.3-14）；

b) 如果船以跟灯塔有 $C=4$ 海里 ≈ 7.408 公里的距离通过灯塔附近，则船必须保持什么航向才行？(危险半径的计算)

从给出的值 $\alpha=55.3°$, $\beta=28.5°$, $\gamma=84.7°$, $s=33.25$ 公里，得到 $\delta=180°-(\alpha+\gamma)=40°$, $\varepsilon=\gamma-\beta=56.2°$, $x=s\dfrac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}=21.49$ 公里 ≈ 11.6 海里，$y=s\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta)}=27.77$ 公里 ≈ 15 海里，$\sin\varphi=\dfrac{c}{y}$，$\varphi=15.47°$。船的航向：南 $(\alpha+\varphi)°$ 东，即南 $70.77°$ 东。

用三角法确定高度

在实践中，在一水平面上的角要比在垂直平面上的角测量得更为精确，其原因是光线通过密度不同的空气时要产生折射(不是沿直线传播)。除了这个*地球折射*以外，在距离超过 200 米时还必须考虑地球的曲率。

经纬仪的原理结构图 经纬仪是在测量术中用来测量角度的仪器。为特殊应用而制造的许多仪器，都是根据简单原理设计的。经纬仪中有一个垂直的中空支轴 hS，跟三个*水准螺丝* Sc 连在一起，放在一块*基极*上，此基极常常跟一个三脚架固定在一起(见图 11.3-15)。在支轴 hS 上装有一个水平圆盘 D，在圆盘上有一个按逆时针方向刻着标尺的圆环，叫做*分度弧* L。*旋标装置* A 是一个可在支轴上自由旋转的圆盘，在它的上面有两个直径相对 (对径) 的指示器，还装有一个*酒精水准仪* sL 和用以支撑望远镜轴 aT 的两个*支承架* Sp。望远镜 T 和用以测量高度角的垂直圆 V 是跟这个轴 aT 刚性

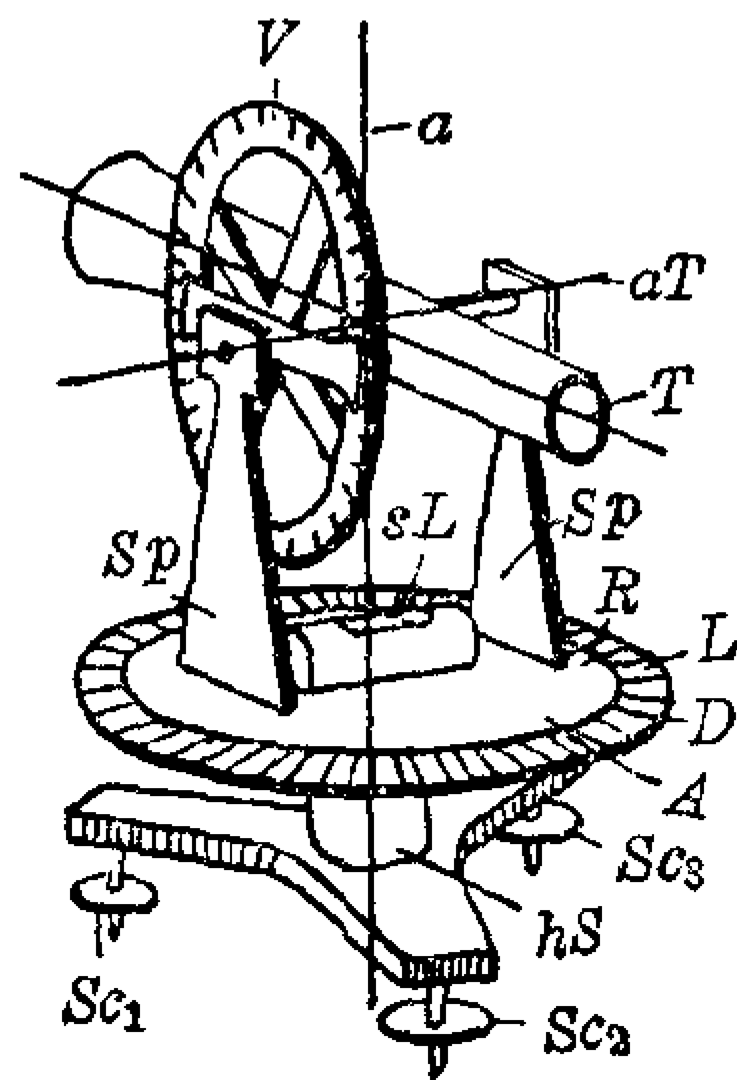


图 11.3-15 经纬仪 (原理图)

连结的。旋标装置 A 靠水准螺丝 Sc 和酒精水准仪调成水平位置。在一个好的经纬仪中，旋标装置 A 所绕着旋转的轴 a 必须是*垂直的*。轴 aT 是*水平的*，而望远镜 T 跟 aT *成直角*。通过初始测量我们有方法来消除上述条件下产生的很小偏差 (称为*校正*)，或者来确定这些偏差的大小以便把它们在测量本身中考虑进去。经纬仪的质量主要取决于在水平圆和垂直圆上两个标尺的精度，以及*读数装置* R 的精度。R 可以是一个指示器、游标器或是显微镜，相应角度的读数精度，例如“分”级或“秒”级。为了增

加角度测量的精度，采用确定的步骤进行操作，并重复读出数据。望远镜是用来正确地指向所要观察的目标的，只要目标的象或它的特征部分跟仪器的**十字标线**（在最简单的情形下，是一条水平线和一条垂直线）相重合。从经纬仪的结构就可以知道，即使当瞄准的目标不在同一高度时，也能够测出它们相互之间的水平夹角。水平标尺的参考位置是无关紧要的，因为总是能从两个读数之差来得到水平角度。另一方面，为了测量垂直角，就必须用酒精水准仪把零参考方向调到水平位置。

快速测量水平距离　视距测距术的含义就是快速测量。通常已知点 P 的位置和高度就能从经纬仪的读数来确定整个一系列新点的位置和高度了，例如可以用来研究建筑工程地基的地貌。为此目的，在望远镜中有两条水平标线，它们都平行于望远镜中的水平十字标线 m，上面的一条 u 和下面的一条 l 都分别跟 m 相距 $P/2$。一根杆（叫做水准标尺）垂直地竖在要测量的新点 N，而三根水平标线的象标出杆上的三点 L_m, L_l, L_u（见图 11.3-16），上面读数和下面读数之差 L_l-L_u 是在杆上的一段长度 s。由于映象倒置的缘故，在水准标尺上较大的数位于顶端。在仪器看到的一段杆长 s 具有视差角 ε，它是由两条水平标线之间的距离 p、物镜的焦距长 f 和望远镜里的光路所决定。对水平观察而言，从经纬仪到水准标尺的水平距离 a 能从式子 $a=Cs$ 求得，式中仪器常数 C 通常取整数值 100。于是对视差角 ε 有 $\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\frac{s}{2a}=\frac{1}{2C}$。若从望远镜 F 到中

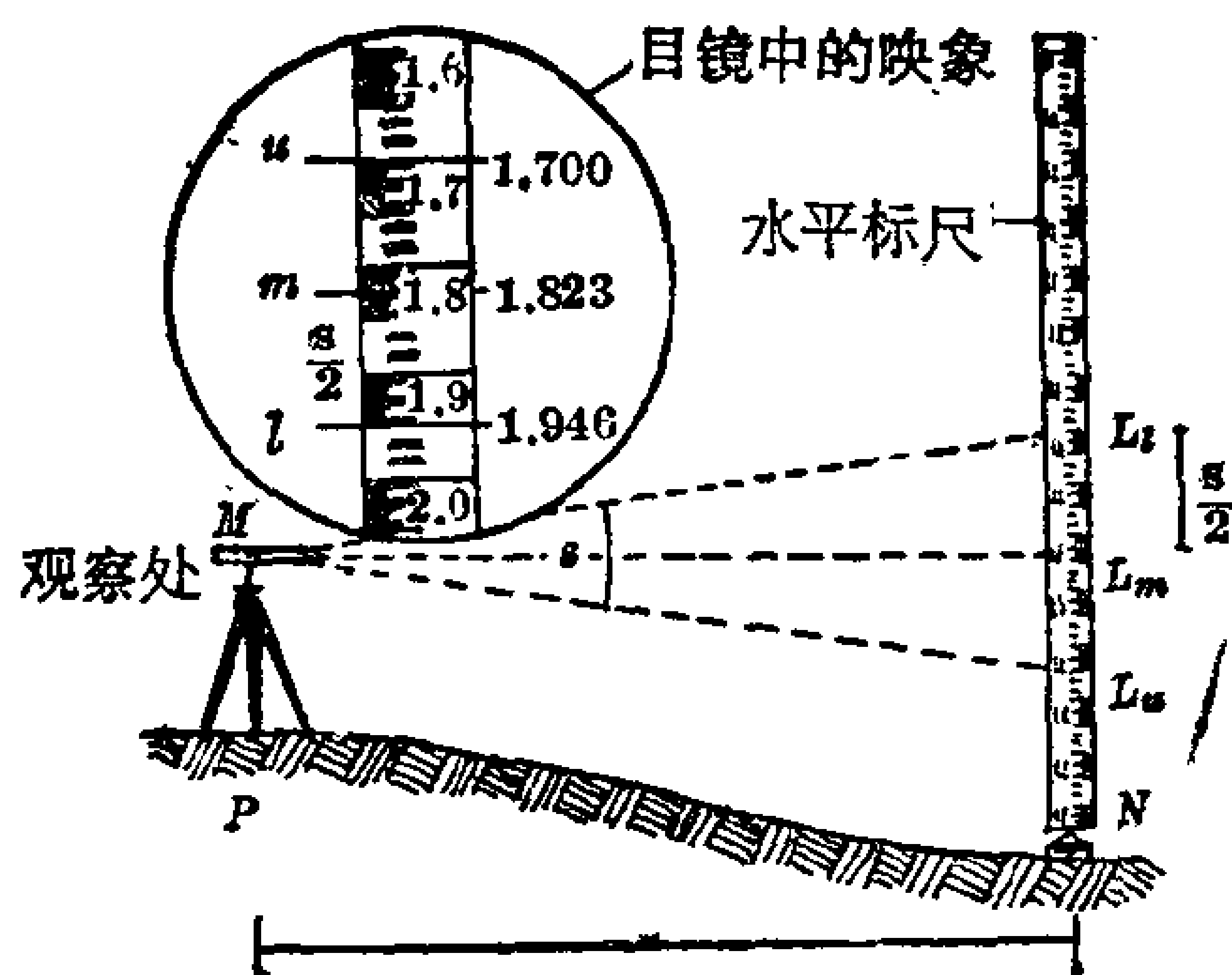


图 11.3-16　水平观察时的快速测量水平距离

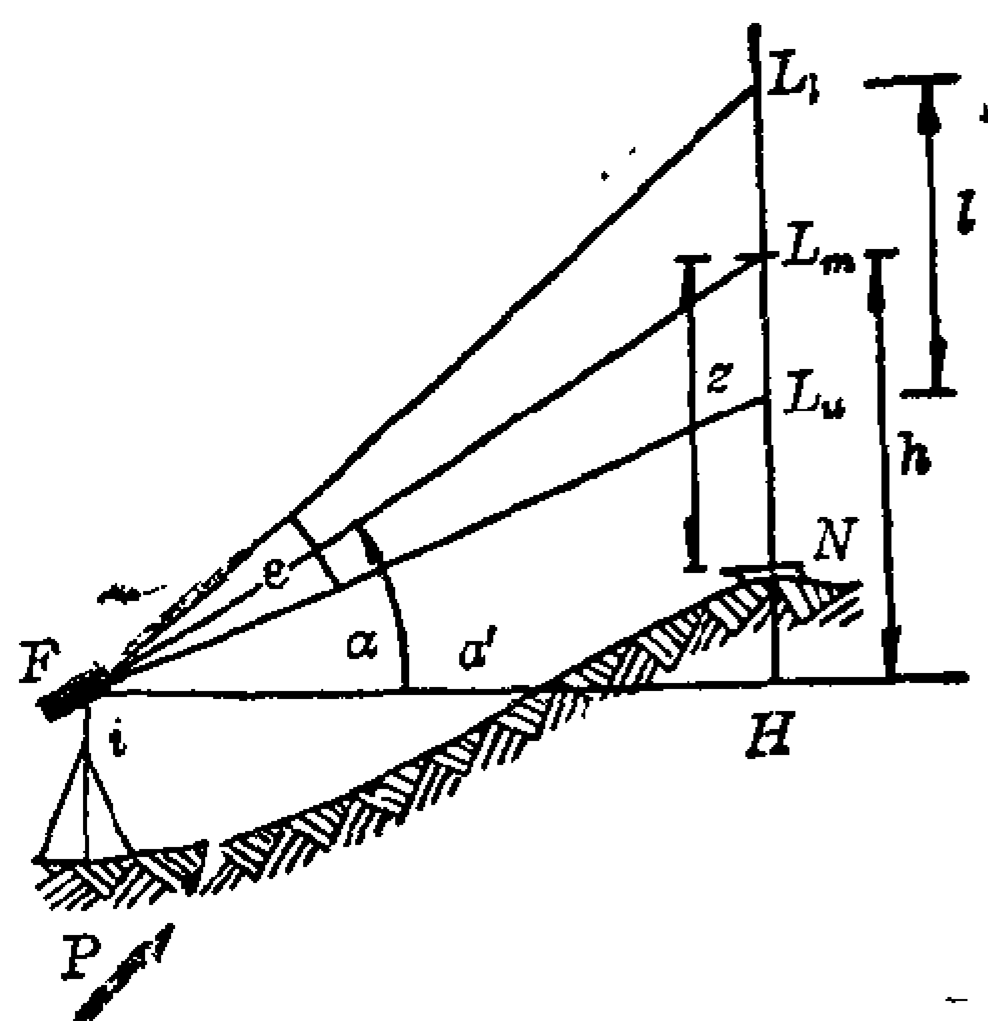


图 11.3-17　倾斜视线的快速测量水平距离

间一条读数线 L_m 的视线跟水平面倾斜成角 α（见图 11.3-17），则水平距离 a 可以用下面的三角计算来确定:

$$s=|HL_l|-|HL_u|=a'\left[\tan\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\tan\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

$$=a'\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$$=a'\frac{\sin\varepsilon}{\cos^2\alpha\cos^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-\sin^2\alpha\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

$$a'=s\frac{\cos^2\alpha\cos^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-\sin^2\alpha\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$$=\frac{s}{2}\frac{\cos^2\alpha}{\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}-\frac{l}{2}\sin^2\alpha\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

或者

$$a'=sC\cos^2\alpha-\frac{s}{4C}\sin^2\alpha_{\circ}$$

水平距离	$a'=Cs\cos^2\alpha$
高 度 差	$h=\frac{1}{2}Cs\sin 2\alpha$

最后，因为 s 和 $\sin^2\alpha$ 的值很小，并且 $C=100$，因此第 2 项可以忽略不计，这样就给出水平距离 $a'=Cs\cos^2\alpha$，并从这个近似值，由 $h=a'\tan\alpha=\frac{1}{2}Cs\sin 2\alpha$ 立即给出了高 $h=|HL_m|$。在点 P 和 N 之间的高度差 Δh，不仅跟 h 有关，而且跟经纬仪的高度 i 和在点 N 的水准标尺的长度 $|NL_m|=z$ 有关:

$$\Delta h=i+h-z_{\circ}$$

用垂直角来计算高度 在下列例子中忽略地球折射这个因素，或者是因为观察的距离不超过 200 米，或者是因为在结果中可以接受较低的精度（分米级或者甚至码级）。

水平基线和垂直角。如果向着 G 点的方向，在地面上可以测出水平基线 $|AB|=s$ 的长度，并且也测到了以 A 和 B 为端点、对着 G 点的垂直(方位)角 α 和 β (见图 11.3-18)，那末由正弦定律就可计算 G 点的高度 h:

1. $\gamma=\beta-\alpha$;
2. $u=s\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$; 和
3. $h=u\sin\beta$, 因此

$$h=s\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}。$$

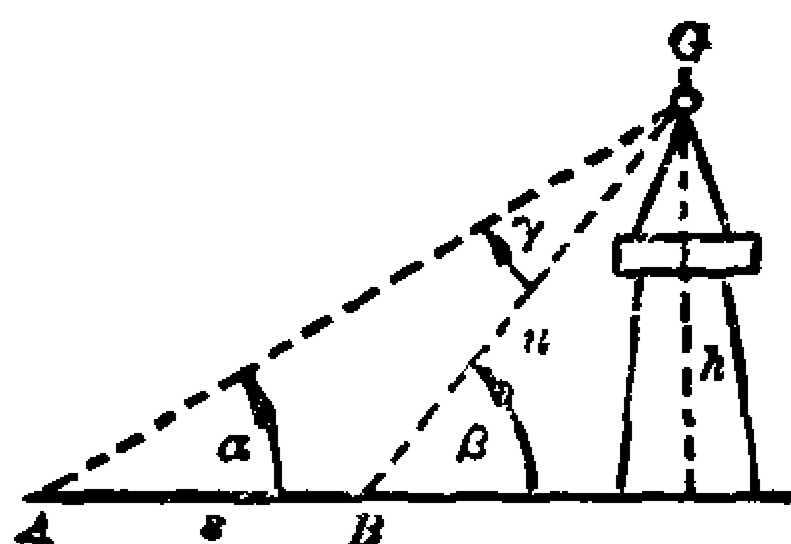


图 11.3-18 用三角法确定高度在过顶点的垂直平面中有水平基线

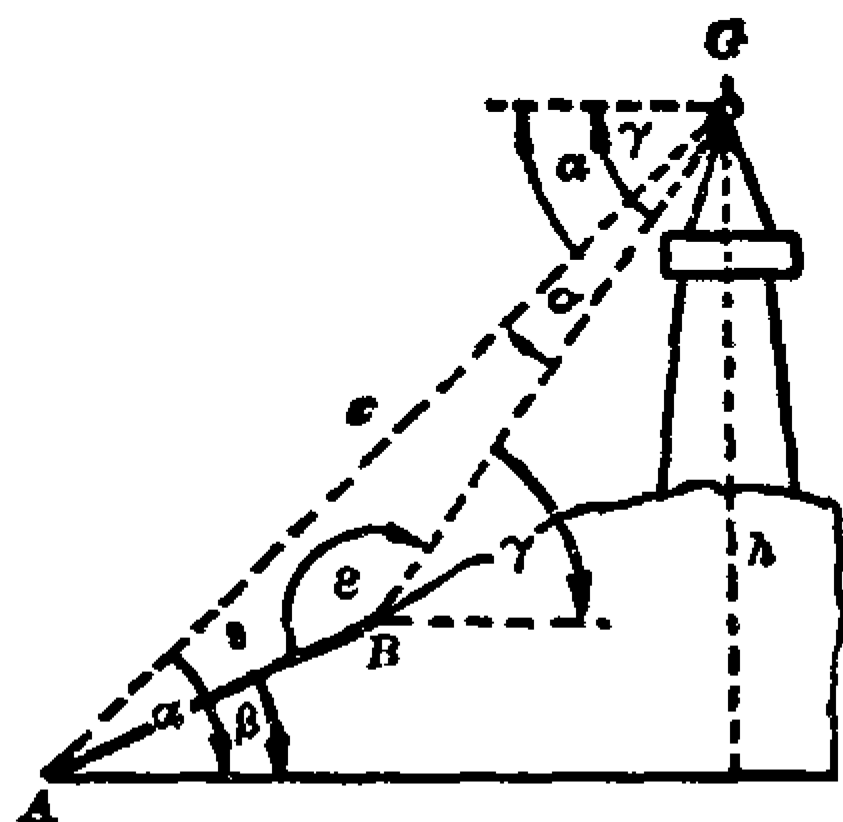


图 11.3-19 用三角法确定高度，在过顶点的垂直平面中有倾斜基线

倾斜基线。基线 $|AB|=s$ 的倾角 β 在过 G 点的垂直平面中，而 α 和 γ 是从 A 和 B 到 G 点的竖向角(见图 11.3-19)。由正弦定理可以计算出 A 和 G 之间的高度差。如设 $|AG|=x$, 则 $h=x\sin\alpha$, 其中 $x=s\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin\sigma}$, $\varepsilon=\beta+(180°-\gamma)$ 和 $\sigma=\gamma-\alpha$, 用代入法得到:

$$h=s\frac{\sin\varepsilon\sin\alpha}{\sin\sigma}\quad 或\quad h=s\frac{\sin(\gamma-\beta)\sin\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)}。$$

基线跟视线成任意方向。过 G 点的垂直平面跟过水平基线 $|AB|=s$ 的水平面相交于 F 点，从端点 A 和 B 测得角 $\measuredangle FAB=\gamma$ 和角 $\measuredangle FBA=\delta$, 还测得 A 点到 G 点的仰角 ε (见图 11.3-20)。平面 AFG 跟水平面 FAB 相互垂直。若设 $|AF|=z$, 则 $h=z\tan\varepsilon$, 这里

$$z=s\frac{\sin\delta}{\sin\sigma}=s\frac{\sin\delta}{\sin[180°-(\gamma+\delta)]}=s\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}。$$

用代入法得到:

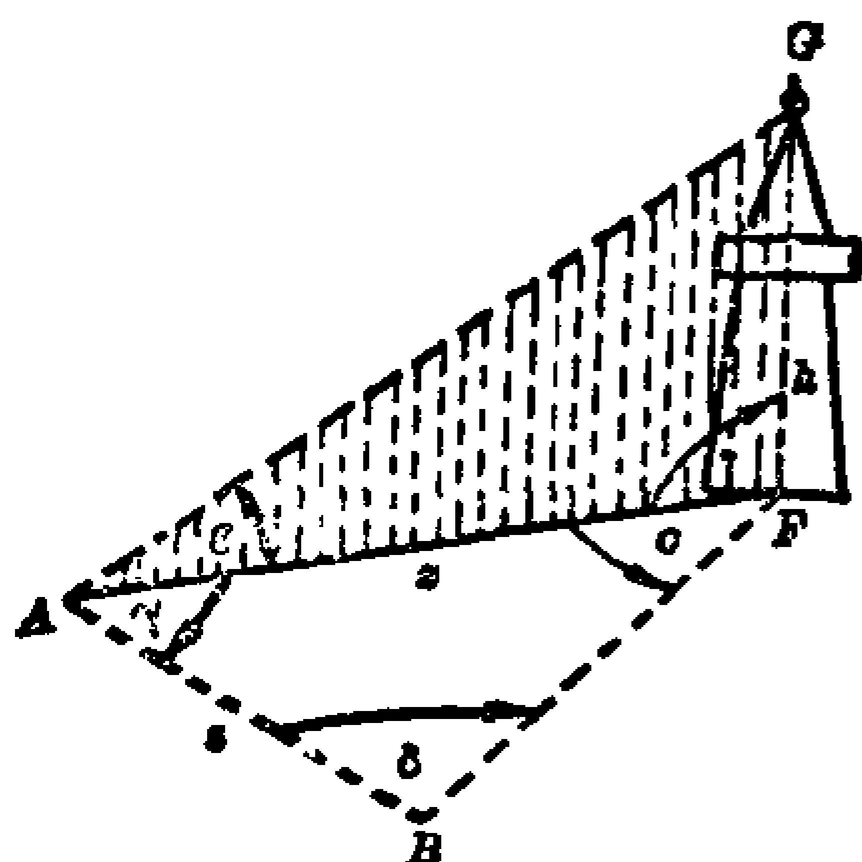


图 11.3-20 用三角法确定高度，有水平基线(但不在过顶点的垂直平面中)

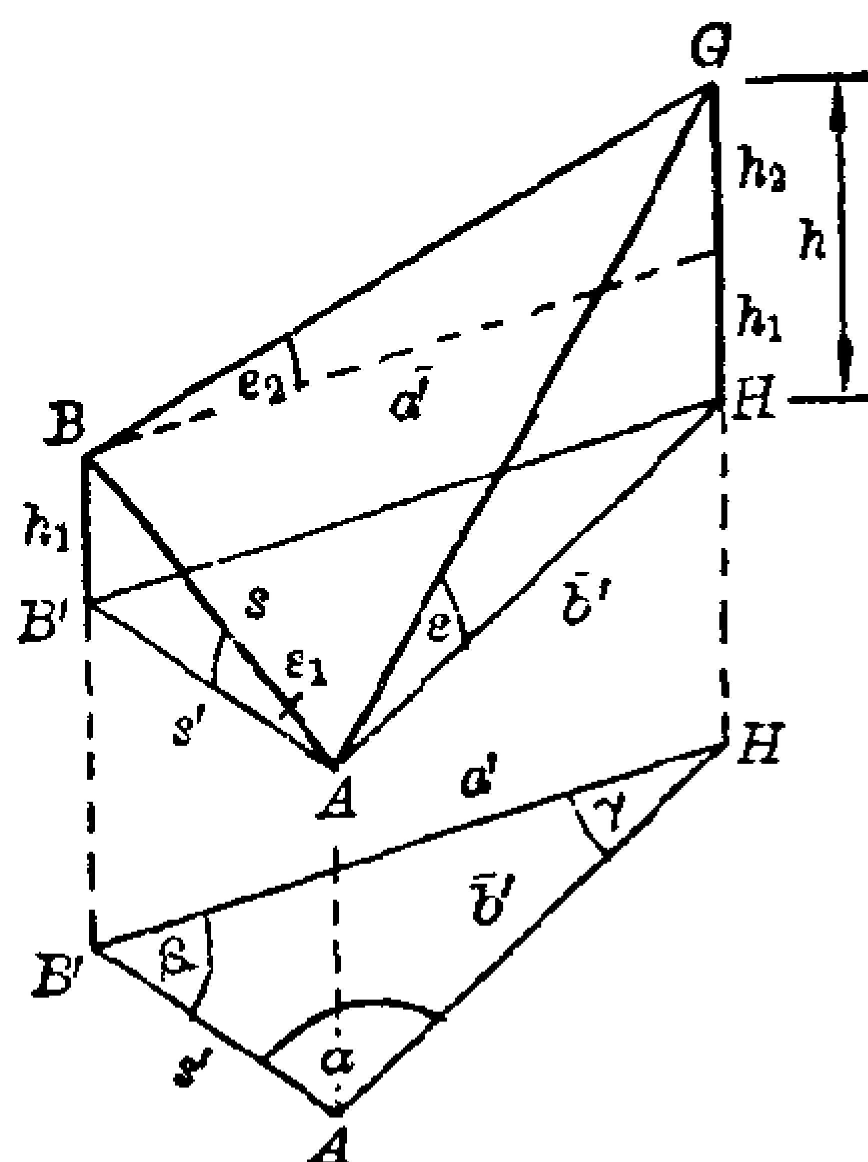


图 11.3-21 用三角法决定高度，有倾斜基线(但不在过顶点的垂直平面中)

$$h=s\frac{\sin\delta\tan\varepsilon}{\sin(\gamma+\delta)}。$$

如果基线 $|AB|=s$ 跟水平面倾斜成角 ε_1，并且 B 点在 A 点上面(见图 11.3-21)；如果从 A 点和 B 点测得 G 点跟基线之间的水平角分别是 α 和 β，并且从 A 点和 B 点测得 G 点的竖向角分别是 ε_1 和 ε_2，则问题就能归结成已经解过的类型之一。三角形 AHB' 在过 A 的水平面中，其中边 $s'=s\cos\varepsilon_1$，而角 α 和 β 是已知的。由正弦定理推出 $a'=s'\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$；$b'=s'\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$。从位于垂直平面的三角形 AHG 能得到高：$h=b'\tan\varepsilon=s'\dfrac{\sin\beta\tan\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta)}=s\dfrac{\cos\varepsilon_1\sin\beta\tan\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta)}$。作为验算，我们有 $h=h_1+h_2$，其中 $h_1=s\sin\varepsilon_1$ 和 $h_2=a\tan\varepsilon_2=s'\dfrac{\sin\alpha\tan\varepsilon_2}{\sin(\alpha+\beta)}=s\dfrac{\cos\varepsilon_1\sin\alpha\tan\varepsilon_2}{\sin(\alpha+\beta)}$。

测量学

测量学的最终目的在于把地球表面上任何所需确定的一点固定下来，用坐标或者地图图形可以达到这一目的。作为第一级近似，把地球的表面看成是一个球面，而用经度 λ 和纬度 φ 来确定球面上每一点的位置，也就是说，用过南北极的大圆(子午线)和纬度圆的交点来确定点的位

置。过格林威治(Greenwich)天文台的子午线取为零子午线，而其他所有的子午线，用跟零子午线的角距离 λ 来表示，这里 λ 是在向东的 $0°$ 到 $180°$ 或在向西的 $0°$ 和 $180°$ 之间，纬度圆是平行于赤道的小圆。它们离开赤道的距离 φ 是在子午线上按角的度数进行测量的，其数值范围是从赤道处的 $0°$ 到南北极处的 $90°$，分别给出北纬和南纬的数值。这些坐标是球面坐标，用天文测量法来确定，将在 I. 第12章中加以说明。

高斯-克吕格(Krüger)投影或者横向麦卡托(Mercator)投影　圆柱面或圆锥面可以沿着一条母线切开并摊开成平面，或者叫作*展开成平面*。在这个过程中，所有的长度、面积和角度都保持不变；因此它们仍以原来的真正大小出现在地图中。但球面是不可展开的。因此，根据高斯和从前的波茨坦大地测量研究院院长克吕格(1857～1923年)的意见，把球面二角形(**子午线带**)映照到一个圆柱面上去，其中球面二角形的边界子午线在南极和北极处的夹角是 $6°$，而这个圆柱面沿着球面二角形的中间子午线(即它跟这两条边界子午线构成 $3°$ 的角)跟球面相切。图11.3-22近似地说明了这些覆盖整个地球的带子是多么狭窄。因此可以理解这些带上的长度和面积跟它们真正的值只有极小的偏差。再把圆柱面展开就得到了子午线带的平面地图。相切的子午线 m 既属于球面，也属于圆柱面，因此出现在平面上的长度就是其真实长度。在这条子午线上的一点，它离开赤道的距离如果是用弧度计量的角 ξ 给出，那末它在平面上对应的坐标是 $x=\xi R$，其中 R 是地球半径。跟相切子午线 m 相交成直角的大圆有两个极点 A_1, A_2，它们就是圆柱的轴跟球面的交点。这个大圆投影到地图上跟 x 轴成直角，也就是跟圆柱的母线成直角(见图11.3-23)。球

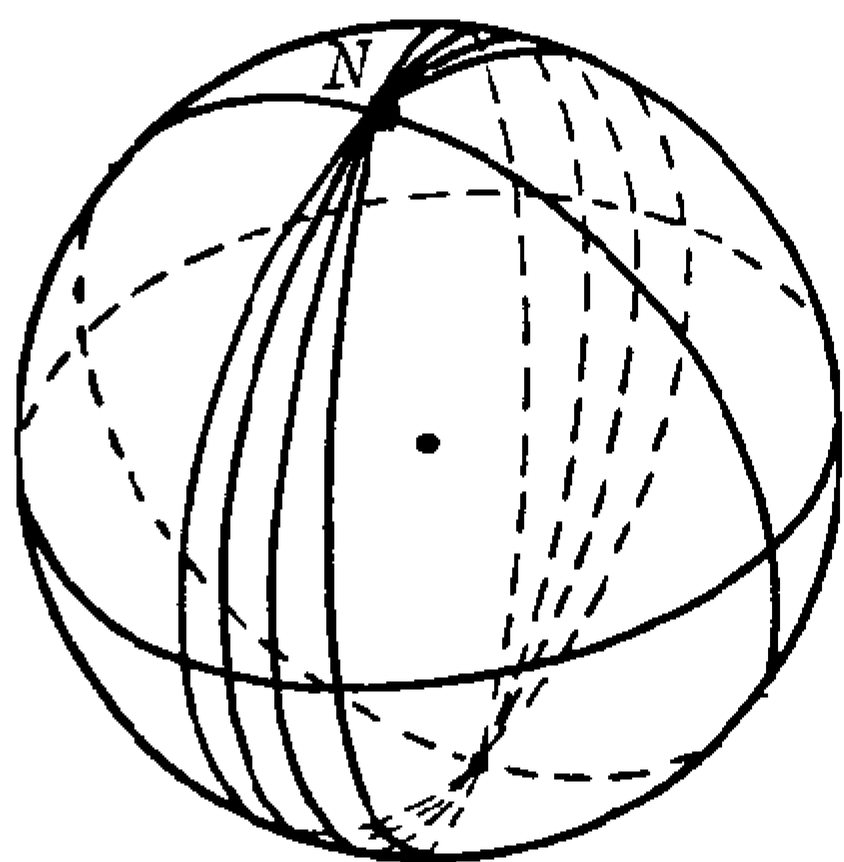


图11.3-22　三个连续的子午线带

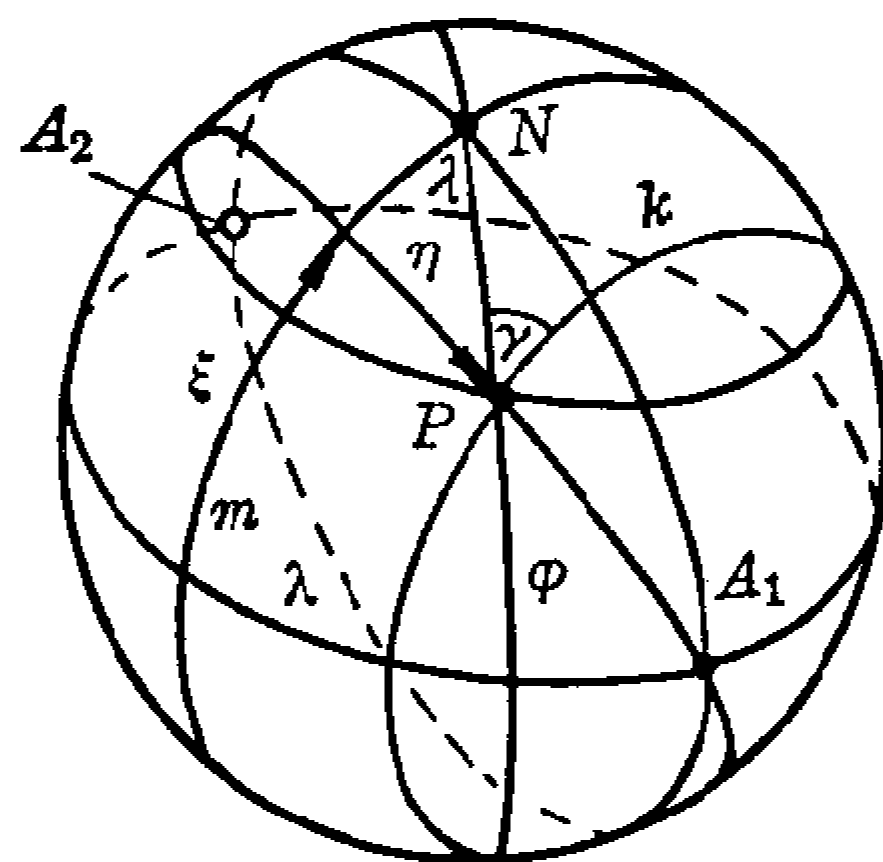


图11.3-23　高斯-克吕格坐标

面上一点 P 离开相切子午线 m 的距离用在这些正交大圆上的角度 η 来度量；其映象点 P' 离开 x 轴就有相应的距离 y。从高斯-克吕格投影是保角的(或者说是共形的，参看 **II.** 第10章)这一要求可以得到 η 和 y 之间的关系。如果把在球面上的三角形映照成相似的三角形，并且线段的放大率在所有方向上都相同，则就保证了映照的共形性。过点 P 的小圆 k，跟所有过极点 A_1，A_2 的大圆相交成直角，则把这个小圆 k 称为关于极点 A_1, A_2 的纬度圆，并且具有纬度 η。跟 m 正交的大圆起着子午线的作用，而相切子午线 m 起着赤道的作用，因此小圆的长度是 $l=2\pi R\cos\eta$。另一方面，在圆柱面和平面上，$L=2\pi R$，因此放大率是 $\frac{L}{l}=\frac{1}{\cos\eta}$。由共形性质，放大率等于 $\frac{dy}{d\eta}$。结果就有 $\frac{dy}{d\eta}=\frac{1}{\cos\eta}$，或者 $dy=\frac{d\eta}{\cos\eta}$，由积分就得到：

$$y=\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\eta}{2}\right)=\frac{1}{M}\lg\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\eta}{2}\right),$$

其中 $$\frac{1}{M}=\frac{1}{\lg e}=2.3025851\ (\text{参看 I. 第2章})。$$

北方 图 11.3-23 中画出了在点 P 的一个角 γ，这是过北极 N 的子午线跟平行于相切子午线 m 的小圆 k 之间的夹角，这个角度叫作**子午线的收敛角**，它给出了在点 P 坐标方格北方和地理北方之间的偏差。**地理北方**(或者叫做真正北方)是点 P 沿着子午线而指向北极的方向。坐标方格北方是在高斯-克吕格平面上映象点 P' 平行于 x 轴的方向。在球面上，这对应于在 P 点跟小圆 k 相切的切线方向。因此，相应地可以用不同的方法来确定一条线的方向。一条线在其上一点 P 处的**方位角** α 就是真正北方和这条线之间的夹角，从子午线开始按顺时针方向来计量这个角的度数。而以同样的方式计量坐标方格北方和这条线之间的夹角叫作**方向角** ν，并常常用这条线上的两点 P_1 和 P_2 把方向角 ν 表示成 $\nu=(P_1P_2)$，其中 $(P_1P_2)=(P_2P_1)\pm180°$。为了叙述的完整起见，还应该提到有时会使用的第三个北方，即**磁北方**；它跟真正北方的差别是由磁针的偏差所形成的。在谈到一条线的**磁偏角**时，就是关于磁北方而言。

纬度和横距 在高斯-克吕格坐标系中，x 值是沿着相切子午线 m 朝北(或朝南)进行计算的；x 值叫作**纬度**，它给出了它**跟赤道的真正距离**。y 值叫作**横距**，正的 y 值表示点位于相切子午线 m 的东面。为了避免负

的 y 坐标，相切子午线或者中间子午线给出的 y 坐标不是0米，而是500000米；同时，在球面上的这些子午线带用来形成前面提到的地图，它们由在这个数值前面的特征数来确定。相切于3°子午线的特征值是1(1500000米)，对9°子午线是2(2500000米)，对15°子午线是3(3500000米)如此等等：$\frac{\lambda_m+3}{6}$ 位于3°子午线东面65370米的一个点，其 y 坐标是1500000米+65370米=1565370米，这个数字叫作真实值。对位于9°子午线西面74250米的一个点，其真实值是2500000米−74250米=2425750米。反过来，我们要到其真实值是4374981米和纬度5755899米的一点去，则我们只要沿着21°子午线(因为4·6−3=21)从赤道开始向北走5755899米，然后再沿跟上述方向垂直的方向，向西走500000米−374981米=125019米即可。在**地形测量地图中**，真实值和纬度都只用整公里来表示，并把前两个数写成上标形式，比如对前面一个例子，就写成 $^{43}74$ 和 $^{57}55$。因为在边界子午线附近长度畸变最大，因此对每一条边界子午线的每一边宽0.5°的带中，我们附加计算其中主要的点的坐标。这样，对于宽为1°的带中的点而言(在纬度52°处这条带大约有70公里宽)，每一对坐标值对西面和东面的子午线带都可使用。

在地形测量地图和大地测量学中，也有用3°宽的带来代替6°宽的带的。同样的考虑和记号在这些情形也仍适用，只是特征数不同而已，对相切子午线3°, 6°, 9°, …, λ_m^0，其值是1, 2, 3, …, $\frac{\lambda_m}{3}$。

三角测量　我们只对几个点确定其地理坐标和它们之间连线的方位

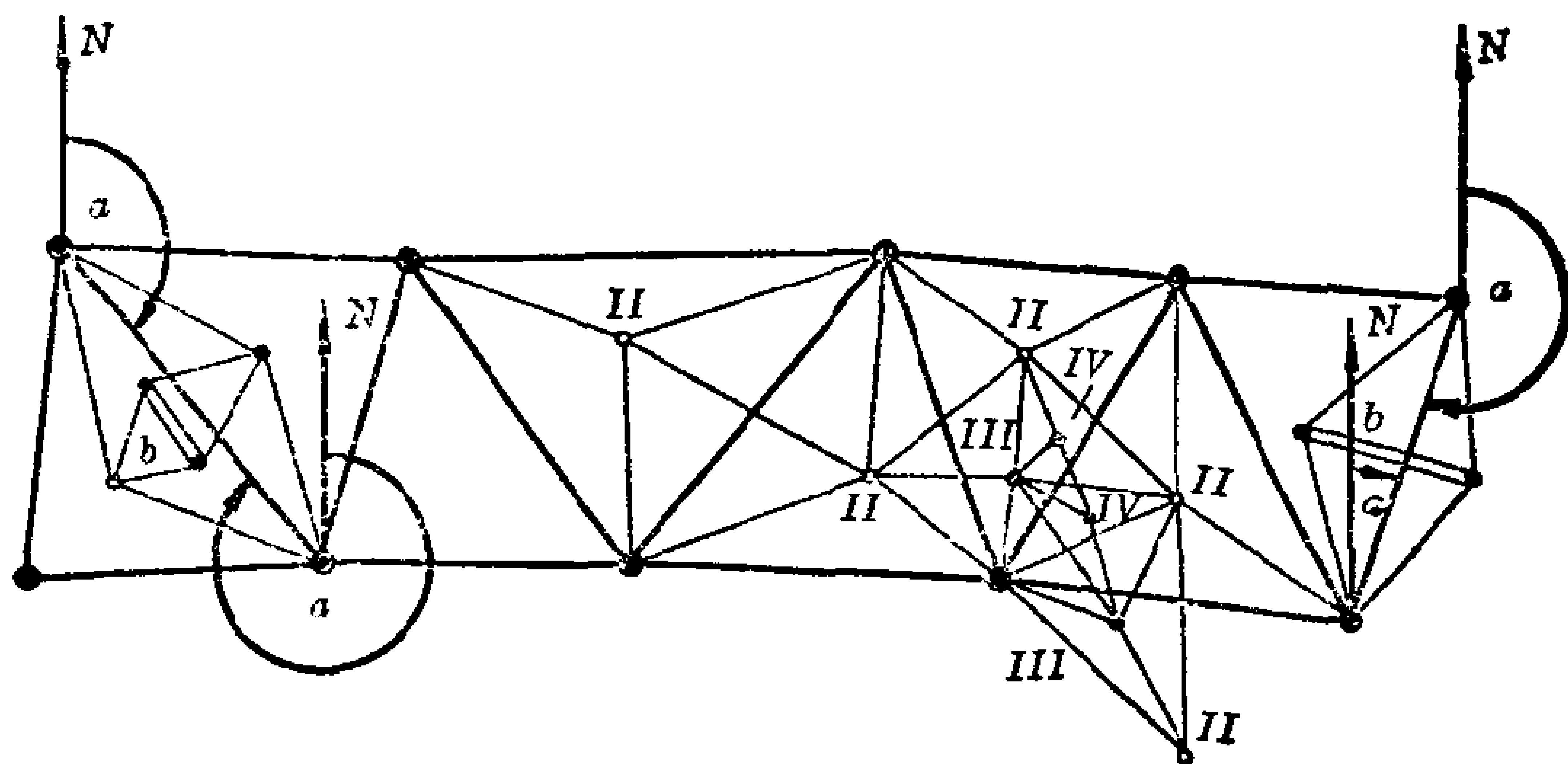


图 11.3-24　三角形框架

角，并且将其转换成高斯-克吕格坐标。其他称之为**三角点**(TP)的特征点，是通过**第一级三角形框架**跟上述的点连结了起来，在三角形框架中，几乎所有的角都已测量好。在原理图中，由北方 N 标志着的 4 个点的地理坐标是已经确定好的，并且其中任意两点之间线段的方位角 α 也已确定(见图 11.3-24)，这些线段的长度可以用**基本框架**计算出来。这框架跟每一条具有基础 b 的线段相连，基础 b 在水平的地面上，长度为 4 公里到 10 公里，并且是用长度为 24 米、张力为 5 公斤(≈11 磅)的自由悬挂因瓦合金线来测量，具有极高的精度，平均误差达到在 10 公里中只有 8 厘米，或者说 1250000 分之一。第一级三角形框架的边长平均为 40 公里到 70 公里，在图中用粗线表示。这样，用高斯-克吕格坐标确定的第一级三角点之间，只要用角度测量的方法就添加进**第二级框架**的点。它的边长平均为 20 公里，第三级框架的边长为 5 到 10 公里，最后，第四级框架的边长为 2 到 5 公里。第一级到第四级三角点用刻有十字的花岗石平台来标志，沉在地底下，并在其上立一个上面带着十字的矩形花岗石柱子(见图 11.3-25)。为了能够从较远的距离看到 TP 并且能对它进行观察，因此在它上面竖了一个信号器(见图 11.3-26)，它同时也形成了一个很好的保护，以防止损坏 TP。三角形排在一条带上的三角形框架叫作**三角形链**。沿着地球子午线排列的三角形链曾用来确定地球的形状。由于雷达和其他借助于电磁波的具有较高精度的测距方法的发展，用三边形来

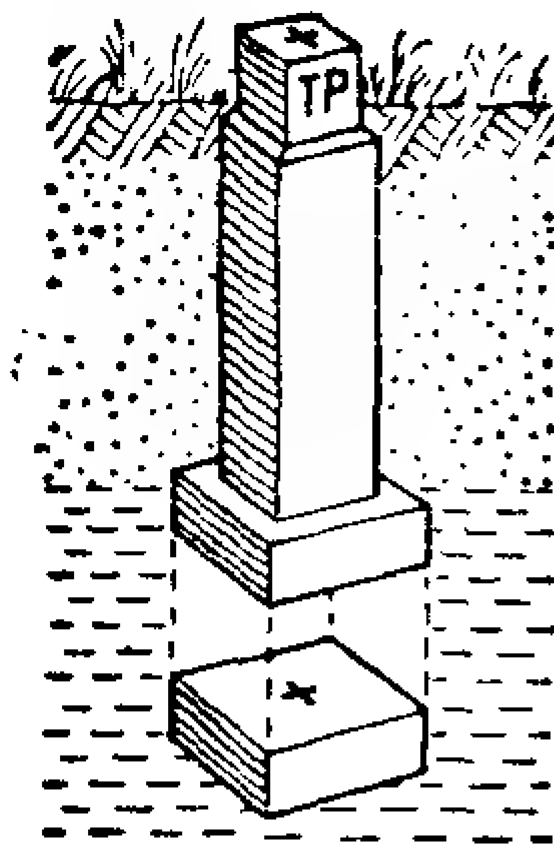


图 11.3-25 三角点

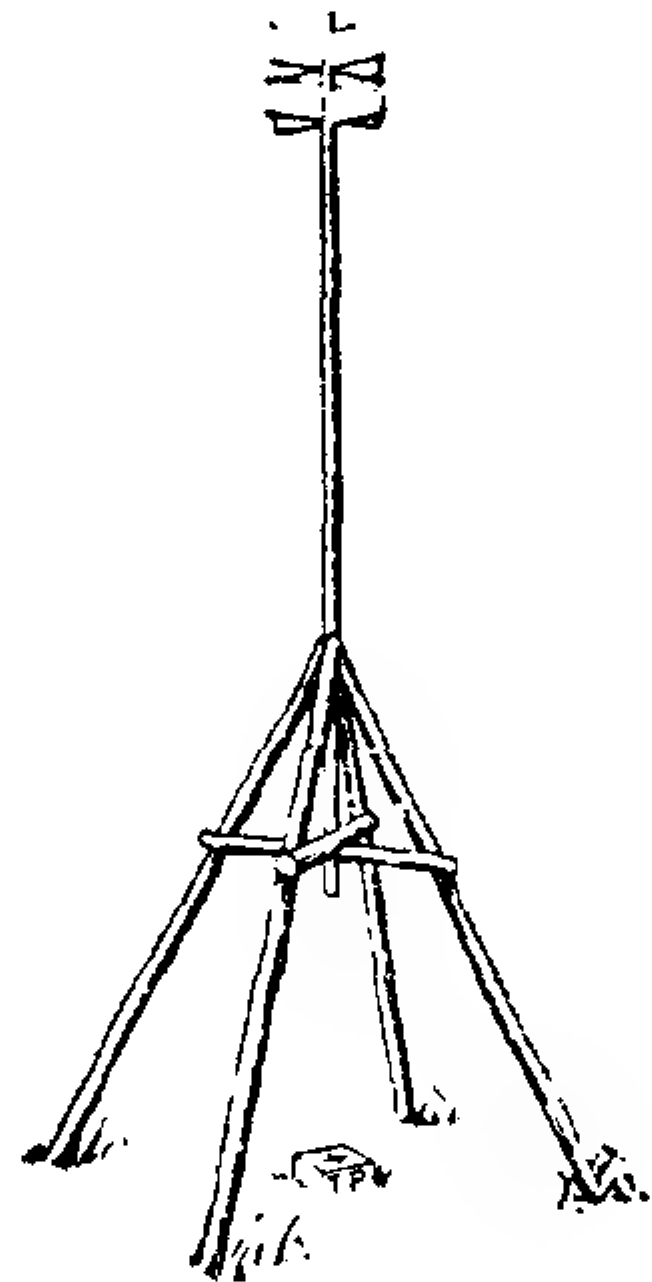


图 11.3-26 信号器

代替三角形已经成为可能的了。如果说迄今为止，天文学家一直用测量地球上至多为地球直径的两个地方的角度来确定从地球到行星通常是金星的距离，那末，现在天文学家就可以用雷达信号通过这段路程的时间来确定这些距离了。这种测量的目的是为了比以前更为精确地确定天文单位即地球和太阳之间的距离。

地阶标志系统 从一系列同心球的球心发出的两条直线跟每一个球面相交于两个点，很明显，球的半径越大，连接对应交点的线段也就越长。从这个几何事实可以得出：如有两条分别悬挂在两个很深的矿井中的铅垂线，在不同的测量高度所测得的它们之间的距离是不同的。由于在高山上两个地球半径之间的距离要比在海平面上的大，所以，在测量术中，必须在同一高度，比如说在**海平面**上，来计算所有的长度。因此，必须测量每一测量点离零平面上的高度。为此目的，就要确定高度已知的点所构成的网络，此网络称之为**地阶标志**。英国及爱尔兰正式地图的数据是由“在利物浦处的近似平均水平面”所确定的，并且在那个测量的地图上所有的水平线都是在这个数据上的高度值。

为了测量高度之差，使用称之为**水准仪**的仪器。水准仪的望远镜轴必须恰好跟**灵敏酒精水准仪**的轴相平行，从而平行于水平面。在 R 点垂直地立着一根水准标尺 L_r，在 V 点垂直地立着另一根水准标尺 L_v，然后在望远镜里向后读出 L_r 上的读数，向前读出 L_v 上的读数（见图 11.3-27）。于是这两个读数之间的差 $r-v=d$ 就测出了 V 比 R 要高出

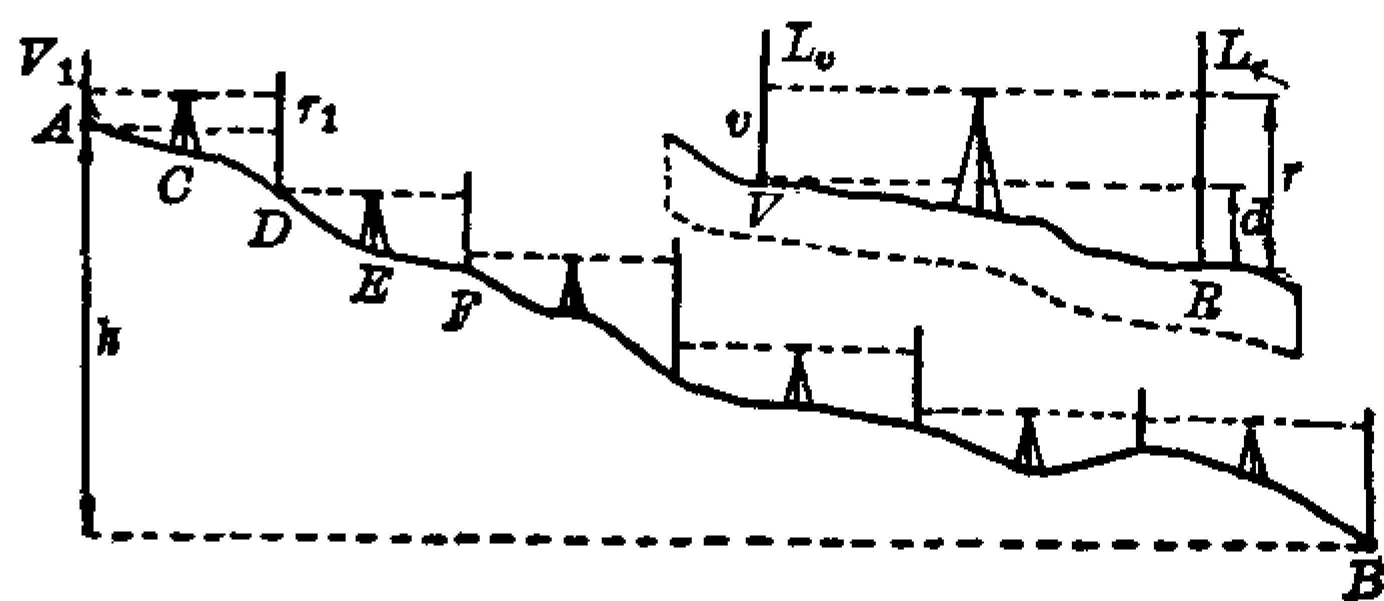


图 11.3-27 几何水准测量

多少。在水准标尺上读出的数是分米，或者用估计法，或者测出在平行滑板上的偏差能得到毫米级的数值。在图 11.3-27 的下半部分，指出了用水准仪进行的一个测量链，因此在每一个中间点，比如 D，既可以得到一个向后读数，例如从 C 来读；还可以在移动水准仪后，例如从 C 移到 E，在 E 得到一个向前读数。把它们的差值 d 进行代数加法，就得到 A 和 B

之间的高度差。这样的一个链就叫**水准测量**，如果重复进行测量就叫作**双重水准测量**。使用好的水准仪，那末在长1公里的范围内双重水准测量的误差是 ±0.4 毫米。

新点的确定 已知坐标位置的点，例如三角点，叫作**固定点**，而要确定其位置的点叫作**新点**。

向前截取 已知两个固定点 F_1 和 F_2 之间的距离是 s，要用角度测量来确定一个新点 N 的位置(见图 11.3-28)。如果经纬仪只能放在固定点上，则我们称之为**向前截取**。如果只有其中一个固定点可接近，而从新点上也能进行角度测量，则此过程就叫作**侧向截取**。当然通常总是想把三角形 F_1F_2N 中的三个角都测量一次，以便用角度和来验算角度观察的结果。在几何学上，已知三角形 F_1F_2N 的一条边和三个角，则其余的两条边 s_1 和 s_2 可以用正弦定律来计算:

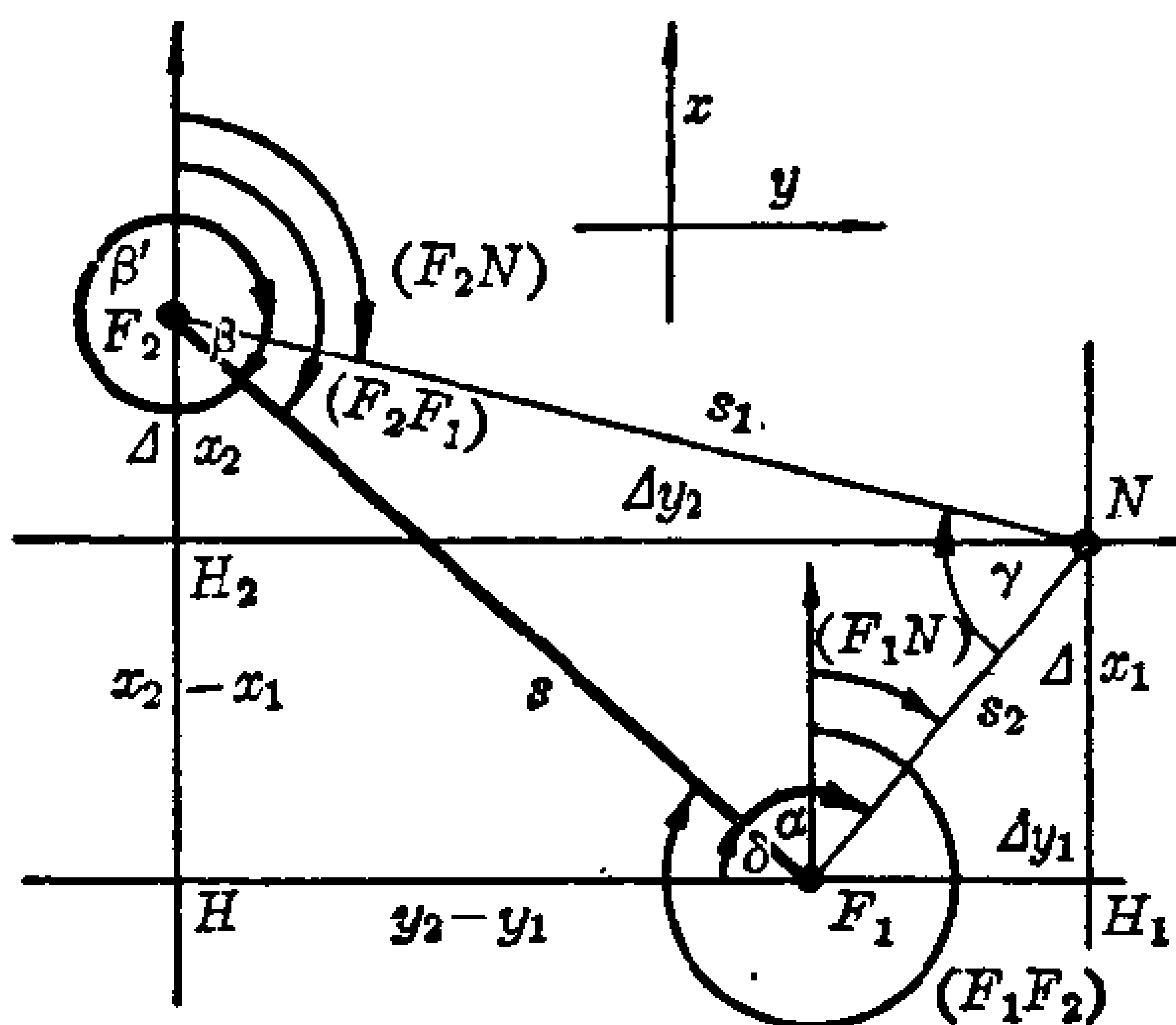


图 11.3-28 向前截取，x 的方向是坐标方格北方

$$s_1=s\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},\quad s_2=s\frac{\sin(360^\circ-\beta')}{\sin\gamma}。$$

在地理学上，固定点 F_1 和 F_2 的位置是由它们的纬度 x_1, x_2 和真实值 y_1, y_2 给出的。在直角三角形 HF_1F_2 中(见图 11.3-28)，方向角 (F_1F_2) 和线段 F_1F_2 的长度能从坐标之差 y_2-y_1 和 x_2-x_1 计算得到，方向角从坐标方格北方以顺时针方向计算。在三角形 F_2NH_2 和 F_1H_1N 中，使用已经计算得到的边长 s_1 和 s_2，能够确定坐标位置之差 Δy_1, Δx_1, Δx_2, Δy_2，再加上 F_1 或 F_2 的坐标值就给出了 N 的坐标值。作为验算，新点的坐标位置计算两次。

【例】 已知 $x_1=2524950.98$, $y_1=5711619.35$ 和 $x_2=2525616.57$, $y_2=5710664.92$，而由给定的线段 s 测出新点 N 的角度 $\alpha=61^\circ13'33''$ 和 $\beta'=328^\circ32'15''$。

1. 角 $\gamma=180^\circ-\alpha-(360^\circ-\beta')$, $\beta=360^\circ-\beta'=31^\circ27'45''$,

$$\gamma=87°18'42''。$$

2．方向角(F_1F_2):

$$\tan(F_1F_2)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

$$F_1F_2=\frac{x_2-x_1}{\cos(F_1F_2)}=\frac{y_2-y_1}{\sin(F_1F_2)},$$

$$y_2-y_1=-954.43$$

$$x_2-x_1=+665.59$$

$$(F_1F_2)=304°53'24'',\ \delta=34°53'24'',$$

$$\tan(F_1F_2)=-\cot\delta,$$

$$\cos(F_1F_2)=\sin\delta,\ \sin(F_1F_2)=-\cos\delta,$$

$$F_1F_2=1163.6。$$

3．边s_1和s_2的长度:

$$s_1=|F_1F_2|\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=|F_2N|,\quad s_1=1021.0=|F_2N|,$$

$$s_2=|F_1F_2|\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=|F_1N|,\quad s_2=608.9=|F_1N|。$$

4．从F_1到新点:

$$(F_1N)=(F_1F_2)+\alpha,$$

$$x_N-x_1=|F_1N|\cos(F_1N)=\Delta x_1,$$

$$y_N-y_1=|F_1N|\sin(F_1N)=\Delta y_1,$$

$$(F_1N)=366°06'57''=6°06'57'',$$

$$\Delta x_1=+604.53,\quad \Delta y_1=+64.78,$$

$$x_N={}^{25}25555.51,\ y_N={}^{57}11684.13。$$

5．从F_2到新点:

$$(F_2N)=(F_2F_1)+\beta',$$

$$x_N-x_2=|F_2N|\cos(F_2N)=\Delta x_2,$$

$$y_N-y_2=|F_2N|\sin(F_2N)=\Delta y_2,$$

$$(F_2F_1)=124°53'24'',$$

$$(F_2N)=453°25'39''=93°25'39'',$$

$$\Delta x_2=-61.04,\ \Delta y_2=+1019.21,$$

$$x_N=2525555.53,\ y_N=5711684.13。$$

向后截取。如果给出三个固定点F_1, F_2, F_3, 并且只能从新点F进

行观察(见图 11.3-29),则称此为向后截取。选取新点 N 必须使它不在三角形 $F_1F_2F_3$ 的外接圆上。如果 N 位于这个三角形 $F_1F_2F_3$ 的内部,就能得到最精确的结果。设通过计算得到三角形 $F_1F_2F_3$ 的三个角,在 F_1

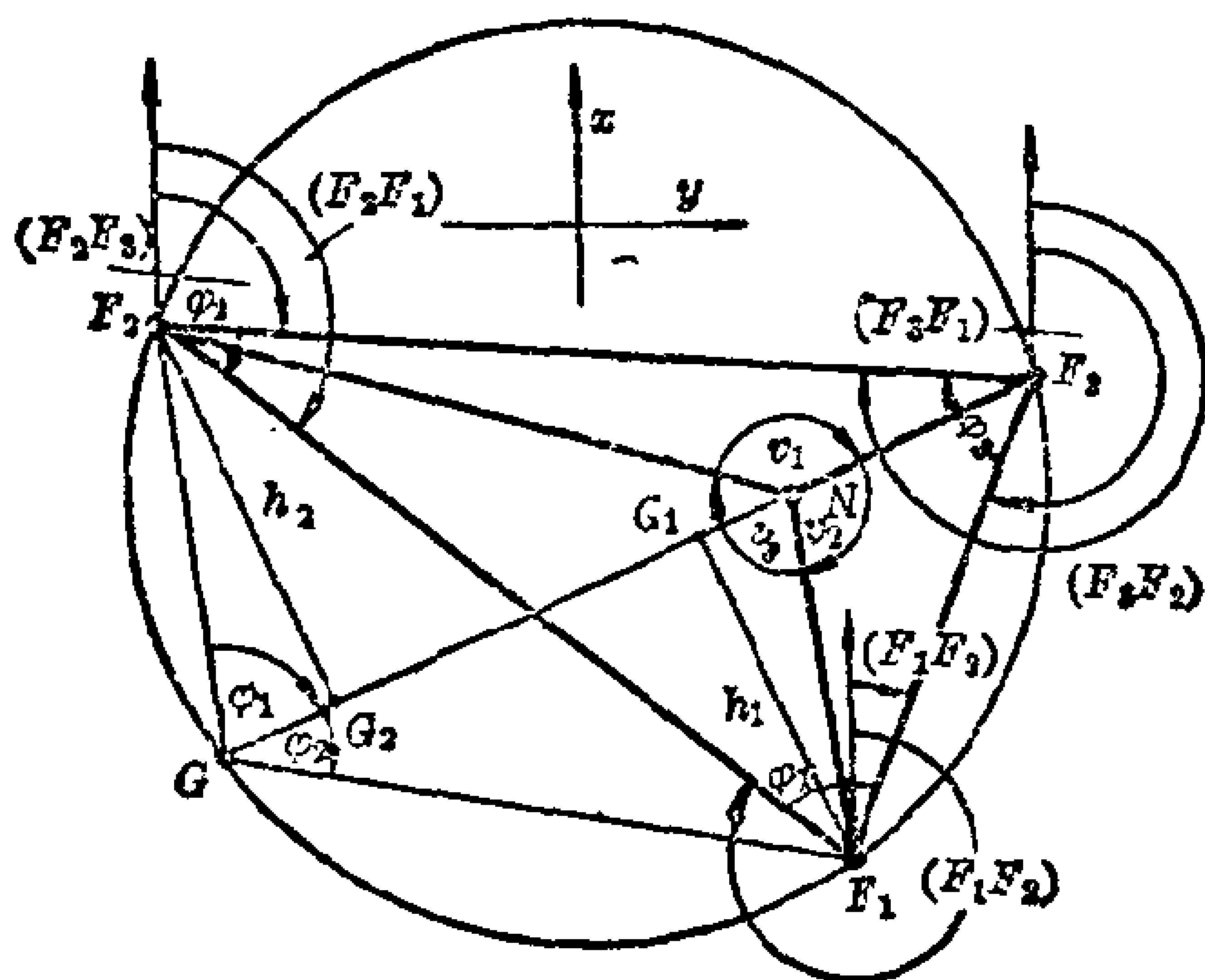


图 11.3-29 向后截取

是 φ_1,在 F_2 是 φ_2,在 F_3 是 φ_3。又设从 N 测得的角度是 $\measuredangle F_2NF_3=\nu_1$,$\measuredangle F_3NF_1=\nu_2$,$\measuredangle F_1NF_2=\nu_3$。从给定的三角形的重心 S 的坐标:$s_x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$,$s_y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$,提出了一种便于机器计算的解法。在这些公式中,顶点关于中线有相同的重量。如果给这些顶点不同的重量 g_1,g_2,g_3,这就给出了过这些顶点不同的横断线,如果某些重量值是负的,那末这些横断线可以位于三角形的外面。于是,这些横断线交点 N 的坐标是

$$x=\frac{g_1x_1+g_2x_2+g_3x_3}{g_1+g_2+g_3},\quad y=\frac{g_1y_1+g_2y_2+g_3y_3}{g_1+g_2+g_3}。$$

从力学概念可以得到在各顶点的重量值,此力学概念就是:设过一个顶点有一条横断线,则其他两个顶点关于这条横断线的**力距**必须相等。设 G 是横断线 F_3N 跟外接圆的交点,而 G_1 和 G_2 分别是从 F_1 和 F_2 向这条横断线 F_3N 作垂线的垂足,那末顶点 F_1 和 F_2 关于 F_3N 的力距是相等的:

因此
$$g_1h_1=g_2h_2$$

或者
$$\frac{g_1}{g_2}=\frac{h_2}{h_1}=\frac{h_2}{|GN|}\bigg/\frac{h_1}{|GN|},$$

其中：
$$\frac{h_2}{|GN|}=\frac{h_2}{|GG_2|+|G_2N|}=\frac{1}{|GG_2|/h_2+|G_2N|/h_2}$$
$$=\frac{1}{\cot\varphi_1-\cot\nu_1},$$
$$\frac{h_1}{|GN|}=\frac{h_1}{|GG_1|+|G_1N|}=\frac{1}{|GG_1|/h_1+|G_1N|/h_1}$$
$$=\frac{1}{\cot\varphi_2-\cot\nu_2}。$$

用循环置换法和代入法，得到：
$$g_1:g_2:g_3=\frac{1}{\cot\varphi_1-\cot\nu_1}:\frac{1}{\cot\varphi_2-\cot\nu_2}:\frac{1}{\cot\varphi_3-\cot\nu_3}。$$

因为任何比例因子不影响新点的坐标，因此可以将此比例因子取为1。于是各点的重量是：
$$g_1=\frac{1}{\cot\varphi_1-\cot\nu_1},\quad g_2=\frac{1}{\cot\varphi_2-\cot\nu_2},\quad g_3=\frac{1}{\cot\varphi_3-\cot\nu_3}。$$

从固定点 F_1, F_2, F_3 的坐标(参看向前截取)，得到：
$$x_1=2524950.98,\quad x_2=2525616.57,\quad x_3=2525555.51,$$
$$y_1=5711619.35,\quad y_2=5710664.92,\quad y_3=5711684.14。$$
$$(F_1F_2)=304°53'24'',\ (F_2F_3)+\varphi_2=(F_2F_1),\ (F_2F_3)=93°25'39'',$$
$$(F_3F_1)+\varphi_3=(F_3F_2),\ (F_3F_1)=186°06'57'',\ (F_1F_2)+\varphi_1=(F_1F_3)。$$

计算得到的	余　　切	测量得到的	余　　切
$\varphi_2=31°27'45''$	1.63425	$\nu_2=153°12'22''$	−1.98019
$\varphi_3=87°18'42''$	0.0469547	$\nu_3=97°20'08''$	−0.128734
$\varphi_1=61°13'33''$	0.549176	$\nu_1=109°27'30''$	−0.353300
180°00'00''		360°00'00''	

这几个重量的数值就是 $g_1=1.10806$, $g_2=0.27667$, $g_3=0.74946$，从而新点的坐标是 $x=2525249.55$, $y=5711518.37$。

在确定船只和飞机自身的位置时，向后截取具有特别重要的意义。

汉森(Hansen)问题。如果给出两个不可接近的固定点 F_1 和 F_2 的位置，例如两座塔的顶，那末就能确定两个新点 N_1 和 N_2 的位置，其中假定从两个新点中的每一个都能观察到另一个新点和两个固定点(见图11.3-30)。用图11.3-30中的记号，假定可以计算得到角 φ 和 ψ，那末可

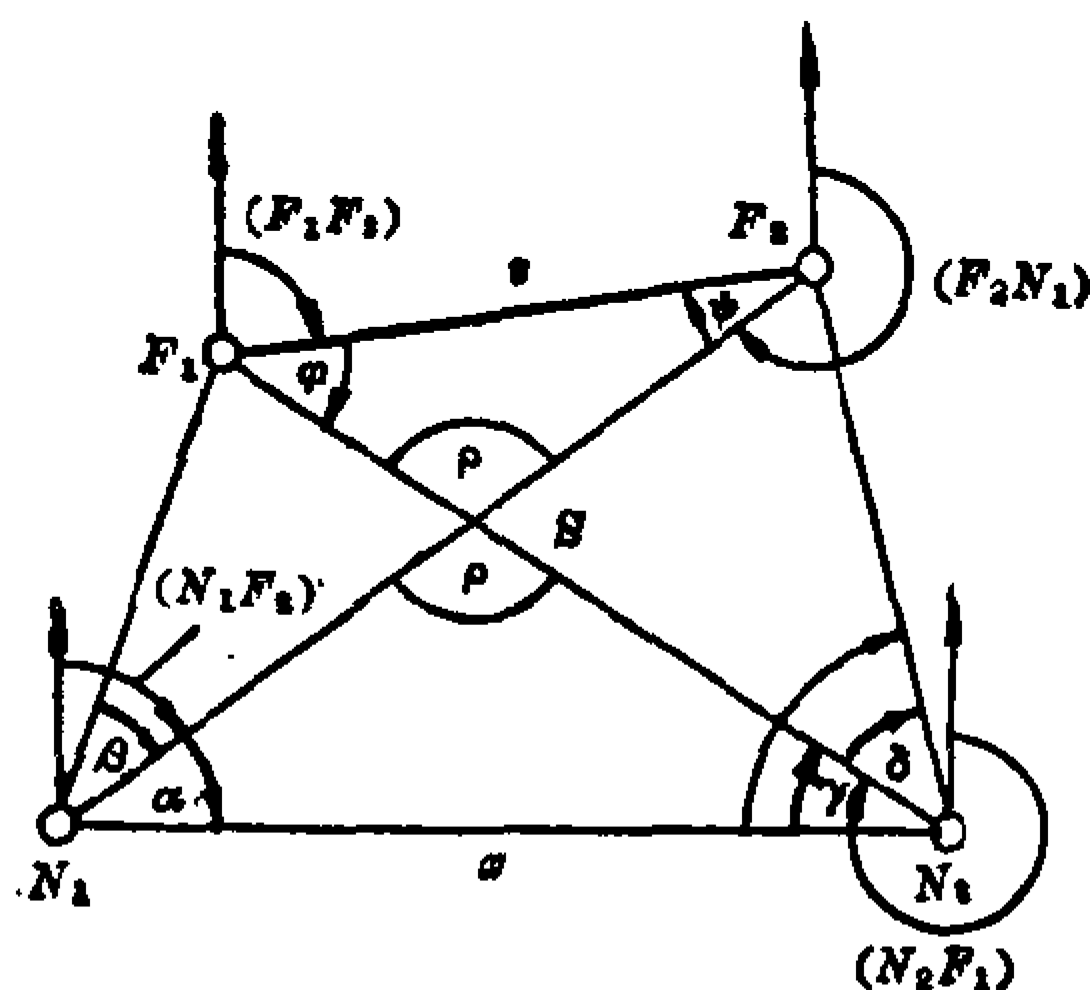


图 11.3-30 汉森问题

以用正弦定律得到解。因为在三角形 N_1N_2S 和 F_1F_2S 中角 ρ 是相等的，因此：$\dfrac{\varphi+\psi}{2}=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\varepsilon_1$。

使用一个辅助角，可用下列方法求得所需要角的差值的二分之一：

$$\triangle F_1F_2N_1:\quad |N_1F_1|=s\frac{\sin\psi}{\sin\beta};$$

$$\triangle F_1N_2N_1:\quad |N_1N_2|=|N_1F_1|\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma}$$

$$=s\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\psi}{\sin\beta\sin\gamma};$$

$$\triangle F_1F_2N_2:\quad |N_2F_2|=s\frac{\sin\varphi}{\sin\delta};$$

$$\triangle F_2N_2N_1:\quad |N_1N_2|=|N_2F_2|\frac{\sin(\alpha+\gamma+\delta)}{\sin\alpha}$$

$$=s\frac{\sin(\alpha+\gamma+\delta)\sin\varphi}{\sin\alpha\sin\delta};$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{\sin\alpha\sin\delta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma+\delta)}=\cot\eta。$$

辅助角 η 除了相差 $180°$ 的某一倍数之外是完全确定的。用加减法和应用三角关系，并记住 $\cot 45°=1$，得到：

$$\frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\sin\varphi+\sin\psi}=\frac{\cot\eta-1}{\cot\eta+1},$$

$$\frac{2\cos\left(\dfrac{\varphi+\psi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi-\psi}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\varphi+\psi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\varphi-\psi}{2}\right)}=\frac{\cot 45°\cot\eta-1}{\cot\eta+\cot 45°},$$

$$\tan\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)=\tan\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cot(45^\circ+\eta),$$

因此值 $\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)=\varepsilon_2$ 为已知。于是 $\varphi=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\psi=\varepsilon_1-\varepsilon_2$。结果就能计算得到线段 $|F_1N_1|$, $|N_1N_2|$, 和 $|N_2F_2|$。对于方向角,我们得到:

$$\begin{aligned}
(F_1N_2)&=(F_1F_2)+\varphi,\\
(N_2F_1)&=(F_1N_2)+180^\circ,\\
(N_2F_2)&=(N_2F_1)+\delta,\\
(N_2N_1)&=(N_2F_1)-\gamma,\\
(F_2N_1)&=(F_2F_1)-\psi,\\
(N_1F_2)&=(F_2N_1)+180^\circ,\\
(N_1F_1)&=(N_1F_2)-\beta,\\
(N_1N_2)&=(N_1F_2)+\alpha。
\end{aligned}$$

从方向角和长度，能求得坐标差（参看前向截取），从而求得点 $F_1\to N_1\to N_2\to F_2$ 的一系列坐标值,对 F_2 的坐标必须给出已知的值。

多角形弧 除了已经用三角法确定好的点外，用测量线段和角度就能计算更远的点的坐标。如果 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 是在已知点 P_1 开始的多角形弧的顶点，则用测量带测得线段 $s_1=|P_1P_2|$, $s_2=|P_2P_3|$ 等等的长度,并且测得在每一点的偏离角 $\beta_1, \beta_2, \cdots$。这个角度就是在前面一条线段方向和后面紧接着的一条线段方向之间的差，测量是按顺时针方向进行的（见图 11.3-31）。在 P_1 点处的第一次测量是把对着另一个固定

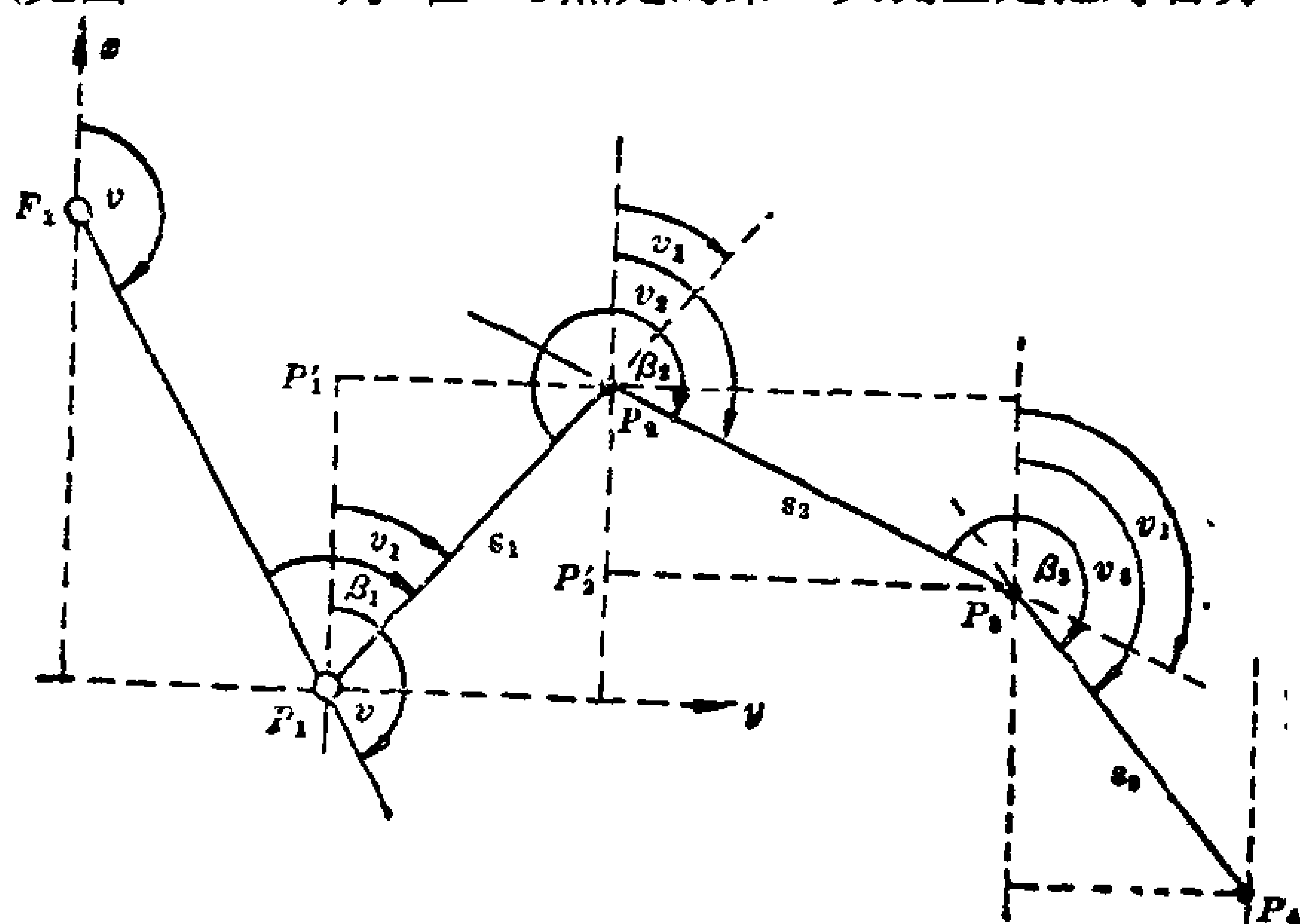


图 11.3-31 多角形弧

点 F_1 的方向取作为前一线段的方向。根据 P_1 点测得的偏离角，就把多角形弧连结到已知方向。如果最后一个点 P_n 的坐标是已知的，并且从 P_n 能够看到另一固定点 F_2，那末，多角形弧的测量精度能够大大地提高，这时多角形弧就跟两个给定的方向 (F_1P_1) 和 (P_nF_2) 相连结。然后把方向角相加就能算出偏差角了：

$$(P_1F_1)=(F_1P_1)\pm180^\circ,\rightarrow(P_1P_2)=(P_1F_1)+\beta_1,$$

$$(P_2P_1)=(P_1P_2)\pm180^\circ,\rightarrow(P_2P_3)=(P_2P_1)+\beta_2,$$

等等。由极坐标 (P_iP_{i+1})，s_i 变换成笛卡尔坐标就给出了在点 P_i 和点 P_{i+1} 之间坐标差 Δx_i 和 Δy_i；例如，

$$\Delta x_1=x_2-x_1=|P_1P_1'|=s_1\cos(P_1P_2)$$

和

$$\Delta y_1=y_2-y_1=|P_1'P_2|=s_1\sin(P_1P_2)。$$

坐标差的符号跟方向角的大小有关；在图中，这些方向角记作 $\nu_i=(P_iP_{i+1})$，$\nu_1=(P_1P_2)$ 位于第一象限，$\nu_2=(P_2P_3)$ 和 $\nu_3=(P_3P_4)$ 位于第二象限；这样，Δx_1 是正的，但是 Δx_2 和 Δx_3 是负的。

第12章 球面三角学

12.1 大圆、小圆和球面二角形 ……………452
12.2 球面三角形 …………454
解一般球面三角形的主要定理 …………457
一般球面三角形的基本问题……………461
直角球面三角形………469
12.3 球面三角学的应用……473
数学地理学……………473
球面天文学……………482

顾名思义，球面三角学是与求解在球面上的三角形有关的学科，它是从天文学和航海学中发展起来的。它把天球及地球表面当作球面来考虑，其任务是决定球面上点的位置、点与点之间的距离以及球面上的角度。从天体测量也得到了在测量学中很重要的高斯-克吕格坐标。

12.1 大圆、小圆和球面二角形

过球心 M 的任一直线跟球面相交于一条直径的两个端点，其长度是球半径的两倍。跟直径垂直、并且跟球心 M 的距离是 l（小于 R）的任一平面，跟球面的交线是一个半径为 $r=\sqrt{R^2-l^2}$ 的圆。如果点 M 在这个平面上，那末其交线是一个半径 $r=R$ 的大圆。对 $l=R$，得到球面的**切平面**，因为 $r=0$，因此这个平面跟球面只有一个公共点。

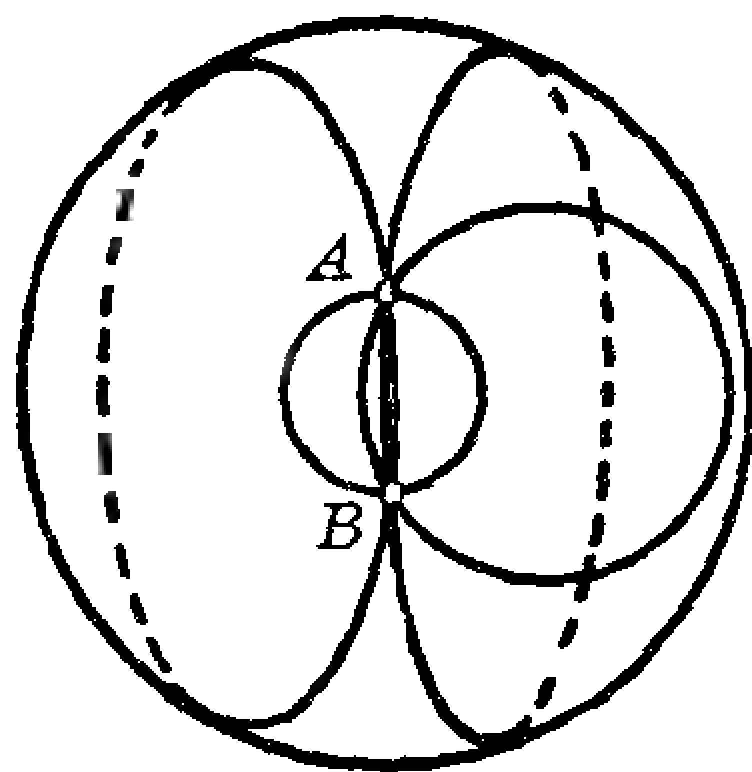


图 12.1-1 过球面上两点 A 和 B 的圆

球面上的两点 A 和 B 不位于同一直径上，过这两点可以作出**一束平面**，而这一束平面跟球面相交成一束圆（见图 12.1-1）。在这些圆中间有一个最小的圆，AB 是这个圆的直径，并且还有一个最大的圆，其圆心就是球心。这个唯一的、半径等于球半径的圆叫作**大圆**；而所有其他的圆叫作**小圆**。如果这个平面束的所有平面跟平面上的截线圆一起，绕着过 A 和 B 的直线旋转

到大圆所在的平面上去，结果就得到了一族过 A 和 B 的共轴圆。很明显，在其中每一个圆中，当圆的半径 r 越大时，劣弧 $\widehat{AB}$ 之长越短；而当半径 $r=R$ 时，劣弧 $\widehat{AB}$ 的长度具有最小值。用微分几何能够证明大圆上的劣弧 $\widehat{AB}$ 不仅是连结 A 和 B 的最短的圆弧，而且是在球面上连结 A 和 B 的所有曲线中最短的曲线。它是**测地线**的一部分。

大圆 所有球面上点与点之间的距离都是沿着大圆上的弧进行量度的。在半径足够大的球上，这些距离将任意接近于沿着直线量度的欧几里得距离。根据平面几何定理，在点 A 和 B 之间大圆上的弧 $\widehat{AB}$ 的长度由半径 R 的大小以及对着这条弧的圆心角大小所决定。圆心角的大小或者用弧度给出或者用度数给出，常用小写的拉丁字母来表示，例如用 a 或者 a° 来表示。

大 圆 弧	$\widehat{AB}=R\widehat{a}=\pi Ra^\circ/180^\circ$

设两个大圆相交于两点 A 和 B，则它们一定是一条直径的两个端点，设一条直线通过球心跟球面相交于两点，则把这两点叫作**对径点**，或者叫**极**。若大圆所在的平面垂直于直线 AB，那末这个大圆叫作 A（或者 B）的**极圆**。如果用一种确定的意义来画极圆，就能区分左手极还是右手极。

每一个垂直于直径 AB 的平面（见图 12.1-2）与过 A 和 B 的两个大圆所在的每一个平面相交于一条直线，而在这两条直线之间的夹角 α 就是这两个平面之间的夹角。在极点跟两个大圆相切的切线也都和直径

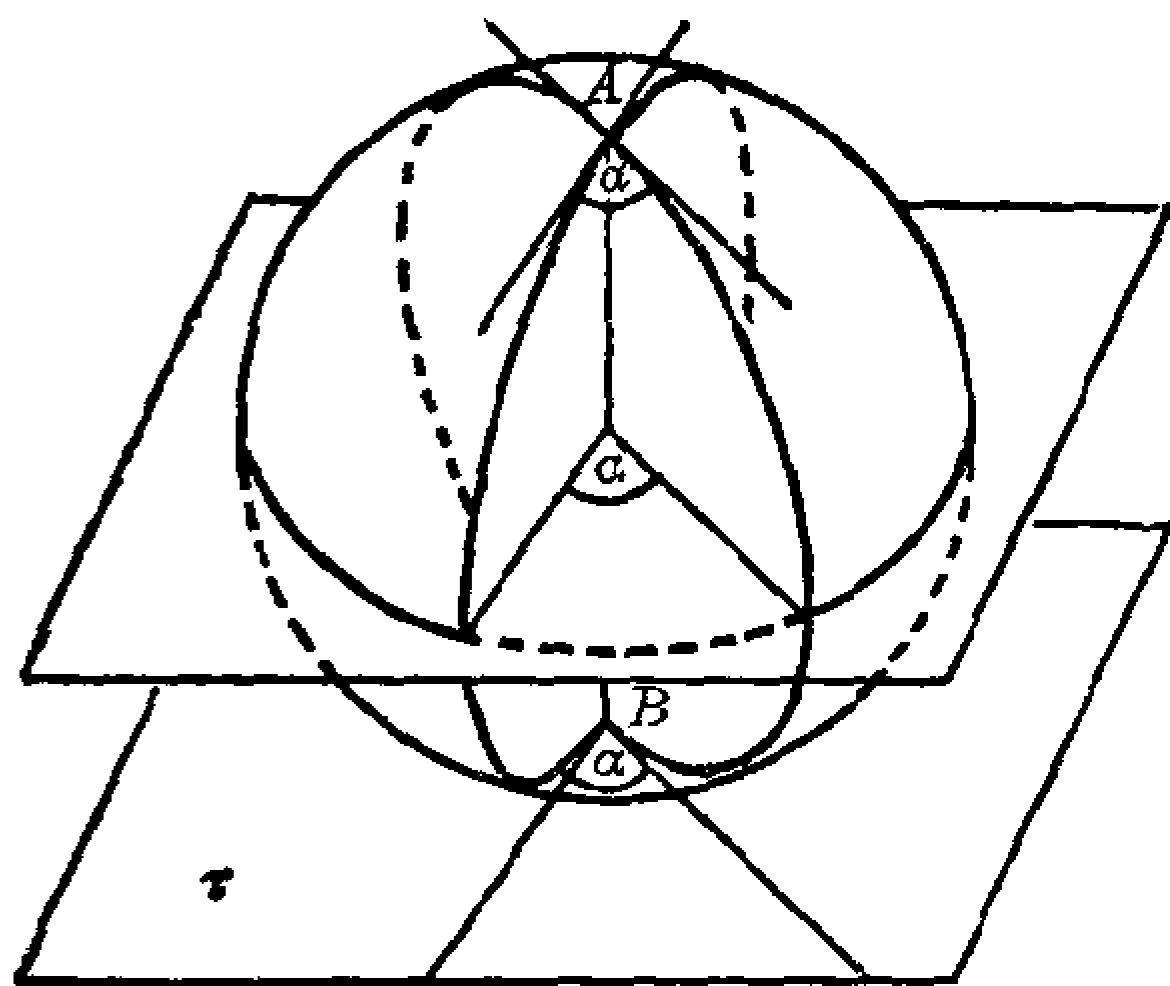


图 12.1-2 两个大圆之间的交角，τ 是切平面

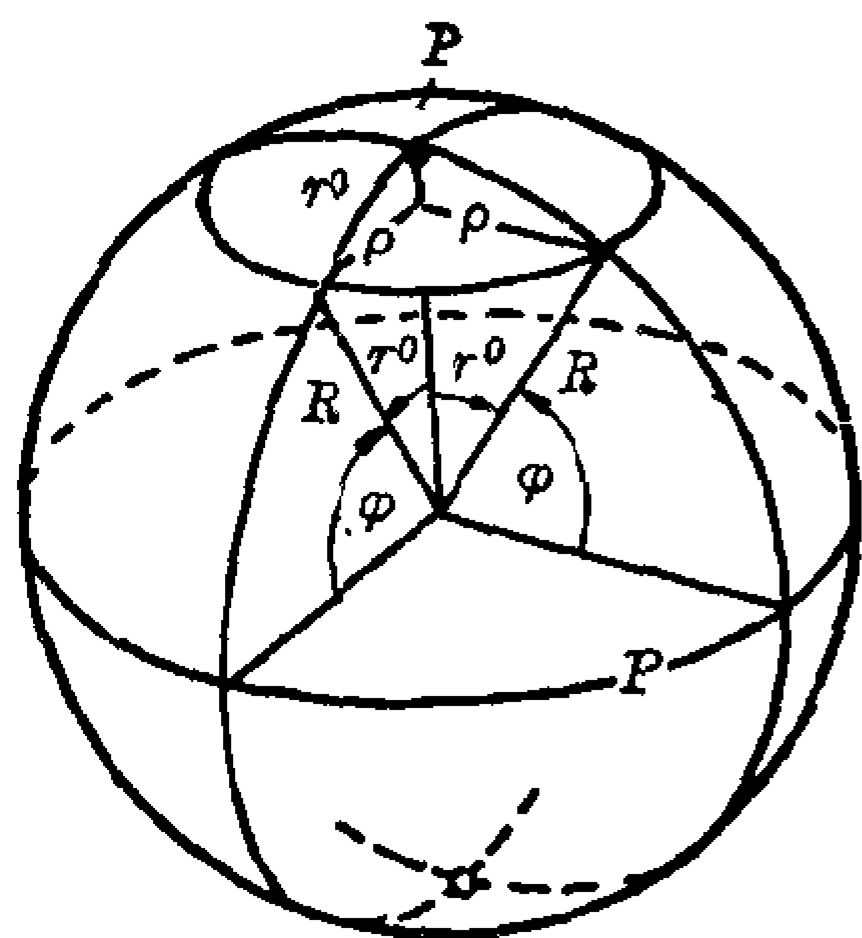


图 12.1-3 球面圆，纬圆

AB垂直，并且它们之间的夹角也等于α。这就是**两个大圆之间的夹角**α。

球面圆　在球面上跟点P距离相等的所有的点的轨迹是一个圆，这个圆就叫作**球面圆**。其中距离是沿着过P点的大圆进行测量的，而这个保持不变的球面距离叫作它的**球面半径**，点P就叫作它的球面中心或者叫作**极**；例如所有纬度为φ的纬圆就是球面圆。它们的球面半径是$90°-\varphi$，极就是它们的球面中心。而在以极为球面中心的球面圆中间，最大的球面圆是球面半径为$\pi/2$或$90°$的球面圆，但所有其他的球面圆都是小圆，它们是球面跟这样一种平面的交线，这种平面平行于极圆平面。如果一个圆的球面半径是$r°$，而球的半径是R(见图12.1-3)，那末在截平面上这个圆的半径就是$\rho=R\cos(90°-r°)$，而圆周长是$2\pi\rho=2\pi R\cos(90°-r°)$。这样，纬圆的周长就是$2\pi\rho=2\pi R\cos\varphi$。

球面二角形　两个大圆总有一对公共的对径点，并且把球面分成四个球面二角形。每一个球面二角形都有两条相等的边，其大小为$s=180°$(或π弧度)。它的面积大小跟两个大圆的夹角α有关。高斯-克吕格投影所使用的球面二角形具有$6°$的夹角，夹角为$90°$(或$\pi/2$)的球面二角形面积A_0是球表面积的四分之一，因此是πR^2。按照比例法则，夹角为$\alpha°$(或者$\hat{\alpha}$)的球面二角形面积等于$A=\pi R^2\alpha°/90°$(或者$2R^2\hat{\alpha}$)。这样，高斯-克吕格子午线带的表面积是$A=\pi R^2\cdot 6°/90°=\pi R^2/15=8501665$平方公里(如果$R$取作6371.221公里)。

球面二角形面积	$A=2R^2\hat{\alpha}=\pi R^2\alpha°/90°$

12.2　球面三角形

如果球面上的三点A, B, C是这样的：它们之中没有两点形成一组对径点，并且这三点也不在同一个大圆上，那末这三点就确定了三个大圆，其中每一个大圆过其中两点，而且成对地相交于三点$\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$，这三点就是给定三点的对径点。这三个圆把球面分成八个部分，每一个部分由长度小于π的三个大圆弧所围成(见图12.2-1)。这些区域叫作球面三角形，有时也可特别地叫作**欧拉三角形**，以与边长可能大于π的球面三角形相区别，例如在图12.2-1中，要与由边AB, BC和$C\bar{A}\bar{C}A$所构成的三角形相区别。这个由大圆弧$C\bar{A}\bar{C}A$所围成的非欧拉三角形就是半球与欧拉三角形ABC之差。由于这个原因，在这里只考虑欧拉三角形。三

极三角形　对应于每一个球面三角形 ABC，从它的球心 M 到它的三个顶点 A, B, C，可以作出（长为 R 的）三个向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$，由此也就决定了一个立体三面角（有时简称为三面角）。有一列同心球，它们有不同的半径和同一个球心 M，由向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 决定的射线跟这些球面相交形成了一系列相似球面三角形，显然边角关系是不变的。因此可以假定向量的长度为 1。现在，设 P_a, P_b, P_c 是从三面角内部的一点 P 向它的三个边界平面作垂线的垂足。这些垂线决定了给定的三面角的**极三面立体角**。它的侧面角大小由角 $\bar{c}$, $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 来度量：$\sphericalangle P_aPP_b=\bar{c}$, $\sphericalangle P_bPP_c=\bar{a}$, $\sphericalangle P_cPP_a=\bar{b}$（见图 12.2-2）。比如说，侧面 $PP_a\bar{B}P_c$ 跟原来的三面角的侧面 MBC 和 MAB 垂直，因此也就跟它们的交线 $\boldsymbol{B}$ 垂直。角 $P_a\bar{B}P_c$ 就是侧面 a 和 c 之间的夹角 β。因此，在四边形 $PP_a\bar{B}P_c$ 中，得到 $\bar{b}+\beta=180°$，这是因为其他两个角都是直角的缘故。同样能够得到 $\bar{c}+\gamma=180°$ 和 $\bar{a}+\alpha=180°$。如果在极三面立体角中选一点，为了简单起见就取为点 M，那末，向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 就是从点 M 到极三面立体角的侧面 $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ 的垂线，而 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ 就是这些垂线的垂足。这样，原来的三面角 $MABC$ 就是它的极三面立体角的极三面立体角。它的侧面 a, b, c 分别垂直于线 PP_a, PP_b, PP_c。极三面立体角的角 $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ 分别包含在有两个直角的四边形 $M\bar{B}P_a\bar{C}$, $M\bar{C}P_b\bar{A}$, $M\bar{A}P_c\bar{B}$ 中（$\bar{\alpha}=\sphericalangle\bar{B}P_a\bar{C}$, $\bar{\beta}=\sphericalangle\bar{C}P_a\bar{A}$, $\bar{\gamma}=\sphericalangle\bar{A}P_c\bar{B}$），这样 $\bar{\alpha}+a=180°$, $\bar{\beta}+b=180°$, $\bar{\gamma}+c=180°$，这是因为在每一种场合下其他两个角都是直角的缘故。

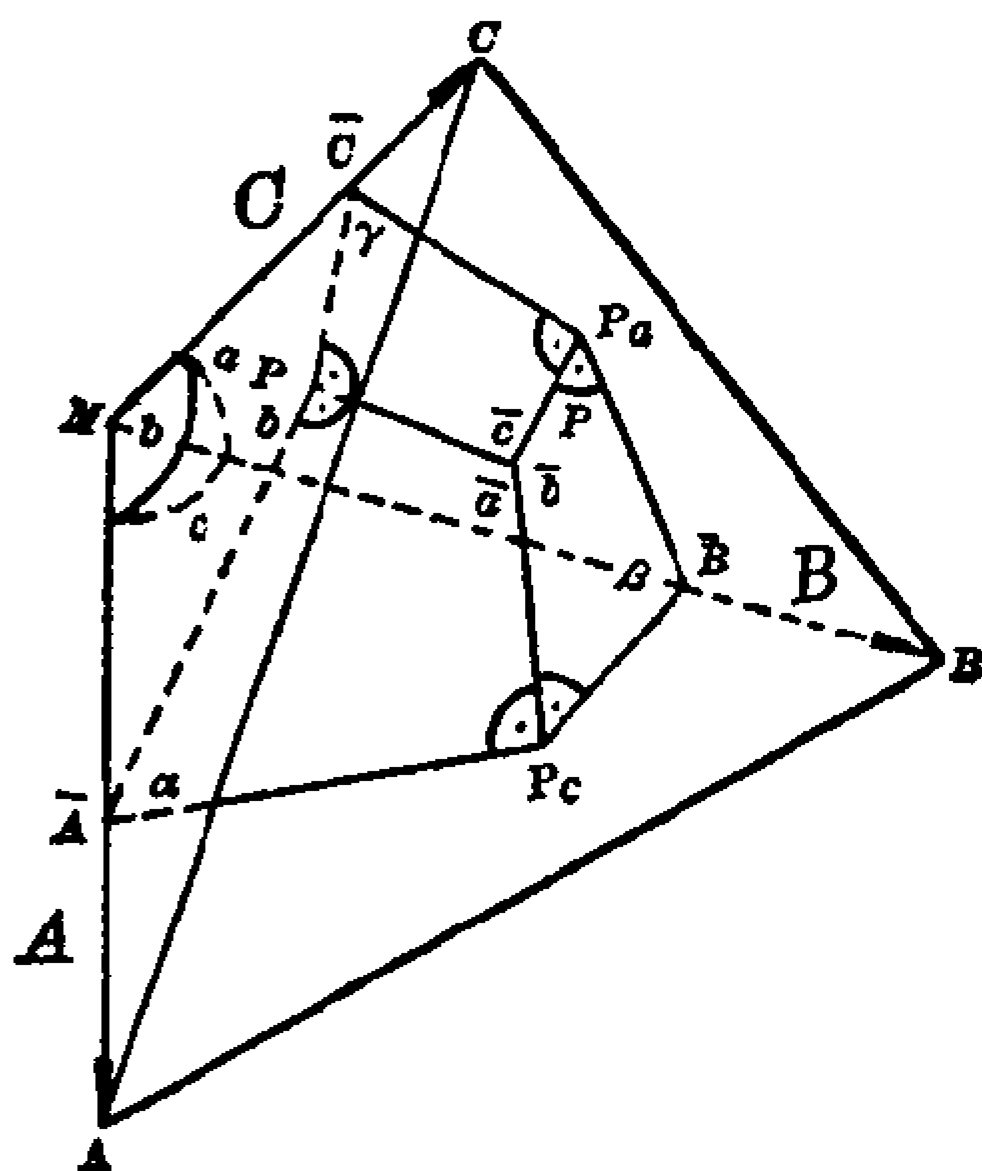


图 12.2-2　三面角 $MABC$ 的极三面立体角 $PP_aP_bP_c$

三面角与其极三面立体角之间的边、角关系		
$\bar{a}+\alpha=180°$,	$\bar{b}+\beta=180°$,	$\bar{c}+\gamma=180°$
$\bar{\alpha}+a=180°$,	$\bar{\beta}+b=180°$,	$\bar{\gamma}+c=180°$

如果任意选择的这点 P 向点 M 靠近，那末 PP_a, PP_b, PP_c 分别变成过球心 M 的侧面 a, b, c 的垂线，每一根线与球面相交于两个对径点。按照下列意义 $A\to B$, $B\to C$, $C\to A$ 来描给定的三角形 ABC，那末点 A', B', C' 是给定三角形 ABC 边的左手极。然后球面三角形 $A'B'C'$ 就叫作给定球面三角形 ABC 的极三角形；两个三角形之间的边角关系如上(见图 12.2-3)。

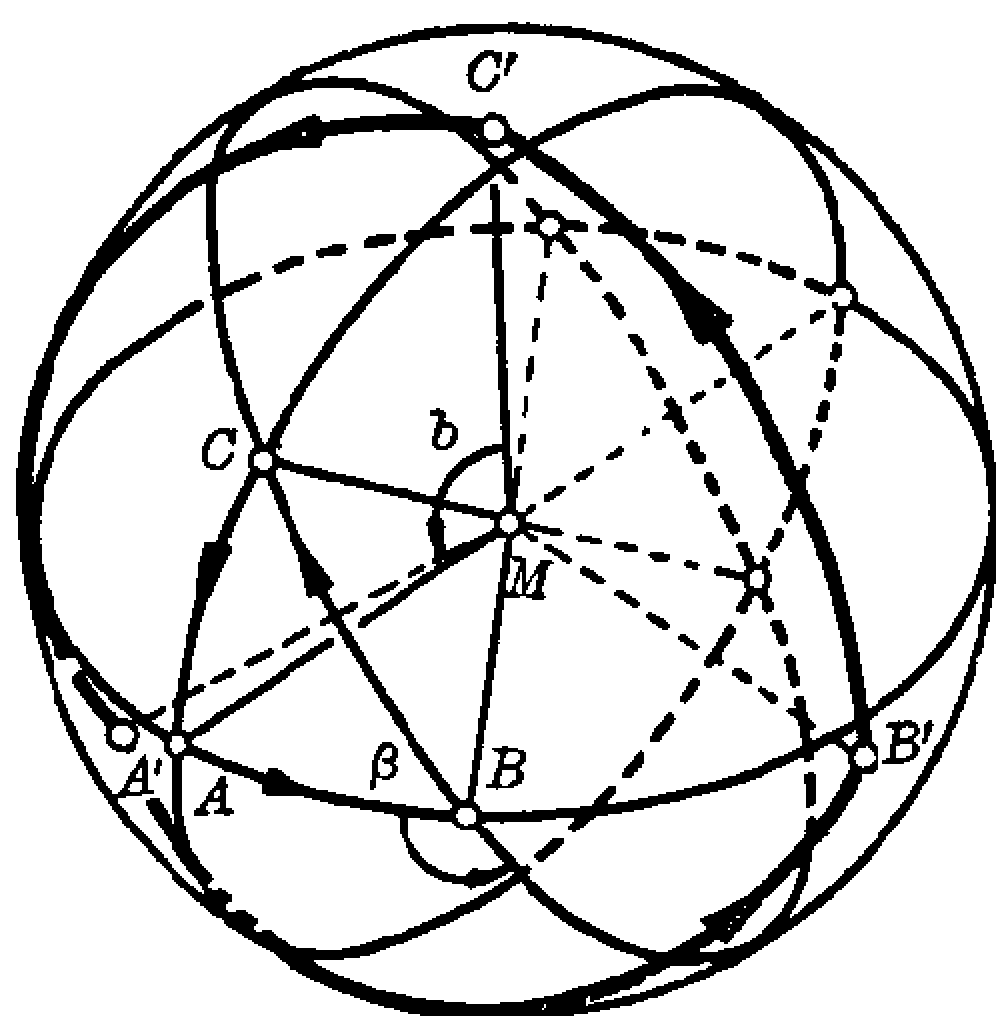


图 12.2-3 球面三角形,三面角,极三角形和极三面立体角

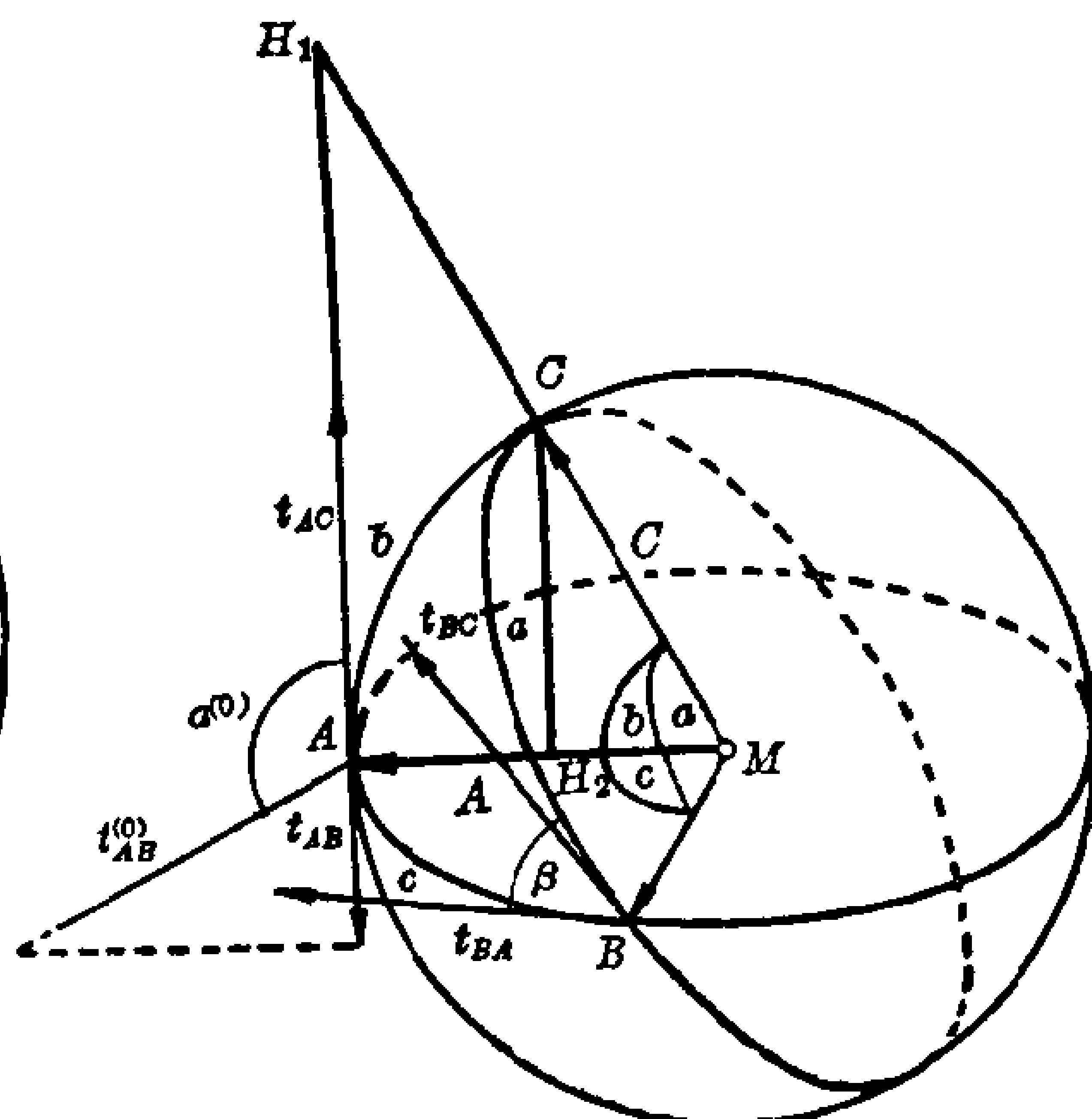


图 12.2-4 球面三角形的向量表示

解一般球面三角形的主要定理

边的余弦定理和角的余弦定理 有一个球心在 M 半径为 1 的球，向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 以 M 为始点，它们的终点构成了球面三角形 ABC，设 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{C}|=1$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\cos c$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=\cos a$, $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}=\cos b$。再设 $\boldsymbol{t}_{AC}$, $\boldsymbol{t}_{AB}$; $\boldsymbol{t}_{BA}$, $\boldsymbol{t}_{BC}$; $\boldsymbol{t}_{CB}$; $\boldsymbol{t}_{CA}$ 是长度为 1 的单位向量，并且在顶点 A, B, C 与大圆相切。每一对切线确定了一个切平面，在此切平面上可以测得对应的球面三角形的角：

$$\sin\alpha=|\boldsymbol{t}_{AB}\times\boldsymbol{t}_{AC}|,\ \sin\beta=|\boldsymbol{t}_{BC}\times\boldsymbol{t}_{BA}|,\ \sin\gamma=|\boldsymbol{t}_{CA}\times\boldsymbol{t}_{CB}|。$$

边 $b=\overset{\frown}{AC}$ 是以它的真实大小画在图 12.2-4 中的，而过 $\boldsymbol{t}_{AC}$ 和 $\boldsymbol{t}_{AB}^{(0)}$ 的切平面与图纸平面垂直。如果这个平面绕着 $\boldsymbol{t}_{AC}$ 转到切平面上，使 $\boldsymbol{t}_{AB}^{(0)}$ 与 $\boldsymbol{t}_{AB}$ 重合，那末 $\boldsymbol{t}_{AC}$ 和 $\boldsymbol{t}_{AB}^{(0)}$ 之间夹角 $\alpha^{(0)}$ 的大小就与角 α 的真实大小相等。在过两个向量的平面中，例如在过向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的平面中，在一点 A 处的切

线 t_{AC} 跟另一个向量 $\boldsymbol{C}$ 的延长线相交于 H_1。在图12.2-4中，三角形 AMH_1 位于图纸平面中，利用辅助点 H_2 和平行线截距定理，得到 $\frac{|MH_1|}{|MC|}=\frac{|MA|}{|MH_2|}$，其中 $|MH_1|=\frac{1}{\cos b}$，和 $|AH_1|=\tan b$。根据向量加法，得到 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AH}_1=\overrightarrow{MH}_1$ 或者 $\boldsymbol{A}+t_{AC}\tan b=\frac{\boldsymbol{C}}{\cos b}$，$t_{AC}\tan b=\frac{\boldsymbol{C}}{\cos b}-\boldsymbol{A}$。类似地在过 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的平面中，可得 $t_{AB}\tan c=\frac{\boldsymbol{B}}{\cos c}-\boldsymbol{A}$。根据两个等式左边向量的数量积和右边向量的数量积相等，得出：

$$(t_{AC}\cdot t_{AB})\tan b\cdot\tan c=\frac{\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}}{\cos b\cdot\cos c}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\frac{\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}}{\cos b}-\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\cos c},$$

$$\cos\alpha\tan b\tan c=\frac{\cos a}{\cos b\cos c}+1-\frac{\cos b}{\cos b}-\frac{\cos c}{\cos c},$$

$$\cos\alpha\sin b\sin c=\cos a-\cos b\cos c。$$

用轮换字母的办法可以得到**边的余弦定律**，当边和角小于 π（或者180°）时成立。

边的余弦定律
$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$
$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos\beta$
$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma$

把此结果用到极三角形 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 上去，便得到 $\cos\bar{a}=\cos\bar{b}\cos\bar{c}+\sin\bar{b}\sin\bar{c}\cos\alpha$。从三角形和极三角形之间的关系，即从 $\bar{a}=180°-\alpha$，$\bar{b}=180°-\beta$，$\bar{c}=180°-\gamma$，$\bar{\alpha}=180°-a$，得到 $-\cos\alpha=(-\cos\beta)(-\cos\gamma)+\sin\beta\sin\gamma(-\cos a)$。

通过轮换字母，便可得到**角的余弦定律**。

角的余弦定律
$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$
$\cos\beta=-\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos b$
$\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c$

正弦定律　再使用导出边的余弦定律的关系式 $t_{AB}\tan c=\frac{\boldsymbol{B}}{\cos c}-\boldsymbol{A}$

和 $\boldsymbol{t}_{AC}\tan b=\dfrac{\boldsymbol{C}}{\cos b}-\boldsymbol{A}$，分别乘以 $\cos c$ 和 $\cos b$ 便得出 $\boldsymbol{t}_{AB}\sin c=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cos c$ 和 $\boldsymbol{t}_{AC}\sin b=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}\cos b$。把这些值代入向量积 $\boldsymbol{t}_{AB}\times\boldsymbol{t}_{AC}=\sin\alpha\cdot\boldsymbol{A}$，得到

$$\sin b\sin c\cdot\boldsymbol{A}\sin\alpha=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}-\cos b(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$$
$$-\cos c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})+\cos b\cos c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}),$$

其中 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$，且向量 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 垂直。因为 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})=0$ 和 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})=0$，取上式与 $\boldsymbol{A}$ 的数量积随后再通过字母轮换就可得出下面三个关系：

$$\sin b\sin c\sin\alpha=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}),\ \sin c\sin a\sin\beta=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}),$$
$$\sin a\sin b\sin\gamma=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})。$$

因为向量的循环置换不改变三重数性积（混合积）之值，因此三个式子的右边给出相同之值。从而等式的左边全部相等，

$$\sin b\sin c\sin\alpha=\sin c\sin a\sin\beta=\sin a\sin b\sin\gamma。$$

由此导出正弦定律。

正弦定律	$\sin a:\sin b:\sin c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$

半角公式和半边公式 在球面三角学中也有与平面三角中的半角公式相对应的公式，以同样的方式使用这些公式进行计算，例如从三条给定的边来计算角度，以及反过来从三个给定的角来计算边。从边的余弦定律以及借助于三角关系：

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$
$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\sin b\sin c}=-\frac{\cos(b+c)-\cos a}{2\sin b\sin c}$$
$$=\frac{\sin\left(\dfrac{b+c+a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)}{\sin b\sin c}=\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c},$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c}$$
$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{\sin b\sin c}=\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}。$$

这里利用了下列事实:

$$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

$$\cos\varphi-\cos\psi=-2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$s=\frac{b+c+a}{2},$$

$$(s-a)=\frac{b-c-a}{2},$$

$$(s-b)=\frac{c+a-b}{2},$$

$$(s-c)=\frac{a+b-c}{2}。$$

用除法就得到了半角公式,其中使用了 $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ 这一事实。

半角公式	$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$ $\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s\sin(s-b)}}$ $\tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}$ 其中 $2s=a+b+c$

半边公式可由半角公式通过极三角形的对应关系而得出。在极三角形 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 中,半角公式给出 $\tan^2\left(\frac{\overline{\beta}}{2}\right)=\frac{\sin(\bar{s}-\bar{c})\sin(\bar{s}-\bar{a})}{\sin\bar{s}\sin(\bar{s}-\bar{b})}$。用下面关系: $\sigma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$, $\overline{\beta}=180°-b$, $\bar{a}=180°-\alpha$, $\bar{b}=180°-\beta$, $\bar{c}=180°-\gamma$, $\bar{s}=\frac{1}{2}(a+b+c)=270°-\sigma$, $\bar{s}-\bar{a}=90°-(\sigma-\alpha)$, $\bar{s}-\bar{b}=90°-(\sigma-\beta)$, $\bar{s}-\bar{c}=90°-(\sigma-\gamma)$,代入之后就得到

$$\cot^2\frac{b}{2}=\frac{\cos(\sigma-\gamma)\cos(\sigma-\alpha)}{-\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}。$$

半边公式	$\tan\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\cos(\sigma-\gamma)\cos(\sigma-\alpha)}}$ $\tan\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}}$ $\tan\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$ 其中 $2\sigma=\alpha+\beta+\gamma$

耐普尔公式 在给出两边和夹角或两角和夹边时，为了用对数来求解球面三角形的整个解，可以利用所谓的耐普尔公式。这些公式是从半角公式或半边公式得出的，其中用到了三角关系，特别是用到了三角函数的和差公式。这些公式中，每三个公式组成一组，在这里每一组中只要给出一个公式就足够了，而其余的公式可以用字母轮换来得到。

耐普尔公式	1a) $\tan\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\tan\frac{b+c}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$; 1b); 1c) 2a) $\tan\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=\tan\frac{b-c}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$; 2b); 2c) 3a) $\cot\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}=\tan\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{b+c}{2}$; 3b); 3c) 4a) $\cot\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}=\tan\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{b+c}{2}$; 4b); 4c)

因为耐普尔公式使用频繁，因而推荐下面的记忆办法：所有的自变量取半角或半边；如果正切或余切把边看作为自变量，那末正弦和余弦就把角取作为自变量（反之亦然）；半边函数跟其他两条边的半和或半差的函数有关，对角来说也类似。很容易把其他精确的记忆办法写出来。

一般球面三角形的基本问题

与平面三角形不同，球面三角形也能由三个角所完全确定，因此有六个基本问题存在。可利用欧拉三角形中的一般关系来求得它们的解。

通过极限过程变为平面三角问题 在空间中不位于一条直线上的三

点 A, B, C, 决定一个平面以及在此平面上的一个平面三角形。然而，它们却可以在无穷多个球面上作为球面三角形的顶点。如果把这些球面按半径 R 增大的次序进行排列，那末当 $R\to\infty$ 时，球面三角形就不断地趋向于平面三角形，并且每一个球面角也趋向于对应的平面角，而球面角盈也变得任意小。球面三角形中以弧度计量的边 $\frac{\bar{a}}{R}$, $\frac{\bar{b}}{R}$, $\frac{\bar{c}}{R}$ 与平面三角形中边 $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ 的长度相对应。在由侯利尔(L'Huilier)得到的公式

$$\tan\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\left(\frac{s-a}{2}\right)\tan\left(\frac{s-b}{2}\right)\tan\left(\frac{s-c}{2}\right)}$$

中，因为角度很小，因此可以用角度的弧度值来代替它的正切值。这就给出了

$$\frac{\hat{\varepsilon}}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\bar{s}}{R}\cdot\frac{(\bar{s}-\bar{a})}{R}\cdot\frac{(\bar{s}-\bar{b})}{R}\cdot\frac{(\bar{s}-\bar{c})}{R}}。$$

这样，球面三角形的面积 A 就变成了由赫伦公式给出的平面三角形的面积：

$$A=\hat{\varepsilon}R^2=\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{4}\right)\cdot 4R^2=\sqrt{\bar{s}(\bar{s}-\bar{a})(\bar{s}-\bar{b})(\bar{s}-\bar{c})}。$$

当 R 的值相当大，但仍是有限数时，由勒让德 (Legendre) 给出的定理成立：

勒让德定理：一个球面三角形，当其边很短并且因此球面角盈也很小时，它的面积跟边长的绝对值与它相同的平面三角形的面积近似相等。而平面三角形的每一个角要比与之对应的球面三角形的角要小，减小的数量近似地等于球面角盈的三分之一。

利用侯利尔公式能够求出在地球（半径为 R）上一个三角形的球面角盈 ε，设此三角形的边长为 $a=31.075$ 英里，$b=37.290$ 英里，而 $c=43.505$ 英里(例如在剑桥、卢顿和科比之间的距离)。边的大小用弧度给出的话是 $\hat{a}=\frac{a}{R}$, $\hat{b}=\frac{b}{R}$, $\hat{c}=\frac{c}{R}$；或者用度数给出的话是 $a^\circ=360^\circ\frac{a}{2\pi R}$, $b^\circ=360^\circ\frac{b}{2\pi R}$, $c^\circ=360^\circ\frac{c}{2\pi R}$；或者还可以用秒来表示，因为 1 个弧度对应于 $206264.8''$，因而只要用 $206264.8''$ 来乘 a 即可。右面的结果表明球面角盈是 $\varepsilon=7.6''$。由勒让德定理，只要角度测量的精度不小于 $\frac{\varepsilon}{3}\approx$

英　里	弧　度	秒	$\frac{s}{2}=24'16.85''$
31.075	0.0078479	1618.75″	$\frac{s-a}{2}=10'47.47''$
37.290	0.0094173	1942.46″	$\frac{s-b}{2}=8'5.62''$
43.505	0.0109869	2266.21″	$\frac{s-c}{2}=5'23.75''$

2.5″，就可以把三角形看成是平面的。

为了得出当 $R\to\infty$ 时，正弦定律和余弦定律的极限形式，用收敛级数展开三角函数。用记号$\frac{\bar{a}}{R}=q_a$，$\frac{\bar{b}}{R}=q_b$，$\frac{\bar{c}}{R}=q_c$，得到 $\sin q_a=q_a-\frac{q_a^3}{3!}+\cdots=q_a\left[1-\frac{q_a^2}{6}+\delta_1\right]$ 和 $\cos q_a=1-\frac{q_a^2}{2!}+\delta_2$，这里 δ_1 和 δ_2 是具有阶 $\frac{1}{R^4}$ 的无穷小量。由球面三角学的正弦定律给出：

$$\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=\bar{a}\left[1-\frac{q_a^2}{6}+\delta_1\right]:\bar{b}\left[1-\frac{q_b^2}{6}+\delta_3\right]:\bar{c}\left[1-\frac{q_c^2}{6}+\delta_5\right],$$

因此在极限情况就有 $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=\bar{a}:\bar{b}:\bar{c}$。这就是平面三角学中的正弦定律。类似地从球面三角的余弦定律可以得到平面三角的余弦定律：

从 $\cos q_a=\cos q_b\cos q_c+\sin q_b\sin q_c\cos\alpha$ 得到

$$\left[1-\frac{q_a^2}{2}+\delta_2\right]=\left[1-\frac{q_b^2}{2}+\delta_4\right]\left[1-\frac{q_c^2}{2}+\delta_6\right]$$
$$+q_bq_c\cos\alpha\left[1-\frac{q_b^2}{6}+\delta_3\right]\left[1-\frac{q_c^2}{6}+\delta_5\right],$$
$$-\frac{1}{2}q_a^2+\delta_2=-\frac{1}{2}(q_b^2+q_c^2)-\delta_{4,6}$$
$$+q_bq_c\cos\alpha[1-(q_b^2+q_c^2)/6+\delta_{3,5}],$$

于是
$$\bar{a}^2=\bar{b}^2+\bar{c}^2-2\bar{b}\bar{c}\cos\alpha。$$

欧拉球面三角形中的一般关系　因为在欧拉三角形中的角和边都不大于 π（或 180°），因而自变量由正切、余切和余弦函数所唯一确定；而在另一方面，由正弦函数给出两个值。如果自变量有两个可能值，那末就要用不等式从理论上可能的值中选出几何上正确的解来。

1. *在欧拉三角形中，角度之和在 π 和 3π 之间，而边的和在 0 到 2π*

之间：

$$\pi<\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}<3\pi \quad 和 \quad 0<\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}<2\pi$$

或者　$$180°<\alpha+\beta+\gamma<540° \quad 和 \quad 0°<a+b+c<360°。$$

2．较长的边所对的角也较大。

如果设 $a>b$，则根据耐普尔公式 4c) $\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)=\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$，以及 $\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)>0$，又因在欧拉三角形中有 $\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ 和 $\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)>0$，也就得到 $\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)>0$，而这意味着 $(\alpha-\beta)>0$ 或者说 $\alpha>\beta$。

3．两边之和大于第三边，两边之差小于第三边。

每一个球面三角形对应着一个三面角。当两边之和等于第三边时，退化为平面圆扇形，如果两边之和小于第三边则在空间是不可能的。如果在两条边 a 和 b 之间的差大于或者等于第三边 c，即 $a-b\geqslant c$，则将会得到 $a\geqslant b+c$，而这与定理的第一部分相矛盾。

4．两角之和小于第三角加 π（或 180°）。

正如刚才已经说明的那样，在极三角形 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 中：

$$\bar{a}+\bar{b}>\bar{c} \quad 和 \quad \bar{a}-\bar{b}<\bar{c}。$$

因为 $\bar{a}=180°-\alpha$，$\bar{b}=180°-\beta$，$\bar{c}=180°-\gamma$，对三角形 ABC 这就意味着：

$$180°-\alpha+180°-\beta>180°-\gamma \quad 和 \quad 180°-\alpha-180°+\beta<180°-\gamma,$$

即　$$180°+\gamma>\alpha+\beta, \quad 和 \quad \beta+\gamma<180°+\alpha。$$

5．如果两边之和大于（或小于）两个直角，那末两个对角之和大于（或小于）两个直角。

在耐普尔公式 3c) 中 $\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)=\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$，设 $a+b>\pi$，故 $\cos\frac{a+b}{2}<0$，因在欧拉三角形中，$\cos\frac{\gamma}{2}$ 和 $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ 必须是正的，这就得到 $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$，即意味着 $\frac{\alpha+\beta}{2}>\frac{\pi}{2}$，或者 $\alpha+\beta>\pi$，类似地能从 $a+b<\pi$ 得到 $\alpha+\beta<\pi$ 以及从 $a+b=\pi$ 可得出 $\alpha+\beta=\pi$。

基本问题 1a　在球面三角形 ABC 中给定三条边 a, b, c，而需要求出

三个角 α, β, γ, 每两边之和必须大于第三边，而所有三条边之和必须小于 360°。用边的余弦定律 $\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$ 就可求得其解(见图 12.2-5); 或者用半角公式 $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$, 其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$ 也可求得其解。通过字母轮换可以得到有关 $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 或者 $\tan\frac{\beta}{2}$ 和 $\tan\frac{\gamma}{2}$ 的公式。

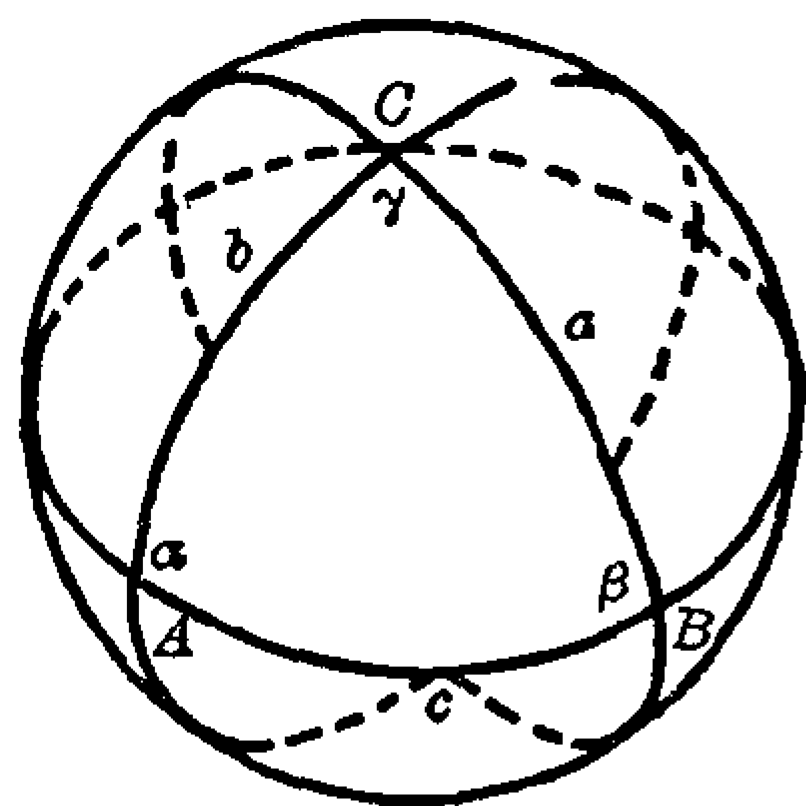


图 12.2-5 给出三条边，或三个角求解球面三角形

基本问题 1b 在球面三角形 ABC 中给出三个角 α, β, γ, 并满足两角之和小于第三角加 180°, 以及所有三角之和在 180° 和 540° 之间，则边的计算既可以用角的余弦定律:

$$\cos a=\frac{\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}, \cdots$$

来计算，也可以用半边公式:

$$2\sigma=\alpha+\beta+\gamma,\ \tan\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\alpha\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}, \cdots$$

来计算。

基本问题 2a 如果在球面三角形 ABC 中给出两边和夹角，例如 b, c 和 α, 则用边的余弦定律就可求得第三边 a:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha,$$

用这一条边的值，然后应用正弦定律就可得到其余的角 β 和 γ:

$$\sin\beta=\frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a} \quad 和 \quad \sin\gamma=\frac{\sin c\sin\alpha}{\sin a},$$

每一个正弦函数将得到两个互为补角的自变量。然而，应用较长的边所对的角也较大的定理，根据边 b 大于或小于边 a, 就能说明角 β 大于或小于角 α, 然后对应于问题给出的值就能唯一地确定角 β 了。类似地按照 $c\gtrless a$, 可以选择角 γ, 使得 $\gamma\gtrless\alpha$ 满足，这里上面两个不等号或者下面两个不等号必须同时适合。为了便于对数计算，可以利用耐普尔公式。从 3a) 和 4a) 得到:

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}=\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{b-c}{2}\right)\Big/\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)$$

和　　$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2}=\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{b-c}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)。$$

从这两个式子可以算出角 $\frac{\beta+\gamma}{2}$ 和 $\frac{\beta-\gamma}{2}$，从而得到角 β 和 γ。余下的边 a，由正弦定律 $\sin a=\frac{\sin\alpha\sin b}{\sin\beta}$ 给出；按照 α 是大于或者小于 γ，从反正弦函数的两个值 a 中，选出大于或者小于 c 的一个值 a。

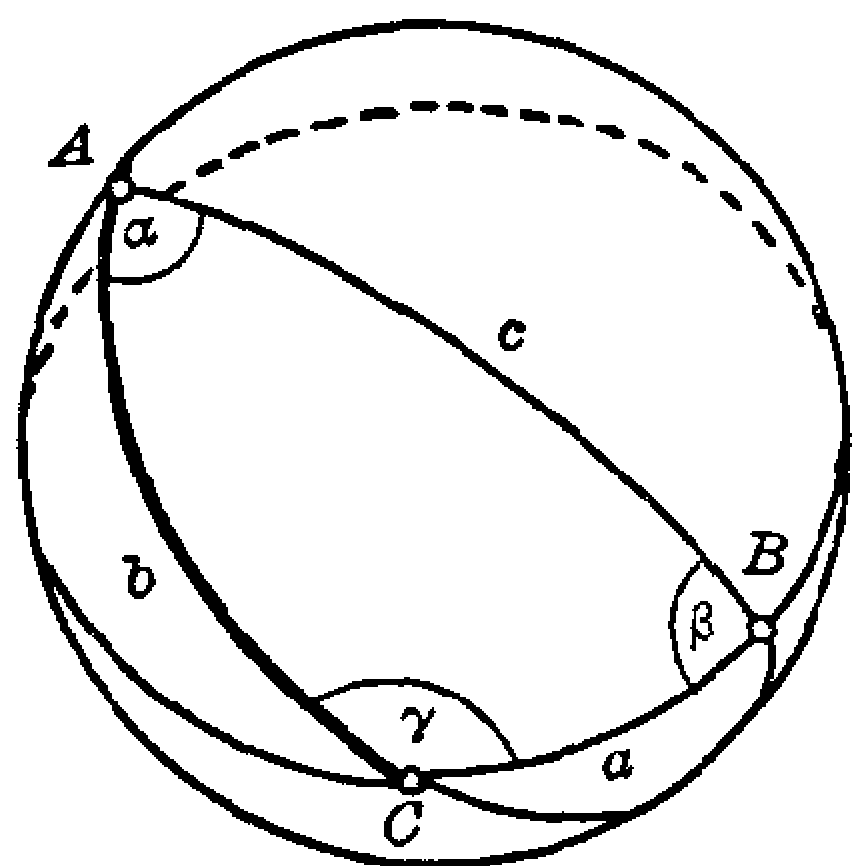


图 12.2-6　已知 $a=52.5°$，$b=107.8°$ 和 $\gamma=141.5°$，解球面三角形

【例】　给出 $a=52.5°$；$b=107.8°$；$\gamma=141.5°$（见图 12.2-6）。

由耐普尔公式 3c）和 4c）：

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a-b}{2}\Big/\cos\frac{a+b}{2},$$

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2}\Big/\sin\frac{a+b}{2}.$$

	lg sin	lg cot	lg cos
$^1/_2(a-b)=-27.65°$	9.6666 n		9.9473
$a-b=-55.3°$			
$b=107.8°$			
$a=52.5°$			
$a+b=160.3°$			
$^1/_2(a+b)=80.15°$	9.9936		9.2331
	9.6730 n		0.7142
$1/2\gamma=70.75°$		9.5431	
	lg tan		lg tan
$^1/_2(\alpha-\beta)=-9.34°$	9.2161 n		
$^1/_2(\alpha+\beta)=61.06°$			0.2573
$\alpha=51.72°$			
$\beta=70.40°$			
$\gamma=141.5°$			
$\alpha+\beta+\gamma=263.62°$			
$\varepsilon=83.62°$			

$\sin c=\sin\gamma\sin a/\sin\alpha$

$\lg\sin\gamma=$	9.7941
$\lg\sin a=$	9.8995
	9.6936
$\lg\sin\alpha=$	9.8948
$\lg\sin c=$	9.7988

$c_1=38.99°$

$c_2=141.01°$

$\alpha<\gamma\to a<c$

解：$c_2=141.01°$

基本问题 2b　现在给出球面三角形的两个角和一条夹边，例如给出 β，γ 和 a，因此这个问题也可通过极三角形变换归结为基本问题 2a。所以把公式汇集在一起就够了：

I．由角的余弦定律给出角 α：$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$；而由正弦定律给出 b 和 c：$\sin b=\frac{\sin\beta\sin a}{\sin\alpha}$，$\sin c=\frac{\sin\gamma\sin a}{\sin\alpha}$，其中按照 $\beta\gtrless\alpha$ 而有 $b\gtrless a$，按照 $\gamma\gtrless\alpha$ 而有 $c\gtrless a$。

$$\tan\frac{b}{2}=\tan\frac{c-a}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\Big/\sin\frac{\gamma-\alpha}{2},$$

$$\cot\frac{\beta}{2}=\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{c+a}{2}\Big/\sin\frac{c-a}{2}。$$

唯一地给出了边 b 和角 β 的值。

根据关系式 $\sin\alpha=\sin a\sin\gamma/\sin c$ 就能对可能的情况进行分析讨论，并且此过程与平面三角学中的过程相类似(见图 12.2-8)。

I. $(\sin a\sin\gamma/\sin c)>1$，因此 $\sin\alpha>1$；无实数解。

II. $(\sin a\sin\gamma/\sin c)=1$，因此 $\sin\alpha=1$，$\alpha=\frac{\pi}{2}$；有一个解，例如三角形 A_3BC。

III. $\sin\alpha=(\sin a\sin\gamma/\sin c)<1$。

III(1). $\sin a<\sin c\to\sin\alpha<\sin\gamma$；有一个解，这是因为对每一组给定的三个值$(a_i, c_i, \gamma_i)$，$i=1, 2$，按照 $a\gtrless c$ 就决定了 $\alpha\gtrless\gamma$，所以 α 的值是唯一地确定的(图 12.2-8)。

III(2) $\sin a=\sin c\to\sin\alpha=\sin\gamma$；有一个解[参看 III(1)]。

III(3) $\sin a>\sin c\to\sin\alpha>\sin\gamma$；有两个解。或者由 $a>c\to\alpha>\gamma$，即由 $c=c_1$(锐角)$\to\gamma=\gamma_1$(锐角)，从而 α_1 和 $\alpha_2=180°-\alpha$ 都是解；或者由 $a<c\to\alpha<\gamma$，即由 $c=c_2$(钝角)$\to\gamma=\gamma_2$(钝角)，从而 α_1 和 $\alpha_2=180°-\alpha_1$ 也都是解(见图 12.2-8)。

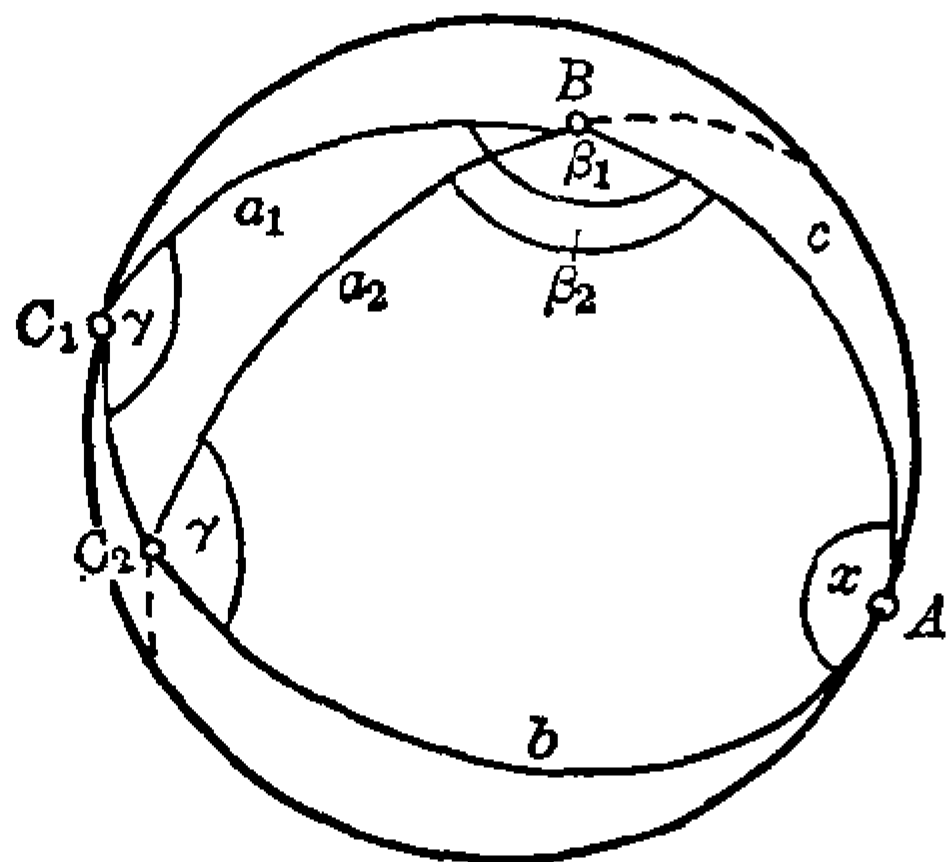


图 12.2-9 $c=96.5°$, $\alpha=101.2°$, $\gamma=102.1°$，求解球面三角形

基本问题 3b 给出两个角和其中一个角的对边，例如给出 α, γ 和 c，而要求解球面三角形 ABC，这是上面一个问题的对偶命题，因而可以导出相对应的各种情况。故不需要进一步讨论，而只要给出计算方法就已足够：

1. $\sin a=\sin\alpha\sin c/\sin\gamma$;

2. $\tan\left(\frac{b}{2}\right)=\tan\left(\frac{c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)$;

3. $\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)=\tan\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{c+a}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)$。

【例】

给出$c=96.5°$; $\alpha=101.2°$; $\gamma=102.1°$; 求a, b, β(见图12.2-9)。

1.

$\sin a=\sin\alpha\sin c/\sin\gamma$

$\lg\sin\alpha=9.9916$
$+\lg\sin c=9.9972$
9.9888
$-\lg\sin\gamma=9.9902$
$\lg\sin a=9.9986$

$a_1=85.40°$, $a_2=94.60°$

因为$\sin\alpha>\sin\gamma$, 对$\alpha<\gamma$应用III(3)的情况, 因此有两个解.

1a)

90.95°	$(c+a)/2$	95.55°
48.25°	$c/2$	48.25°
42.70°	$a/2$	47.30°
5.55°	$(c-a)/2$	0.95°
101.65°	$(\gamma+\alpha)/2$	101.65°
51.05°	$\gamma/2$	51.05°
50.60°	$\gamma/2$	50.60°
0.45°	$(\gamma-\alpha)/2$	0.45°

2.

8.9876	$\lg\tan[(c-a)/2]$	8.2196
+9.9910	$\lg\sin[(\gamma+\alpha)/2]$	+9.9910
8.9786		8.2106
−7.8951	$\lg\sin[(\gamma-\alpha)/2]$	−7.8951
1.0835	$\lg\tan(b/2)$	0.3155
85.28°	$b/2$	64.19°
170.56°	b	128.38°

3.

7.8951	$\lg\tan[(\gamma-\alpha)/2]$	7.8951
+9.9999	$\lg\sin[(c+a)/2]$	+9.9980
7.8950		7.8931
−8.9855	$\lg\sin[(c-a)/2]$	−8.2196
8.9095	$\lg\cot(\beta/2)$	9.6735
85.34°	$\beta/2$	64.75°
170.68°	β	129.50°

直角球面三角形

与平面三角学的处理过程类似，球面三角中有关直角三角形的计算也能简化。直角球面三角形的极三角形是“直边”球面三角形,在此三角形中有一个顶点在另一个顶点的极线上。然而直边球面三角形是极少使用的,因而不需特别讨论。

耐普尔法则 在球面三角形ABC中，设角γ为90°，而边c是斜边(见图12.2-10)。因为$\sin 90°=1$以及$\cos 90°=0$,因此一般球面三角形的定理简化成下面形式:

正弦定律: $\sin a=\sin\alpha\sin c/\sin 90°$,

1. $\sin a=\sin\alpha\sin c$, (1) $\boldsymbol{\cos(90°-a)=\sin\alpha\sin c}$,

2. $\sin b=\sin\beta\sin c$, (2) $\boldsymbol{\cos(90°-b)=\sin\beta\sin c}$。

边的余弦定律: $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos 90°$,

3. $\cos c=\cos a\cos b$, (3) $\boldsymbol{\cos c=\sin(90°-a)\sin(90°-b)}$。

角的余弦定律: $\cos\alpha=-\cos\beta\cos 90°+\sin\beta\sin 90°\cos a$,

4. $\cos\alpha=\sin\beta\cos a$, (4) $\boldsymbol{\cos\alpha=\sin(90°-a)\sin\beta}$,

5. $\cos\beta=-\cos 90°\cos\alpha+\sin 90°\sin\alpha\cos b$,

$\cos\beta=\sin\alpha\cos b$, (5) $\boldsymbol{\cos\beta=\sin(90°-b)\sin\alpha}$。

从这五个关系式可进一步求得:

6. 由4.: $\cos a=\cot\alpha\cdot\sin\alpha/\sin\beta$　和

　　5.: $\cos b=\cot\beta\cdot\sin\beta/\sin\alpha$,

再由3得到: $\cos c=\cot\alpha\cot\beta$, (6) $\mathbf{\cos c=\cot\alpha\cot\beta}$,

7. 由1.: $\sin\alpha=\sin a/\sin c$　和　3.: $\cos b=\cos c/\cos a$,

再由5得到: $\cos\beta=\tan a\cot c$, (7) $\mathbf{\cos\beta=\cot(90^\circ-a)\cos c}$,

8. 由2.: $\sin\beta=\sin b/\sin c$　和　3.: $\cos a=\cos c/\cos b$,

再由4得到: $\cos\alpha=\tan b\cot c$, (8) $\mathbf{\cos\alpha=\cot(90^\circ-b)\cot c}$,

9. 由5.: $\sin a=\cos\beta/\cos b$　和　2.: $\sin c=\sin b/\sin\beta$,

再由1得到: $\sin a=\tan b\cot\beta$,

(9) $\mathbf{\cos(90^\circ-a)=\cot(90^\circ-b)\cot\beta}$,

10. 由4.: $\sin\beta=\cos\alpha/\cos a$　和　1.: $\sin c=\sin a/\sin\alpha$,

再由2得到: $\sin b=\tan b\cot\alpha$,

(10) $\mathbf{\cos(90^\circ-b)=\cot(90^\circ-a)\cot\alpha}$。

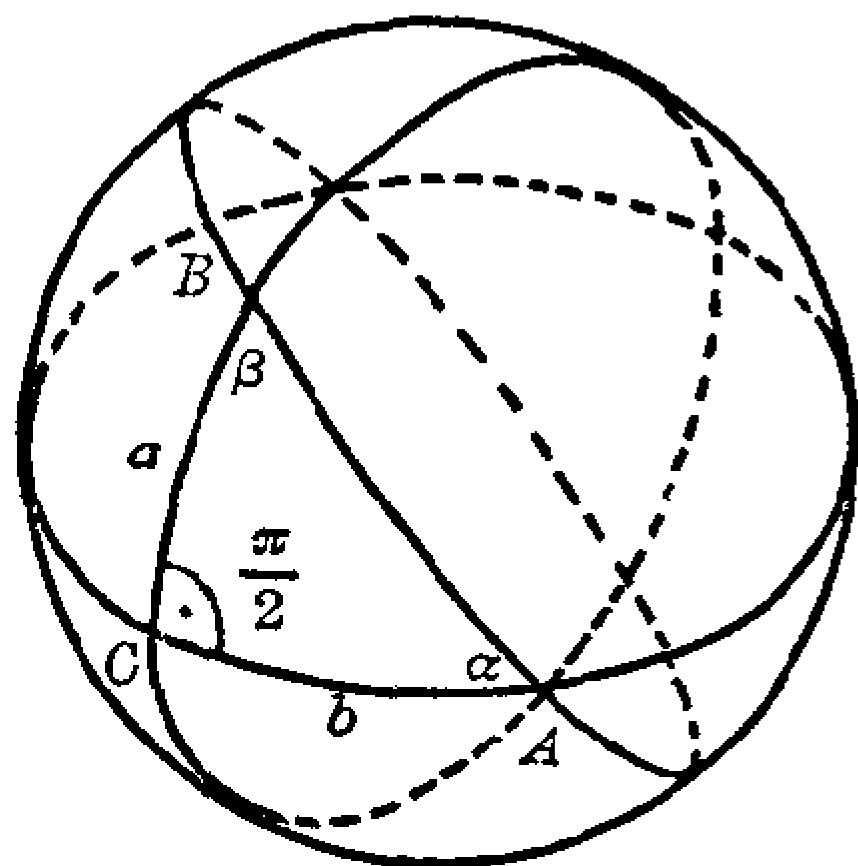


图 12.2-10　直角球面三角形 ABC

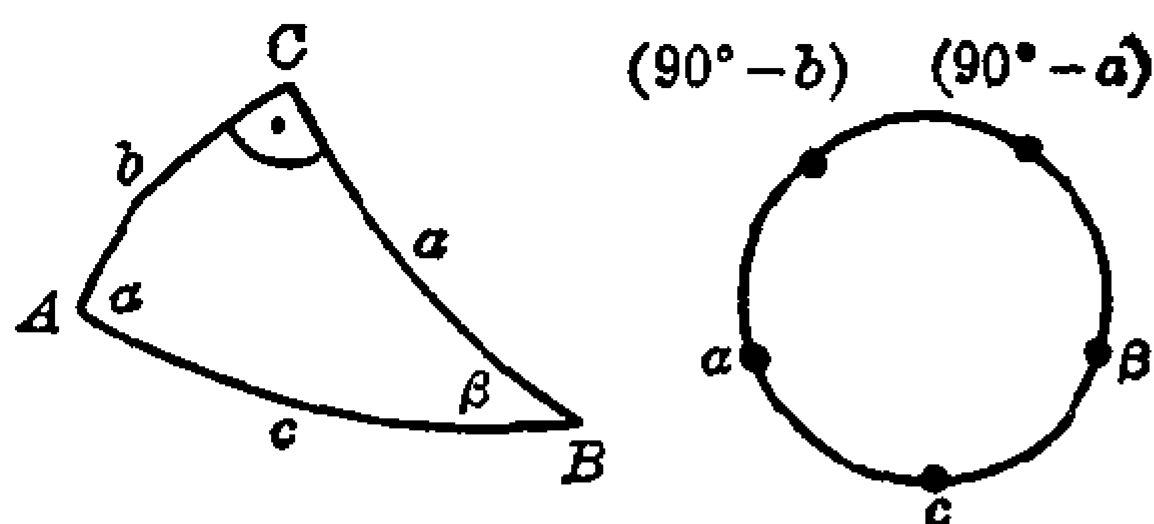


图 12.2-11　耐普尔法则中各分量的位置

耐普尔把(1)到(10)这些关系式按照以他的名字命名的法则汇总起来。为了便于熟记这些法则，可设想一个以γ为直角的球面三角形，但直角不予考虑，而把剩下来的两个角、斜边和夹着这个直角的两边称为球面三角形的轮换分量。这五个分量β, c, α, $(90^\circ-b)$, $(90^\circ-a)$，可按它们在三角形中自然出现的顺序排在一个圆周上(见图12.2-11)。如果选中了其中的任一分量，那末在它两旁的两个分量就叫做相邻分量，而留下来的两个分量就叫做相对分量。于是耐普尔法则可用下面的话来表示:

耐普尔法则　在直角球面三角形中，任一分量的余弦等于其相邻分量余切之积，也等于其相对分量正弦之积。

把耐普尔法则应用到欧拉三角形中时除了正弦函数的自变量给出两个值外，所有其他的三角函数的自变量都只唯一地给出一个值。而从欧拉三角形中的一般关系，可以区分是否存在一个解还是存在两个解。

【例】 如果给出 $a=38.4°$，$\alpha=42.9°$（见图 12.2-12），那末能得到两个解。从 $\sin b=\cot\alpha\tan a$，就能得到两个值 b_1 和 $b_2=180°-b_1$，而从 $\cos\alpha=\cos a\sin\beta$，也能得到 β 的两个值，我们能从 $\cos\beta=\sin\alpha\cos b$ 求得 β 的两个值。最后，从 $\cos\alpha=\cot c\tan b$ 能够确定斜边 c。

$$
\begin{array}{rl}
\lg\cot\alpha= & 0.0319\\
\lg\tan a= & 9.8990\\
\hline
\lg\sin b= & 9.9309\\
b_1= & 58.52°\\
b_2= & 121.48°\\
\lg\cos\alpha= & 9.8648\\
\lg\cot b_{1,2}= & 9.7870\\
\hline
\lg\cot c= & 9.6518\\
c_1= & 65.85°\\
c_2= & 114.15°
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\lg\cos\alpha= & 9.8648\\
\lg\cos a= & 9.8941\\
\hline
\lg\sin\beta= & 9.9707\\
\beta_1= & 69.2°\\
\beta_2= & 110.8°
\end{array}
$$

高。借助于耐普尔法则的帮助，能够计算出球面三角形的高。高是沿着过顶点并且垂直于对边的大圆进行度量的。高给出了顶点和边之间的球面距离。任一球面三角形被高分成两个直角球面三角形，因此能够用耐普尔法则来求解。用这个方法，一般而言，能够避免使用耐普尔公

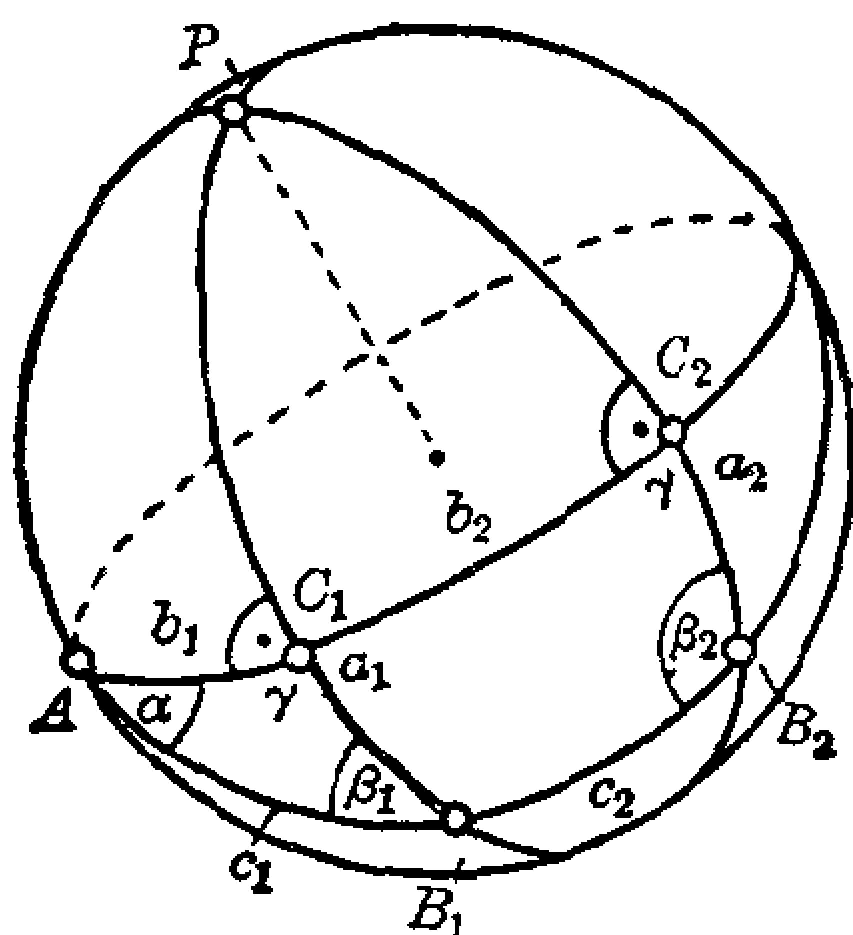


图 12.2-12 给出直角的一条邻边 a 和它的对角 α，求解直角球面三角形

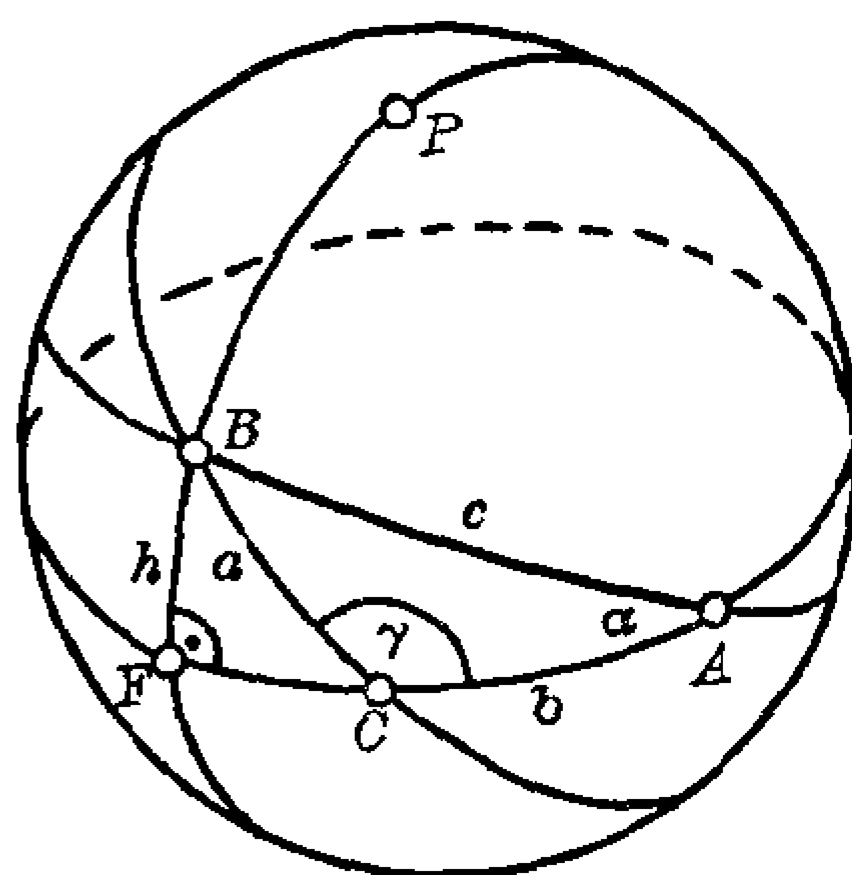


图 12.2-13 给出两条边 $a=42.7°$，$c=84°$ 和一个对角 $\gamma=135°$，求解球面三角形 ABC

式，而且在应用中高常常有它的直接意义。例如在下面例子中，通过 A, C, F 的大圆是地球的赤道，而 B 是船的位置，则 h 是这个位置的地理纬度。或者假定 B 代表地球的北极，而一架飞机或者一艘轮船沿着过 A 和 C 的大圆运动；那末 h 就是北极和这个大圆的最短距离，而边 $\widehat{CF}$ 是 C 点到与北极有最短距离的点的航线。

【例】 在球面三角形 ABC 中，边 $c=84°$, $a=42.7°$ 和角 $\gamma=135°$ (见图 12.2-13)，因为角 γ 是钝角，所以到边 b 的高在三角形外面。由正弦定律 $\sin\alpha=\sin\gamma\sin a/\sin c$，得到 α 的两个值 α_1 和 α_2。因为短边所对的角较小，所以只有 α_1 才可能是解。

$$\lg\sin\gamma=9.8495$$
$$\lg\sin a=9.8313$$
$$\overline{\qquad 9.6808}$$
$$\lg\sin c=9.9976$$
$$\overline{\lg\sin\alpha=9.6832}$$
$$\alpha_1=28.83°$$
$$\alpha_2=151.17°$$

在直角三角形 ABF 和 CBF 中，给出斜边和一个角；由耐普尔法则得到：

1.
$$\cos\alpha=\cot c\tan\widehat{AF} \text{ 和}$$
$$\tan\widehat{AF}=\cos\alpha\tan c$$
$$\lg\cos\alpha=9.9425$$
$$\lg\tan c=0.9784$$
$$\overline{\lg\tan\widehat{AF}=0.9209}$$
$$\widehat{AF}=83.16°$$

2.
$$\cos(180°-\gamma)=\cot\alpha\tan\widehat{CF}$$
$$\tan\widehat{CF}=\cos(180°-\gamma)\tan a$$
$$\lg\cos(180°-\gamma)=9.8495$$
$$\lg\tan a=9.9651$$
$$\overline{\lg\tan\widehat{CF}=9.8146}$$
$$\widehat{CF}=33.12°$$

于是，边 b 的大小是 $\widehat{AF}-\widehat{CF}=50.04°$。

把正弦定律用到三角形 ABC 中去，由 $\sin\beta=\dfrac{\sin b\sin\gamma}{\sin c}$ 给出角 β。因为 β 必须小于 γ，因此只有 $\beta_1=33.02°$ 才是唯一解。

$$\begin{aligned}\lg\sin b&=9.8845\\ \lg\sin\gamma&=9.8495\\ \hline &\ \ 9.7340\\ \lg\sin c&=9.9976\\ \hline \lg\sin\beta&=9.7364\\ \beta_1&=33.02°\\ \beta_2&=146.98°\end{aligned}$$

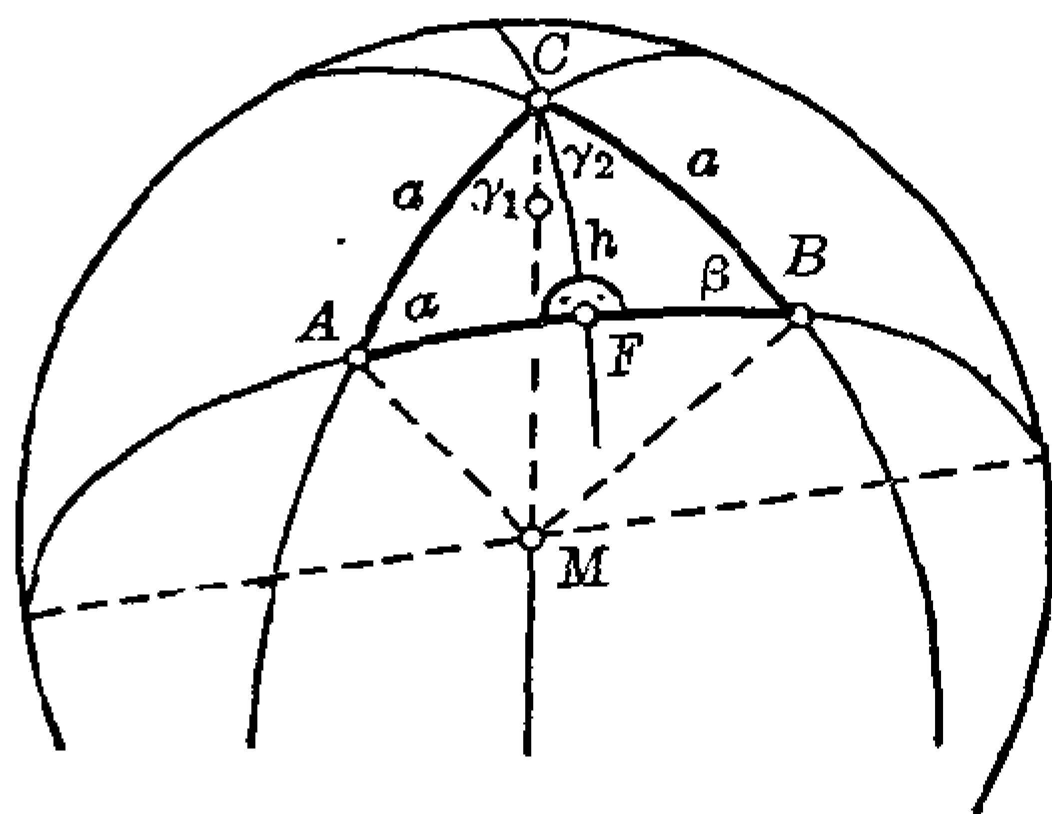


图 12.2-14 等腰球面三角形

等腰球面三角形 如果球面三角形 ABC 的两条边相等，例如 $a=b$，那末这个三角形就是等腰球面三角形。设 F 是高 h 到第三边的垂足(见图 12.2-14)，那末把耐普尔法则用到有边 b 和角 α 的直角三角形 AFC 中，计算高 h 所得之值必定和有边 a 和角 β 的直角三角形 BFC 中计算得到的高 h 有相同之值；因为 $a=b$，因此得到 $\alpha=\beta$。再由 $a=b$ 和 $\alpha=\beta$，然后得到 $\widehat{AF}$ 和 $\widehat{BF}$ 有相同之值，即 $\gamma_1=\gamma_2$。这样，在平面几何中所知道的关系在这里也同样适合：

在等腰球面三角形中，底边上的高平分底边和它所对的角。这条高还是底边的垂直平分线和三角形的对称轴。三角形的底角互相相等。

与此对应的定理同样适用于有两个等角的球面三角形。这样的三角形也是等腰的。

12.3 球面三角学的应用

在球面三角学的应用中，因为它们有两项在实践上的重要性而特别引人注目。这就是数学地理学和天文学的应用。

数学地理学

事实上，地球的形状是不规则的，因而被称为地球体。然而对地球某一部分的偏差进行数学计算说明此偏差相对于它们的大小来说是很小的。对人造地球卫星轨道的分析表明，一个适当的三轴椭球体是对地球

体的最好逼近。事实上，位于赤道平面上的两个轴之间的差是如此之小，以致至今还未能由地球测量所确定。按照高级大地测量学，地球可看作一个扁球体（旋转椭球体）。由弗里德里希·威尔海姆·贝塞尔（Friedrich Wilhelm Bessel，1784～1846年）作出了第一个精确计算。在1924年，由海福特(J. Hayford，1868～1925年)计算出来的椭球体得到国际上的承认。最新的值是由克拉索夫斯基(F. N. Krasovskii，1878～1948年）所给出；这些值用于苏联的大地测量工作中。

地球椭球体	赤道半径 a		极半径 b		扁率 $\left(\frac{a-b}{a}\right)$
	公里	英里	公里	英里	
海福特	6378.388	3964.194	6356.912	3950.846	$\frac{1}{297}$
克拉索夫斯基	6378.245	3964.105	6356.863	3950.816	$\frac{1}{298.3}$

在一次近似中，地球可以看作一个平均半径 $R=6371.221$ 公里[$\lg R=3.8042227$]或者 $R=3959.740$ 英里的球。

在地球球面上的测量单位

大圆上的1°……………………………111.20 公里≙69.111 英里

赤道上的1°……………………………111.32 公里≙69.186 英里

1 大地英里＝赤道上1°的 $\frac{1}{15}$ …………7.422 公里≙4.613 英里

子午线上一个象限的弧长 …… 10002.288 公里≙6216.462 英里

子午线上1度的平均弧长……………111.137 公里≙69.072 英里

1 海里或者经度圆上一分的平均长度 ………………… 1.852 公里

1 节＝1 海里/小时 ………………………………… 1.852 公里/时

正如在 **I.** 第11章中导出高斯-克吕格坐标时已经说明过的那样，在地球表面上一点的位置由它的经度 λ 和它的纬度 φ 所确定。子午线是大圆，但纬圆不是大圆；它们的半径 ρ 由 $\rho=R\cos\varphi$ 给出。在地球表面上的距离沿着大圆测量，这是因为大圆是测地线并且表示球面上的最短距离。**方位**（或者航向）是某一方向与子午线所成的角度。

距离和航向的决定　如果由经度 λ_1，λ_2 和纬度 φ_1，φ_2 给出地球上两

个地点 P_1 和 P_2 的位置，那末就能够计算这两点之间的大圆距离以及这个大圆和分别过 P_1，P_2 的子午线之间的两个夹角。为了求解这个问题可以利用在基本问题中导得的公式和耐普尔法则。

【例】 如果一架飞机以空中速度 800 公里/时 ≙ 492.7 英里/时，从列宁格勒（$\varphi_L=59.9°$ 北；$\lambda_L=30.3°$ 东 $=-30.3°$）沿着最短航线飞到旧金山（$\varphi_F=37.8°$ 北；$\lambda_F=122.4°$），那末它的航线就是过 L 和 F 的大圆弧 $\widehat{LF}$（见图 12.3-1）。在过这两地的子午线上，从赤道到这一地方的弧长就是地理纬度。从这个地方到北极 N 的子午线弧长就是 $(90°-\varphi)$。这样两条弧 $\widehat{LN}=90°-\varphi_L$，$\widehat{FN}=90°-\varphi_F$ 和大圆弧 $\widehat{LF}$ 一起形成了一个球面三角形，在此三角形中，两条子午线之间的夹角 $\Delta\lambda$ 是已知的：$\Delta\lambda=\lambda_F-\lambda_L=122.4°+30.3°=152.7°$。这样，在球面三角形中已知两边和夹角，可用边的余弦定理求得大圆弧 $g=\widehat{LF}$：

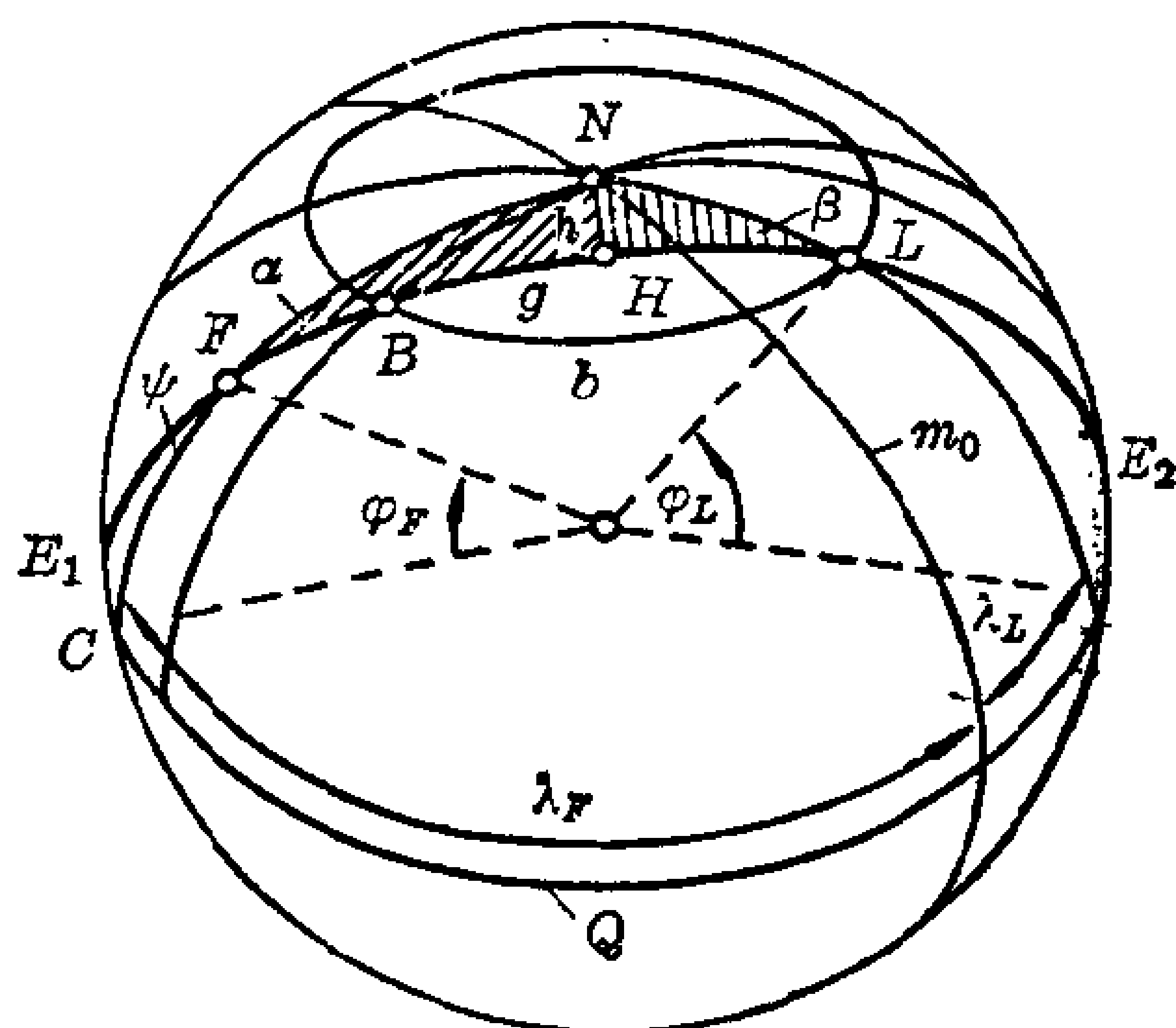


图 12.3-1 从列宁格勒到旧金山的飞行航线（示意图）

$$\cos g=\cos(90°-\varphi_L)\cos(90°-\varphi_F)+\sin(90°-\varphi_L)\sin(90°-\varphi_F)\cos\Delta\lambda,$$

$$\cos g=\sin\varphi_L\sin\varphi_F+\cos\varphi_L\cos\varphi_F\cos\Delta\lambda。$$

$\lg\sin\varphi_L=9.9371$	$\lg\cos\varphi_L=9.7003$
$\lg\sin\varphi_F=9.7874$	$\lg\cos\varphi_F=9.8977$
$\lg u=9.7245$	$\lg\cos\Delta\lambda=9.9487n$
$u=0.5304$	$\lg v=9.5467n$
$+v=-0.3522$	$v=-0.3522$

$$\cos g=u+v=+0.1782$$

$$g=79.74°$$

$$\lg 2\pi = 0.7982$$
$$\lg R = 3.80422$$
$$\lg g = 1.9017$$
$$\overline{}$$
$$6.5041$$
$$\lg 360^\circ = 2.5563$$
$$\lg \bar{g} = 3.9478$$
$$\bar{g} = 8868 \text{ 公里} \triangleq 5511.5 \text{ 英里}$$

这条弧的长度是 $\bar{g}=2\pi Rg/360^\circ=8868$ 公里，其中 R 取其近似值 6371 公里（3960 英里），因此按给定的速度大约在 11 小时（11.08 小时）内飞过这段路程。

在球面三角形中的角 α 和角 β 由正弦定律给出。于是就求得飞机离开苏联的列宁格勒的航向是北 21.61° 西，而到达美国旧金山的航向是南 13.52° 西。每一条子午线与飞行航线的交角都不相同。航向角从开始时的北 21.61° 西不断地增加到最后的航向角南 13.52° 西，一共增加了 144.87°。在飞行航线的某一点 H 处，飞机飞向正西方，这就是飞行航线离开北极的最近点，而点 H 就是从北极到边 $\widehat{LF}$ 的垂线 h 的垂足。高 h 把三角形 LNF 分成两个直角三角形。在三角形 LNH 中能够确定从北极作出的高 h 和角 $\lambda_1=\measuredangle LNH$。在子午线 $\lambda_H=40.78^\circ$ 西上，飞机正好飞向正西；并且在这个离开北极最近的位置处，它与北极相距 1183 公里。以后飞机在 B 点穿过列宁格勒纬圈时的角度和它在列宁格勒时的角度一样；因此在这一点飞机的航向是南 21.61° 西。点 B 的

$$\sin\alpha = \cos\varphi_L \sin\Delta\lambda / \sin g$$
$$\sin\beta = \cos\varphi_F \sin\Delta\lambda / \sin g$$

$\lg\sin\beta=$	$\uparrow 9.5662 \to \beta = 21.61^\circ$
$\lg\cos\varphi_F=$	9.8977
$\lg\sin\Delta\lambda=9.6615$, $\lg\sin g=9.9930$	$\to 9.6685$
$\lg\cos\varphi_L=$	9.7003
$\lg\sin\alpha=$	$\downarrow 9.3688 \to \alpha = 13.52^\circ$

子午线由 $\lambda_B=\lambda_H+\lambda_F=40.78°+71.08°=111.86°$ 西给出；这样，点 B 的地理坐标就是 $\varphi_B=59.9°$ 北和 $\lambda_B=111.86°$ 西。弧 $\widehat{BH}=\widehat{LH}$ 可按耐普尔定律从直角三角形 LNH 中求得：

$$\cos(90°-\varphi_L)=\cot\lambda_1\cot\beta,\ \cot\lambda_1=\tan\beta\sin\varphi_L$$

$$\cos(90°-h)=\sin(90°-\varphi_L)\sin\beta,\ \sin h=\cos\varphi_L\sin\beta$$

$$\begin{array}{rl} \lg\tan\beta= & 9.5978 \\ \lg\sin\varphi_L= & 9.9371 \\ \hline \lg\cot\lambda_1= & 9.5349 \\ \lambda_1= & 71.08° \\ -\lambda_L= & -30.3° \\ \hline \lambda_H= & 40.78°\ \text{西} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} \lg\sin\beta= & 9.5662 \\ \lg\cos\varphi_L= & 9.7003 \\ \hline \lg\sin h= & 9.2665 \\ h= & 10.64° \\ \lg 2\pi R= & 4.6024 \\ -\lg 360°= & 2.5563 \\ \hline & 2.0461 \\ \lg h= & 1.0269 \\ \hline \lg\bar{h}= & 3.0730 \end{array}$$

$$\cos\beta=\tan\widehat{LH}\tan\varphi_L$$

$$\tan\widehat{LH}=\cot\varphi_L\cos\beta$$

$$\begin{array}{rl} \lg\cot\varphi_L= & 9.7632 \\ \lg\cos\beta= & 9.9684 \\ \hline \lg\tan\widehat{LH}= & 9.7316 \\ \widehat{LH}= & 28.33° \\ \lg(2\pi R/360°)= & 2.0461 \\ \lg\widehat{LH}= & 1.4522 \\ \hline & 3.4983 \end{array}$$

$\bar{h}=1183$ 公里 ≈735 英里； $\widehat{LH}=3150$ 公里 ≈1958 英里

只是在点 B，即飞机飞过了一段距离为 $\widehat{LB}=6300$ 公里的路程后，或者说在飞过 7 小时 52 分 30 秒（7.875 小时）后，飞机才第一次转向更南的纬度。当然，飞机也可以沿着通过列宁格勒的纬圈 $\varphi=59.9°$ 北而飞到 B 点，而这条航线将跟所有的子午线垂直。然而，从 L 到 B 的这条航线

b，因为它不是沿着测地线走的（最短的连线是大圆），而是沿着斜航线走的（方向不变的曲线），因此就变得更长。这个纬圈的半径是 $\rho = R\cos\varphi_L$，弧 b 在这个圆中所对的圆心角是 $\Delta\lambda$，因而这样就有 $\bar{b} = 2\pi R\cos\varphi_L \cdot \frac{\Delta\lambda}{360°}$，就得到 $\bar{b} = 8516$ 公里（5293 英里），而不是沿着测地线所得到的值 6300 公里（3915 英里），其差值为 2216 公里（1337 英里）。这样飞机若是沿着纬圈飞的话，大约要多飞 2 小时 45 分钟。

一个物体以人造卫星的速度 $v = 8$ 公里/秒（4.97 英里/秒）通过同样的航线，如果忽略摩擦力，那末对弧 $\widehat{LB}$ 而言，需要化费 787.5 秒，或者说 13 分 7.5 秒，而在 1108.5 秒或者说 18 分 28.5 秒钟后到达旧金山。这条航线与赤道 Q 相交于两点 E_1 和 E_2，由于这是两个大圆的交点，因而位于球的一条直径的两端。如果过旧金山的子午线与赤道 Q 的交点用 C 表示，那末球面三角形 E_1CF 在 C 点是一个直角。在这个球面三角形中，已知角 $\psi = 13.52°$ 和边 $\widehat{CF} = \varphi_F$，于是用耐普尔法则可以求得边 $\widehat{CE_1}$。于是点 E_1 的坐标是 $\varphi_{E_1} = 0$，$\lambda_{E_1} = \lambda_F + 8.39° = 130.79°$ 西，相应地 E_2 的坐标是 $\varphi_{E_2} = 0$，$\lambda_{E_2} = (130.79° + 180°)$ 西 $= 310.79°$ 西或者 $\lambda_{E_2} = 49.21°$ 东。

$$\lg(2\pi R/360°) = 2.0461$$
$$\lg\cos\varphi_L = 9.7003$$
$$\lg\Delta L = 2.1838$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\lg\bar{b} = 3.9302$$
$$\bar{b} = 8516\text{ 公里}$$
$$\approx 5293\text{ 英里}$$
$$\sin\varphi_F = \cot\alpha\tan\widehat{E_1C}$$
$$\tan\widehat{E_1C} = \tan\alpha\sin\varphi_F$$
$$\lg\tan\alpha = 9.3811$$
$$\lg\sin\varphi_F = 9.7874$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$\lg\tan\widehat{E_1C} = 9.1685$$
$$\widehat{E_1C} = 8.39°$$

斜航线　轮船或者飞机沿着测地线到达它的目的地的优点是所花费

的时间最少，而缺点是在整个航行过程中，严格地说在每一瞬间，都必须改变其航向。与所有子午线相交成同一方位角 α 的曲线叫作斜航线。很明显，纬圈就是方位角为 $\alpha=90°$ 的斜航线，而子午线就是方位角 $\alpha=0°$ 的斜航线。而在一般情况下，对任一角度 α 存在一条方位角为 α 的斜航线，并由超越函数对于此曲线上每一点的纬度 φ 和经度 λ 给出一个关系式。如果考虑在斜航线 l 上的两个相邻点 A 和 B，其坐标为 (λ, φ) 和 $(\lambda+\Delta\lambda, \varphi+\Delta\varphi)$（见图 12.3-2），并设半径为 $\rho=R\cos\varphi$ 的纬圈通过 A 点，那末弧 $\widehat{AC}=R\cos\varphi\Delta\lambda$, $\widehat{CB}=R\Delta\varphi$ 和 $\widehat{AB}=\Delta S$ 形成一个直角三角形 ABC。然而，这并不是一个球面三角形（只有 $R\Delta\varphi$ 是在大圆上），但是，如果 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta\lambda$ 取得足够小，那末可以把它看成是一个平面三角形。于是在这个三角形中可以得到下列关系：

$$\tan\alpha=\Delta\lambda\cos\varphi/\Delta\varphi,\ \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}=\frac{\tan\alpha}{\cos\varphi}\quad 和\quad \Delta s\cos\alpha=R\Delta\varphi,\ \frac{\Delta s}{\Delta\varphi}=\frac{R}{\cos\alpha}。$$

当 $\Delta\varphi\to0$ 时，由这些方程得到两个微分方程 $\frac{d\lambda}{d\varphi}=\frac{\tan\alpha}{\cos\varphi}$ 和 $\frac{ds}{d\varphi}=\frac{R}{\cos\alpha}$，在这两个式子中变量很容易分离。于是用积分法，第一个式子给出斜航线的方程：

$$d\lambda=\tan\alpha\left(\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\right),$$

$$\lambda=\tan\alpha\left[\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)+c\right],$$

$$\lambda_2-\lambda_1=\tan\alpha\left[\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}\right)-\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]。$$

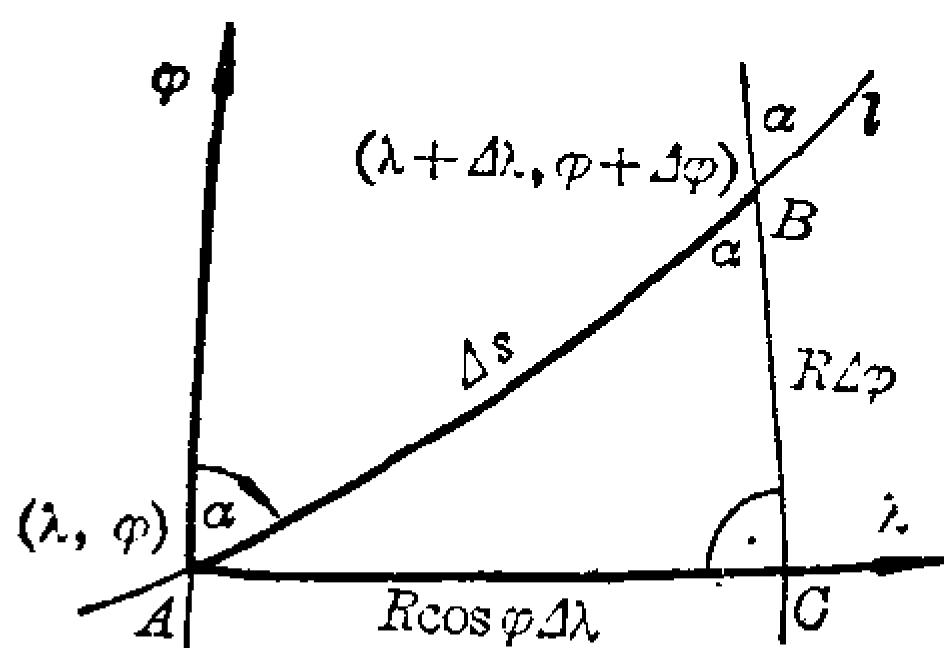


图 12.3-2 斜航线的导出

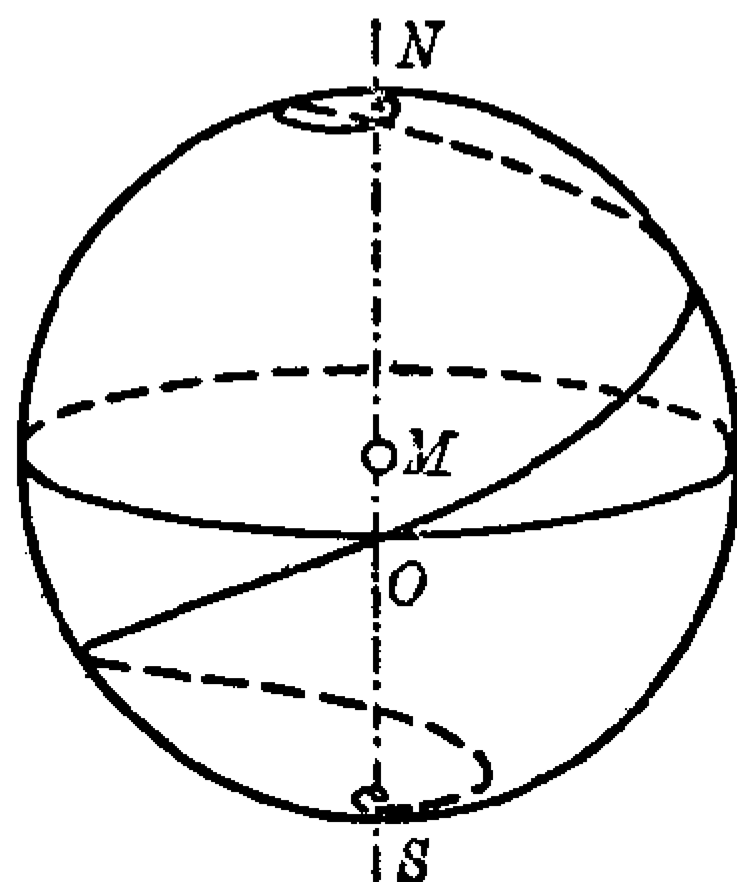


图 12.3-3 斜航线

而第二个式子给出了斜航线的弧长 s:

$$ds=\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)d\varphi,\quad s=\frac{R}{\cos\alpha}(\varphi_2-\varphi_1)。$$

仔细检查第一个方程，它表明斜航线是绕着一个大圆的极环行，这个大圆是一个与起始点处的子午线正交的大圆，并且此斜航线绕着这个极作螺旋形旋转，圈越来越小，无限地接近这个极，但不能达到这个极(渐近点)。在旋转一圈的过程中纬度的变化逐步减小(见图 12.3-3)。

从第二个方程可以得到飞机飞行路线的长度是 $s=\frac{R\varphi}{\cos\alpha}$，其中飞机是从赤道上某地出发，按照与子午线交成航向角 α 的方向飞行，最后到达纬度为 φ 的某地。于是可以知道角 α 越大，飞行长度也越长。例如，为了以不变方位角 $\alpha=60°$ 飞到北极 $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$，那末 $s=\frac{2R\pi}{2}$ $\left(因为 \cos 60°=\frac{1}{2}\right)$，而沿着子午线是最短路程，长度为 $s=\frac{R\pi}{2}$。这样，沿着斜航线的路程就是最短路程的 2 倍。

用定位法确定位置　利用方位，根据接收信号的方向来确定船只、飞机或其他物体的位置，这个沿着直线传播的信号一般不是光学信号。在几何学上，这与平面三角学中的向前截取和向后截取基本上是同一方法。有两种确定方位的办法：其一是，由两个固定的地面站来确定要定位的目标所发出的信号的方向，而从这两个地面站的位置来计算目标的坐标位置；另一方法是，信号是由两个已知的地面站发出，而由目标自己来观察信号的方向并计算其位置。

在实践中，差不多总是使用无线电信号。而在测量学中，重复测量能够增加角度测量的精度，而用最小二乘法能够计算得到最有可能的结果值，只靠单次方位测量的定位法精度较差。由于这个原因，还用到所使用的波的物理性质，例如相干性、振荡，或者使用其他方法，如雷达。首先关心的对象差不多总是运动物体。因此必须用表格、图象或电子仪器来确定位置，使得当定位目标仍然在所要位置的邻域中时，所得到的结果可应用。这样，在实践中定位已成为一个物理和技术问题。因此在这里只描述一下简单的作图过程就足够了。

定位的图解法　为了得到清晰的图示，设基线 b 是 60°，再设在点 B_1 和点 B_2 测得基线 b 跟新点 C 之间的夹角是 β_1 和 β_2，其中 $\beta_1=60°$ 和

$\beta_2=110°$。以这样的方法选择地球的投影平面，使得过 B_1 和 B_2 的大圆其投影仍是一个圆（见图 12.3-4）；并且 $\sphericalangle B_2MB_1=60°$。过 B_1（和它的对径点 B_1'）和所需之点 C 的大圆，其投影是一个椭圆，它的长轴是 $|B_1B_1'|$，而它的短轴则过 M 点并垂直于 B_1B_1'。短半轴的长度是球半径 $R=|MG'|$ 的投影，并且这条半径作为下列两个平面的交线而给出：首先是过 B_1CB_1' 的大圆平面，这个平面与图纸平面 Π 相交成角 β_1，而其次是过 M 点并且与 Π 和 B_1B_1' 垂直的平面。如果 G 是 G' 的投影，那末 $\triangle MG'G$ 是一个直角三角形，它的斜边 $|MG'|=R$ 和角 $G'MG=\beta_1$ 是已知的，这里 MG 与 B_1B_1' 垂直。在图中，这个三角形已被翻折到图纸平面的 $\triangle MGG_0$ 上去了，并且由此给出了短半轴的长 $|MG|$（一般而言 $G_0\neq H_1$）。根据长半轴 MB_1 和短半轴 MG，就能以任意精度来作出椭圆上的每一点（这个椭圆就是过 B_1, G 和 B_1' 的大圆的投影）。对过点 B_2, B_2' 的大圆而言，它所在的平面与图纸平面倾斜成角 β_2，类似的结果同样适合。这样就可得出下列作图过程：在 M 点作垂直于 B_2B_2' 的垂线 MH_1，作出角 β_2，这个角的自由臂与半径为 R 的圆相交于 H_0；从 H_0 作 MH_1（即过 M 点与 B_2B_2' 垂直的垂线）的垂线，相交于 H；那末，$|MH|$ 就给出了所需要的椭圆的短半轴的位置和大小，两个椭圆的交点 C 就是所需要的点。为了确定边 $s_1=\overset{\frown}{B_2C}$ 和 $s_2=\overset{\frown}{B_1C}$ 的真值，只要把它们所在的大圆绕直径转到作图平面就可以了。每一个圆上每一个点的投影在旋转轴的垂线上移动，这样，C 就移到了 C_1 或者 C_2 上，而 $\sphericalangle B_1MC_1=s_2$, $\sphericalangle B_2MC_2=s_1$。

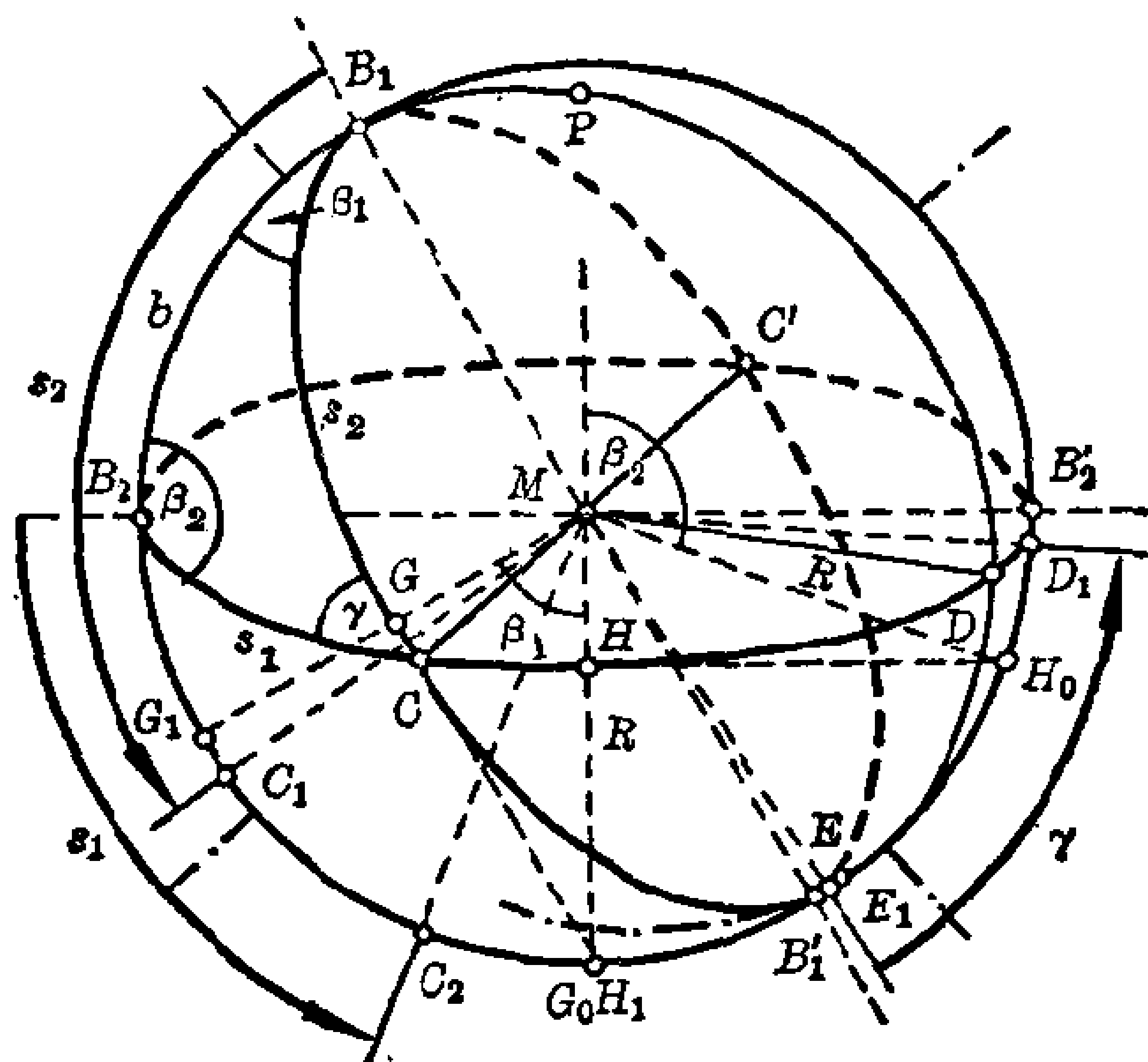


图 12.3-4 定位的图解法

所指出的两个大圆平面之间的倾角 γ 也能从图中求得，这两个平面相交于直线 CMC'。以 C 为极的极圆与这两个大圆都交成直角，并且相交于 D 点和 E 点，弧 $\overset{\frown}{DE}$ 对应于角 γ。把这个极圆绕着直径旋转到作图平面上，就能读出角 γ 的真值：$\sphericalangle E_1MD_1=\gamma$。

球面天文学

除定位法以外，甚至今天还在用星来确定船只和飞机的位置。从前这是在公海中航海的唯一方法。在未知土地上的探险完全靠这种方法:由罗盘、经纬仪、反射镜六分仪或者类似的角度测量仪以及一只精密时钟作出必要的测量。对于近似定向而言，知道最重要星宿的知识就足够了。为了精确地确定位置，必须知道容易定位的星球的位置数据，以及太阳、行星、月亮和木星的卫星的运动数据，并给出天空位置的天文坐标系统，从球面天文学得来的数据对航海是很重要的，因此登载在航海历书和天文历书中;对航海必不可少的天文坐标系是*地平坐标系*和*赤道坐标系*。

与所有的天文坐标系一样，这些坐标系基于下列事实: 即对于一个观察者而言，星空是作为一个叫作天球的巨大球面的一部分出现的。在天球上每一点的位置能用两个数值坐标来确定（与地球表面的经度和纬度相对应)。任何一个大圆与它的极一起（即极和极圆）作为这两个坐标的参考坐标系是适合的。一个角度在大圆上按照前面的意义从一个固定点开始度量；而第二个角度在过要定位的这一点和基圆的极的垂直大圆上进行测量。

地平坐标系　对一个在海上或在平原乡村中的观察者O而言，夜空就象是一个以地平线H为边界的半球(见图12.3-5)。在数学上,(视)*地平*就是在观察点处地球的切平面跟天球相交形成的圆。与绝大多数星球的距离相比，地球的半径小到可以忽略不计。因而视地平与真地平一致，所谓真地平就是过地球中心平行于切平面的一个平面与天球的交线。地平的极是*天顶* Z，它在观察者的垂直上方，而天顶的对径点就是*天底* N_a。对观察者而言，星球的运动似乎是沿着一条轨道运行，这条轨道从地平线开始(称为在A点升起)，再上升到顶，即*上中天*点C，然后再落下去移到地平线上的D点，最后消失在地平线下并通过*下中天*点lC。通过所有星体的中天点的大圆叫作*天球子午圈* m。

也存在这样的星，叫作*拱极星* cS，它的轨道全部在地平线之上。在一天之中，所有的星球在天球上画出一个小圆。它们的轨道相互平行，这些圆的圆心全部位于一条直线上而形成了天球的轴。这条直线跟天球相交于两点，即天球北极P_N和天球南极P_S。星的这种看得到的圆周运动是地球绕着它的轴自转的结果，而天球的极保持不动是因为地球的自转

轴指向这些极的缘故。从观察者到天极的方向跟地球自转轴平行，因此对于在地球北极的观察者来说，这个方向垂直于地平线；而对于在地球赤道上的观察者而言，这个方向是沿着地平线的。如果想象切平面沿着子午线从赤道滑到北极，那末天球北极的纬度就从 0° 稳定地增加到 90°，并且总是等于地理纬度。星球 St 的**地平纬度** h 沿着过天顶和天底的大圆进行测量，这个大圆叫**地平经圈** V，它与地平线垂直；而地平纬度 h 从地平线上的 0° 变化到天顶的 +90° 和天底的 −90°。对天极地平纬度的测量可以给出观察者的地理纬度 φ。过天极的地平经圈与地平线的交点叫作**地平北点** N 和**地平南点** S，它们互为对径点。如果观察者面向北点，那末在其右边跟视线成直角的方向是地平东方 E 而在其左边是地平西方 W。这四个方向就叫作**基本方位**，它们的方向就是天球的北方、南方、东方和西方。过天球北极画一条垂线，或者确定过任一不变的星球中天的地平经圈，由此就能确定这四个基本方位；设有两个地平经圈，某一不变的星在这两个地平经圈上具有同样的地平纬度，那末通过星体中天的地平经圈等分这两个地平经圈之间的夹角。

与地平纬度 h 一起，把**地平经度** a 看作为第二坐标。这个地平经度是在观察者的位置度量的，它就是子午圈和星球 St 的地平经圈平面之间的夹角，这个地平经度从南方的 0°，按照所看到的星球的逐日运动方向，依西、北、东的次序，变化到 360°。结果，地平经度 a 也可以看作为地平线上的一段弧，或者看作在天顶 z 处的一个角。通常也可不去测量地

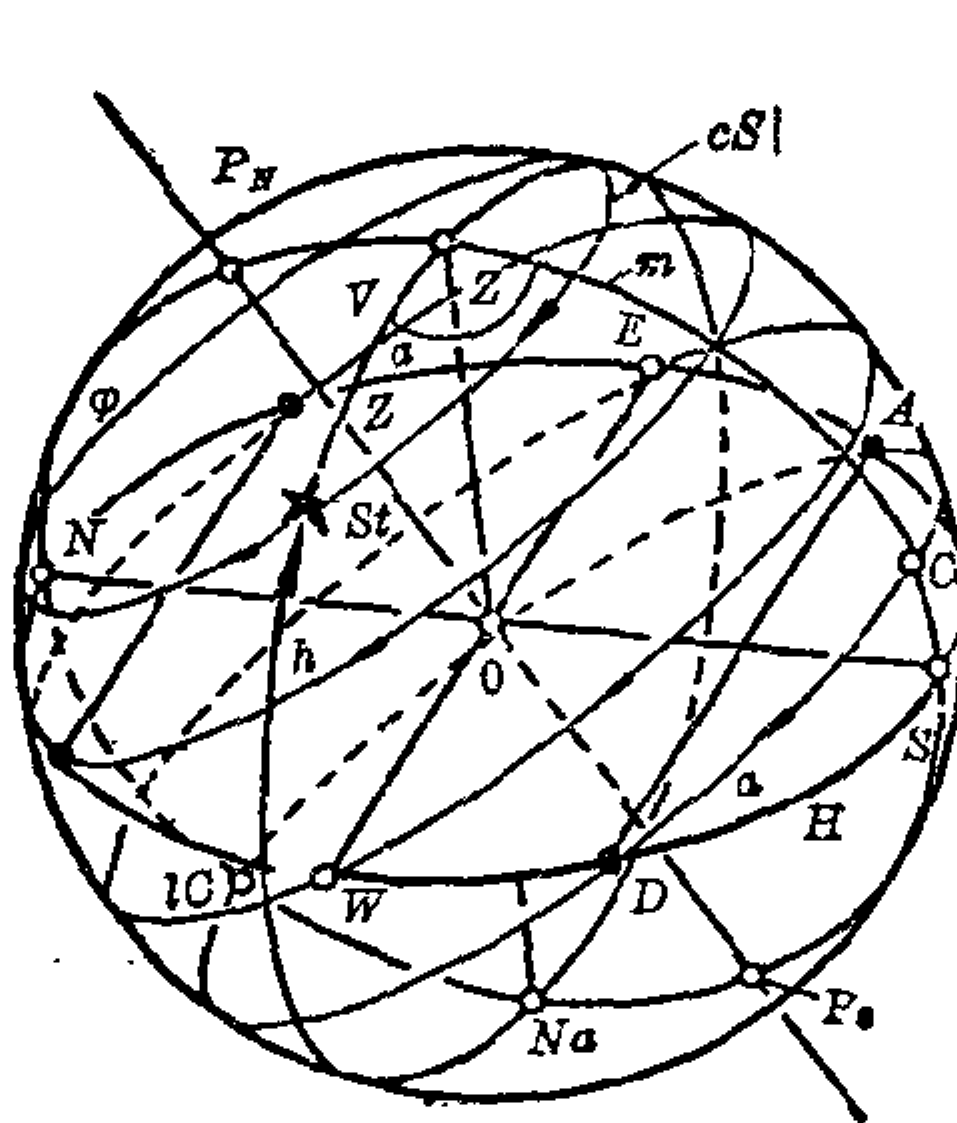


图 12.3-5 地平坐标系

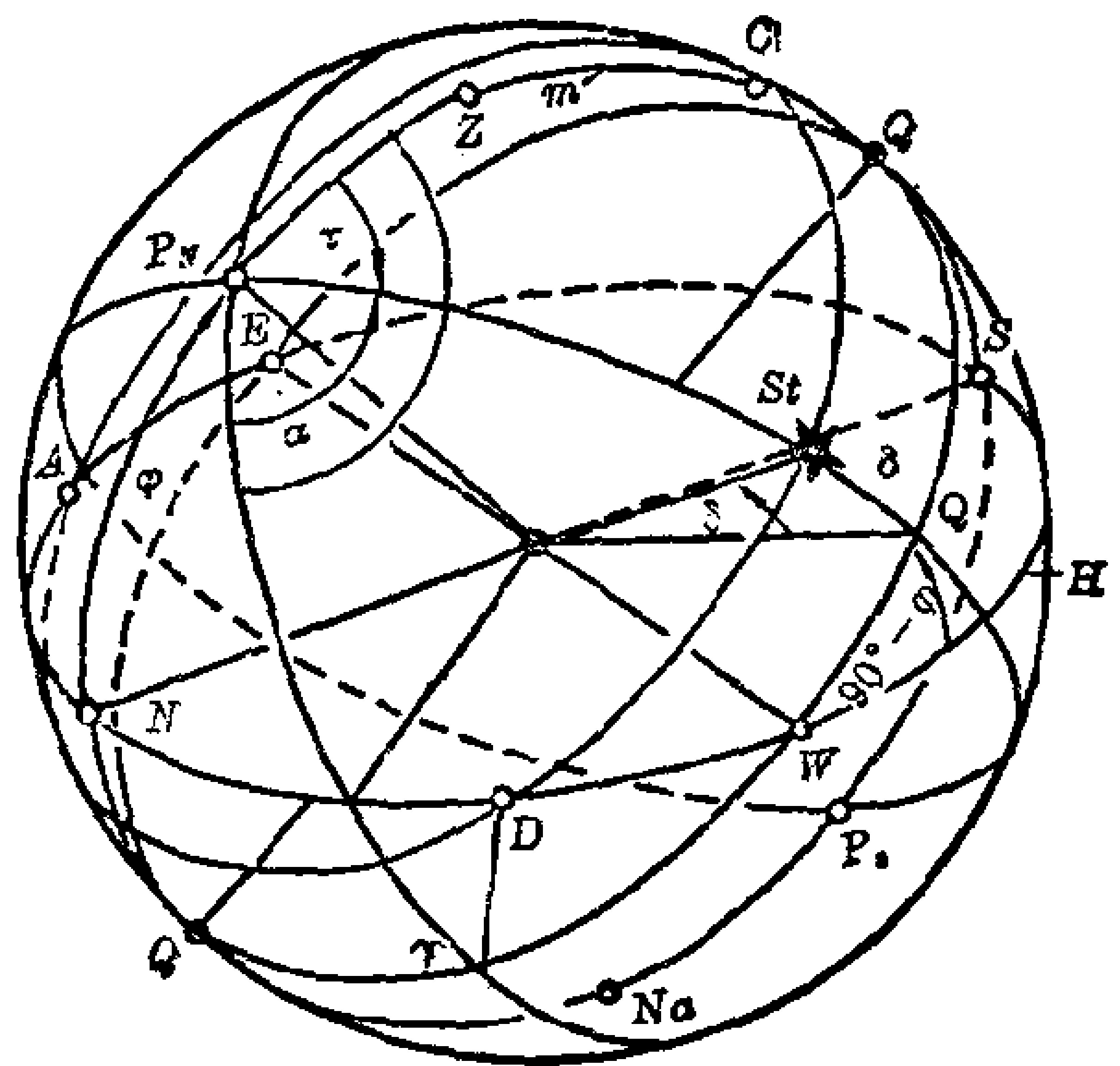


图 12.3-6 赤道坐标系

平纬度 h 而测量它的余角，即星球离开天顶的**天顶距** z: $h+z=90°$。

赤道坐标系　因为所有的星绕着天极在平行圆上运动，因而星与这些圆中的每一个圆的距离都必须保持不变。我们在这些圆中间选择大圆作为参考圆，这个圆的极就是天球的极。因为它就是地球赤道平面与天球的交线，因而叫作**天赤道** Q。在天球面上，天赤道近似地通过双鱼座、猎户座的“腰带”（由三颗明星所形成）中上面的一颗星和天鹰座中的牵牛星。赤道跟地平线相交于地平西点和地平东点(见图 12.3-6)，并且与地平线 H 的倾角是$(90°-\varphi)$。在天赤道上测得的星球 St 的高度(纬度)叫作**赤纬** δ，它是在一个叫作**时圈**的大圆上进行度量的，这个圆过天极 P_N 和 P_S 因此与天赤道垂直。时角 τ 取作第二坐标，这就是时圈与通过星球中天的**天球子午圈** m 之间的夹角。这个子午圈通过地平南点和地平北点、天顶 z 和天底 N_a，还通过天极 P_N 和 P_S，它就是观察者的子午圈平面与天球的交线。从这个子午圈开始按照星球逐日运动的方向到某星球的时圈，所测得的角度就是该星的时角，并且它的取值范围是从 0° 到 360°，或者说从 0^h 到 24^h（即 24 小时）。例如地平西点的时角是 90° 或者 6^h(即 6 小时)。

因为赤纬是以赤道为参考系的，因此这个**第一赤道系统**或者说**时角系统**跟观察者位置的地理纬度无关。然而进行时角度量的零方向是由观察者的子午线所确定的，因而与观察者的地理经度有关。例如，在同一时间同一星球的时角，在莫斯科的时角就比伦敦的要大，这是因为地球旋转的缘故，星球在莫斯科的中天要比在伦敦的中天大约早 2 小时 29.2 分钟。因为 24 小时与 360° 角相对应，因而时角差就是 $149.2°/4=37.3°$。这样，莫斯科的位置要比伦敦的位置更东 $\Delta\lambda=37.3°$。为了使得在赤道系统中的第二个坐标跟观察者的位置无关，在天赤道上选了一个参考点。这一点用 ♈ 来表示，叫做**春分点**(或者叫**白羊宫第一点**)。作为赤道上的一点，它也参加了天球的视运动(旋转)。因此从这一点开始沿着赤道按照与视旋转方向的相反方向而测得的星的时角是一个常数，这个时角就叫**赤经** α。赤经 α 和赤纬 δ 就是**第二赤道系统**(或者叫**赤经系统**)的坐标。把从北极星(P_N)开始通过 W 形状的仙后座右端的时圈延长与天赤道相交就得到春分点的近似位置。

地平坐标系与时角坐标系　如果把两个天文坐标系统结合起来(见图 12.3-7)，那末地平线跟赤道相交于东点和西点。时圈和地平经圈通过

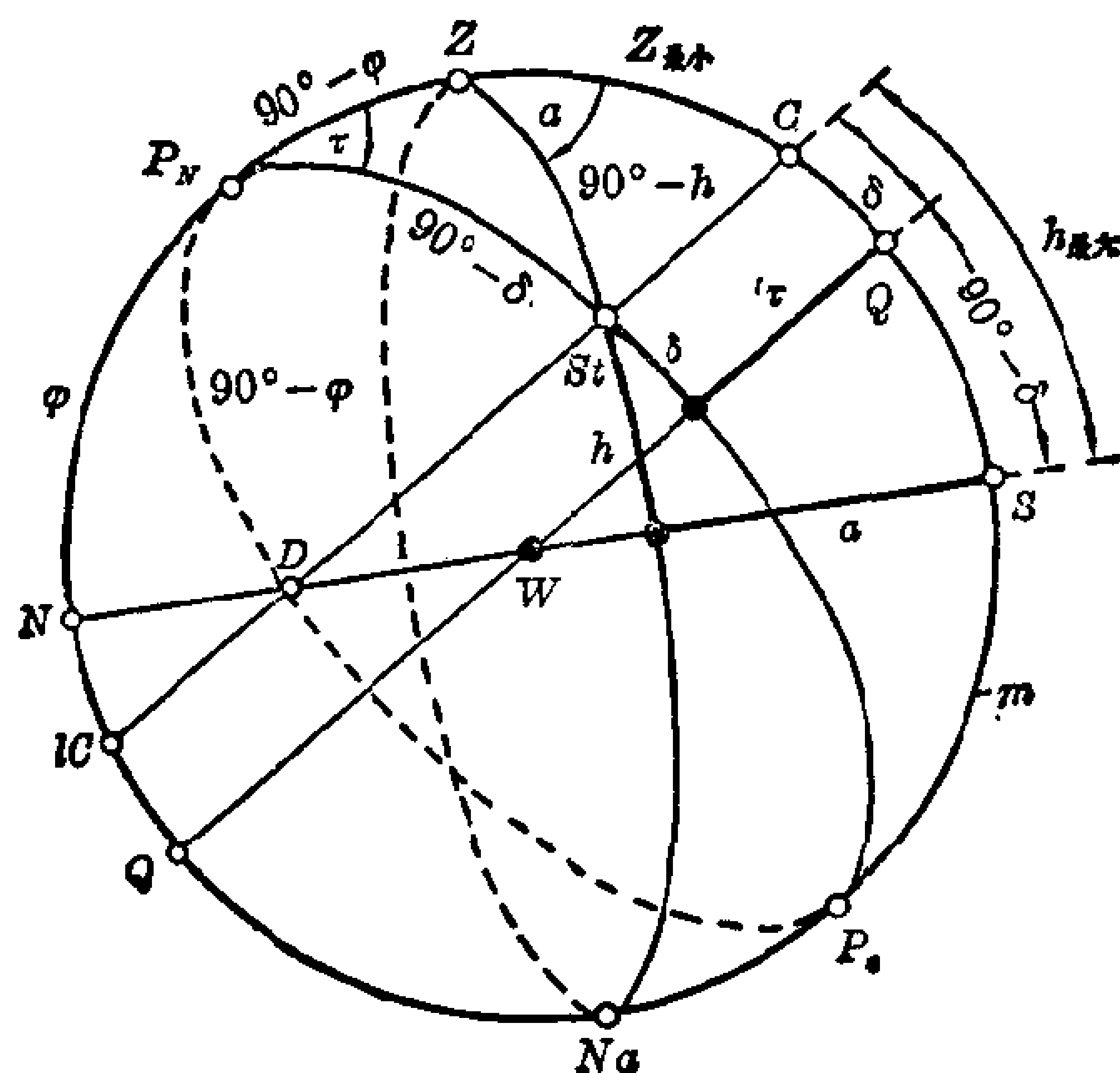


图 12.3-7 地平坐标系和第一赤道坐标系

星球 St。星球的运行轨道平行于天赤道，并且分别在 C 和 lC 达到它的上中天和下中天。而 A 是它的升起点，D 是它的下落点。在地平面上天极 P_N 的地平纬度就是观察者的位置 O 的地理纬度，$\widehat{NP}_N=\varphi$。附图（见图 12.3-7）就是**赤道系统**的图在过 N，P_N，Z，C，Q 和 S 的子午线 m 的平面上的正投影。春分点 ♈ 的时圈没有画出，但是画出了过天顶 Z 和天底 N_a 的星球 St 的地平经圈。点 E 和 A 分别位于点 W 和 D 的后面，因此不能看到。角 φ，$(90°-\varphi)$ 和 δ 以其真实的大小画在图中。

中天地平纬度。如果星球 St 的中天在 C 点，那末这个星球在这一点达到它的最大地平纬度并且同时达到它的最小天顶距 $z_{\min}$。因为赤道 Q 与地平线的交角是 $(90°-\varphi)$，因此得到 $\varphi=\delta+z_{\min}$，而中天地平纬度由 $h_{\max}+z_{\min}=90°$，或者 $h_{\max}=90°-\varphi+\delta$ 所给出。结果根据观察到的一颗星的中天地平纬度 $h_{\max}$，或者由已知的这颗星的赤纬 δ 可以确定地理纬度 φ，或者反过来，由已知的地理纬度 φ 可以确定这颗星的赤纬 δ。

航海三角形。对星球 St 的一般位置而言，用顶点在星球 St、天极 P_N 和天顶 Z 的航海三角形把这两个系统联系在一起。这个三角形有下列元素：边 $\widehat{StZ}=90°-h$（天顶距），$\widehat{StP}_N=90°-\delta$，$\widehat{ZP}_N=90°-\varphi$ 和在顶点 Z 和 P_N 处的角。顶点为 Z 的地平经度 a 和顶点为 P_N 的时角 τ 都是从

子午圈 m 开始按星球逐日旋转的方向进行度量。因为在图 12.3-7 中画出的 St 的位置在它的中天之后，因此在三角形中所示的角其大小是 $\sphericalangle StZP_N=180°-a$ 和 $\sphericalangle ZP_NSt=\tau$。如果把位于子午线平面后面的天球部分画在图中，而星 St 在中天前的位置上，那末用 E 代替 W 而用 A 代替 D，于是在航海三角形中的角将由 $\sphericalangle StZP_N=a-180°$ 和 $\sphericalangle ZP_NSt=360°-\tau$ 所给出。

太阳的轨道　当太阳在春分点时，白天和黑夜一样长；早晨六点钟太阳在东点升起，近似地沿着天赤道穿过天空，而在晚上六点在西点落下。然而，它的赤经 $\alpha\odot$ 和赤纬 $\delta\odot$ 不是一个常数，这是与所有不变的星体不一样的。从十二月二十二日到六月二十二日，赤经稳定地增加而赤纬稳定地减少。因为赤经在增加(见图 12.3-8)，因而太阳以后每天到达天球子午圈的时间要比春分点晚。在一年的过程中，这个时间延迟积累成整整一天。所以春分点和所有不变的星体中天 366 次，而太阳中天的次数只有 365 次。由于太阳赤纬的增加，因此它的日出点 A 和日落点 D 向北移动，移到 A_1 和 D_1。白天变得越来越长，直到夏至为止。这时太阳具有其最大的赤纬 $\delta=23°26'$(这是巨蟹座旋转的圈即北回归线)。在这以后，赤纬逐步减小，到秋分点时赤纬是零，在冬至点时赤纬是 $-23°26'$ (这是摩羯座旋转的圈，即南回归线)，而在春分点赤纬再次回到零。总之在天空中所看到的太阳轨道不是一个圆(这是与其他不变的星体不一样的)，而

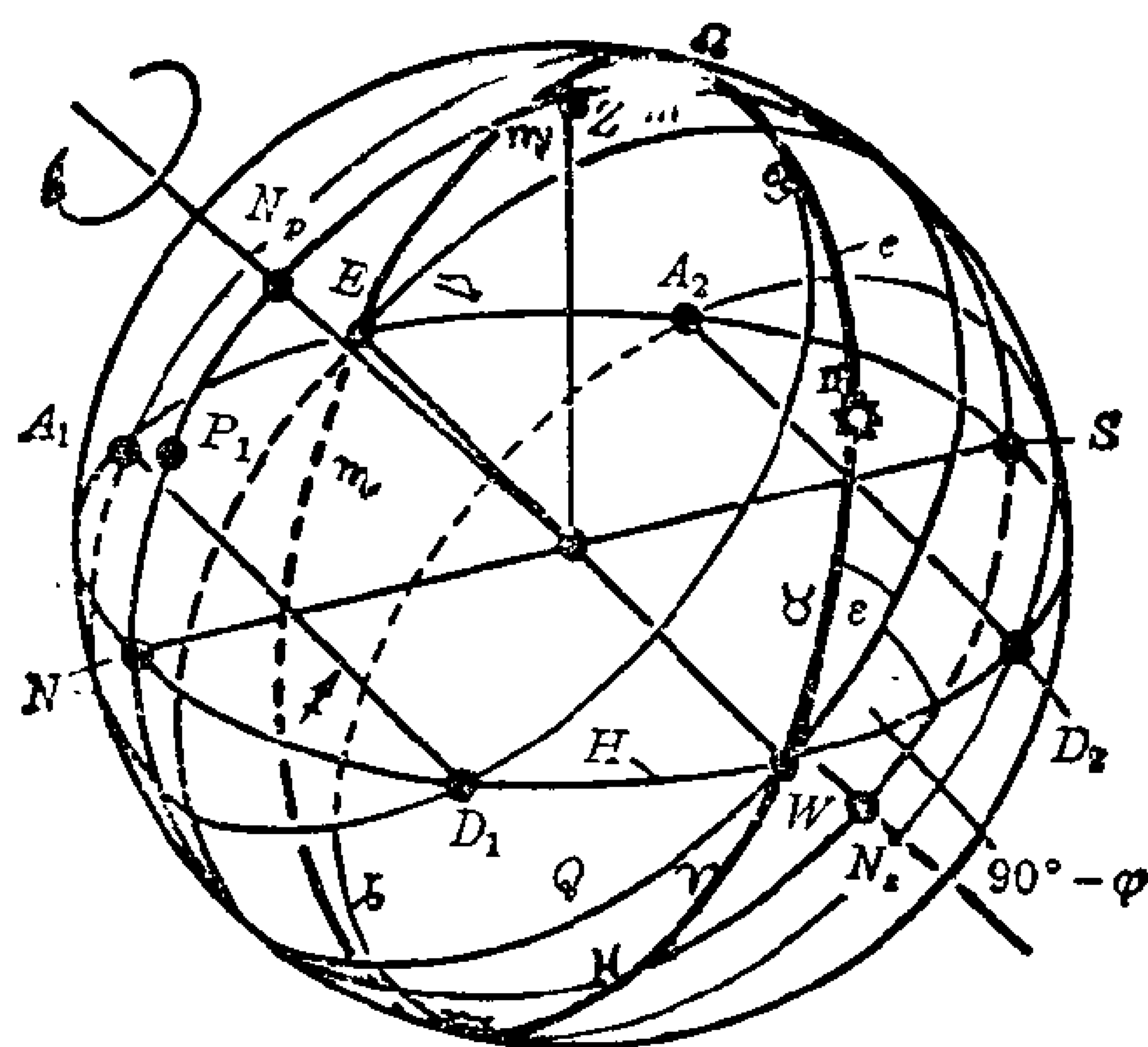


图 12.3-8　太阳的周年视运动

是描述两次的有 365 圈的一条螺旋线，这个螺旋线占据了宽为 $2\cdot 23°26'$ 的一个带域。而每一不变的星，几乎无一例外，在整个一年过程中都有相同的邻星（只有少数情况才有可观的偏离），而太阳却通过了 13 个星座，按十二分法考虑，星座减少到 12 个。这些星座位于一个大圆上，这个大圆在太阳一年的视运动的轨道(叫作黄道)的附近。 这些星座是白羊座♈；金牛座♉；双子座♊；巨蟹座♋；狮子座♌；室女座♍；天秤座♎；天蝎座♏；人马座♐；摩羯座♑；宝瓶座♒和双鱼座♓。黄道与赤道相交于春分点和它的对径点秋分点，交角 $\varepsilon=23°26'$。

太阳沿着黄道的视运动是地球绕太阳运动的结果。这 12 个星座位于地球绕太阳运动的轨道平面上。以黄道作为极圆的坐标系把地球轨道

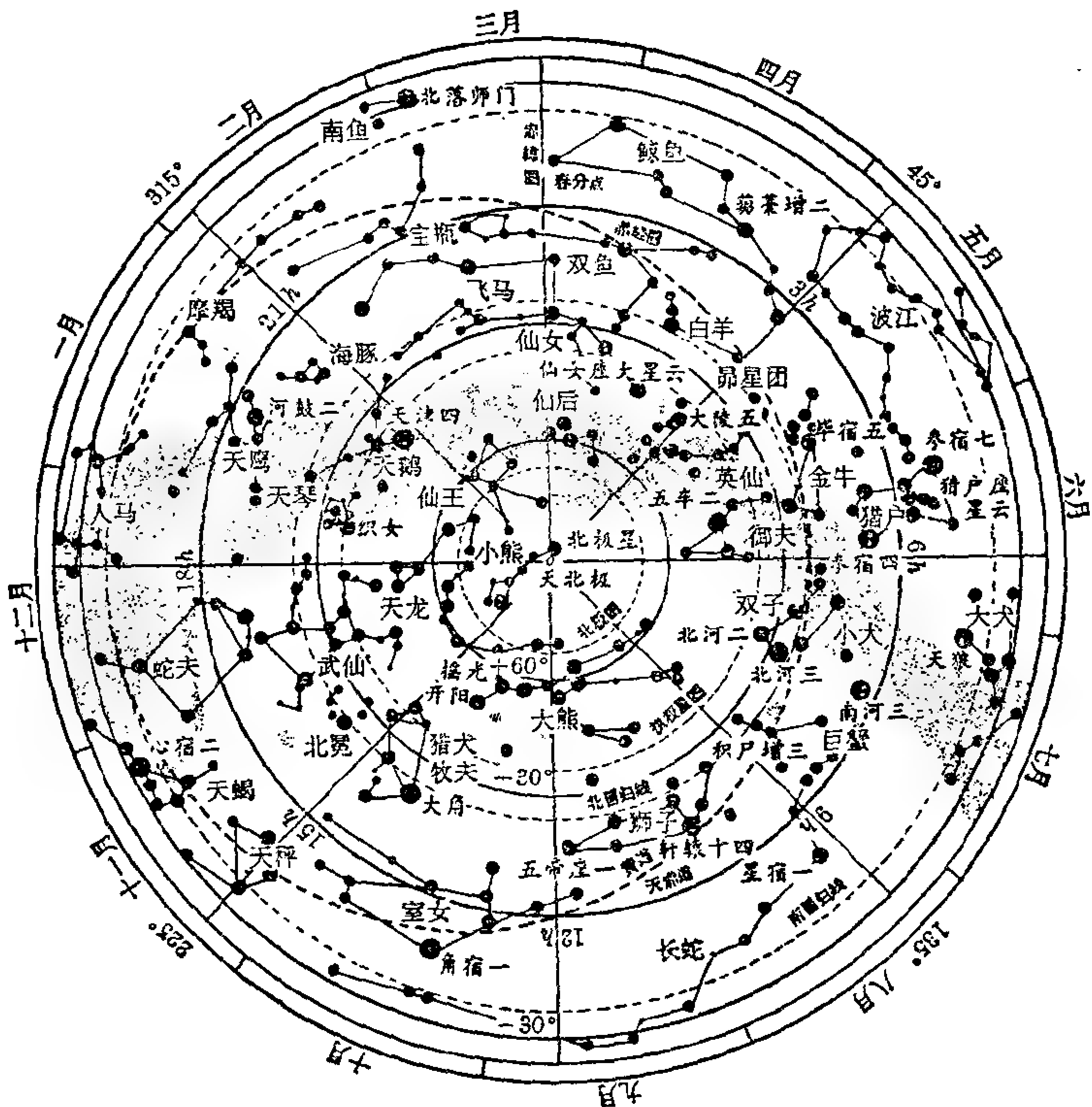


图 12.3-9 北方的天空

平面作为参考平面。银河星系位于一个新的大圆上，这个大圆形成*银河系的参考平面*。这是描述银河系星的分布最适合的坐标系(见图12.3-9)。

时间的计算　时间间隔的度量需要这样一种时钟，这种钟要尽可能保持不变，而且绝大多数由周期过程所控制和校准。*地球绕着它的轴的旋转*已经证明是非常均匀的；一颗不变的星，或者白羊座♈的第一点在天球赤道上的视运动就能看作为是一个非常精确时钟的指针。然而，用石英晶体钟和原子钟进行的观察表明，地球的旋转并不是完全均匀的。因为潮汐摩擦力和地球内部通过质量位移和其他过程所产生的不规则变化，以及在地球表面的气象过程，使得一天的长度发生变化。

根据国际约定，时间计算是根据地球绕太阳旋转（公转）的时间来确定的。*回归年*就是太阳通过白羊座第一点连续两次之间的时间。但是这个周期也是在变化的，只不过变化是非常之小而已（在1000年中只有几秒钟），而且它变化的大小也是已知的。对于给定的时间点选择一个确定的周期是有用的，所选的确定的回归年就叫正常年。根据这种办法定下的时间是为了绝对一致地进行计算，并把这个时间叫作*历书时*，或者牛顿时间，因为在天文学中它是用来计算天体的坐标的。相应地秒(s)是用星历时间1900年1月0日12点钟的回归年的1/31556925.9747来定义的；按照日历，1900年1月0日就是1899年12月31日。

恒星时　白羊座♈第一点连续两次中天之间的时间长度叫作*恒星日*。将它分成24小时*(*恒星时*)，每一小时*再分成60分*(*恒星分*)，每一分*再分成60秒*(*恒星秒*)。恒星日由春分点的中天开始。春分点的时角就是恒星时间，是用时间单位来表示的并且用t_γ的记号来代表。在同一条地球子午线上的所有地方，这个恒星时间都是相同的（叫当地恒星时），越是朝东的地方时间越大，而越是朝西的地方时间就越小。在同一瞬间，从两个地方的当地恒星时t_1和t_2，可以计算得到这两地的经度差$\Delta\lambda=(\lambda_2-\lambda_1)$。由于24小时*的恒星时间差$\Delta t=(t_2-t_1)$对应于经度差$\Delta\lambda=360°$，因此每一恒星时对应于15°，一个恒星分对应于15′，而一个恒星秒对应于15″。反过来，一度的经度差对应于$\frac{24\text{小时}^*}{360}=\frac{1\text{小时}^*}{15}=$ 4分钟*。这样，当春分点在纽约($\lambda_2=73.5$W)中天时，在罗马($\lambda_1=12.3$E)的恒星时已经是$(73.5+12.3)\cdot 4$分钟$^*=85.8\cdot 4$分钟$^*=343.2$分钟*

=5小时* 43.2 分钟*了。

太阳日 因为人们的生活在很大范围内与太阳的运行有关，因此人们不仅把春分点，而且也把太阳用作为时间指示器。对这种用途来说，太阳有本质上的缺点。虽然它相对于赤道位置保持不变，但太阳一年的运行路线是绕着黄道的，并且因为地球在它的开普勒椭圆上围绕着太阳作不均匀的运动，因此它的速度不是常数。由于这个原因，除了真正的太阳之外，引入一个称为**平均太阳**的虚构物体，它的赤经 α_m 在一年之中均匀地从 0° 增加到 360°。这个平均太阳的时角 t_m 确定了**平均太阳时间**，或者简称为**平均时间**，以与确定恒星时间的真实太阳的时角相对照。这两个时间之间的差就叫作**时差**(E. T.)：这样，E. T. = $t_s - t_m$。图 12.3-10 画出了当平均太阳通过中天时，真实太阳的位置。例如，如果时差是负的，那末 $t_m > t_s$，于是平均太阳就跑在真实太阳的前面，而这样当真实太阳还在子午圈的东方时，平均太阳已通过中天了。

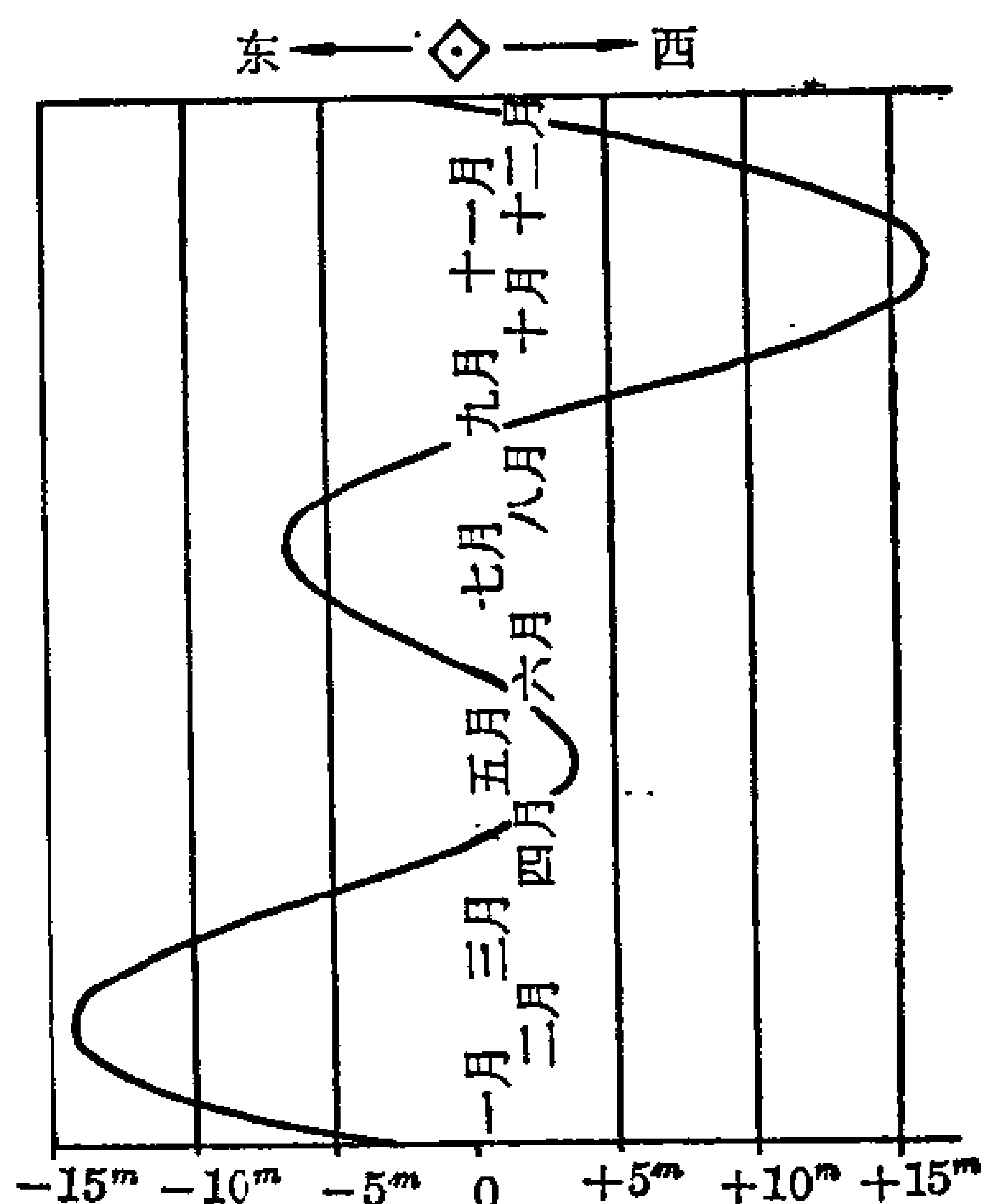


图 12.3-10 在一年中的时差，$t_s - t_m$ = E. T.；◇ 是平均太阳

恒星日的长度跟平均太阳日的长度之比能从下列事实得到：即回归年有 366.2422 个恒星日，但只有 365.2422 个平均太阳日。于是得到：24 小时的平均太阳时间 = 24 小时* 3 分钟* 56.55536 秒*；24 小时* = 23 小时 56 分钟 4.09058 秒的平均太阳时间；1 小时的平均太阳时间 = 1.002737909 小时*；1 小时* = 0.997269567 小时的平均太阳时间。

时区 当然，真实时间和平均时间两者都是**地方时**，而只有在同一条地球子午线上的地方才有相同的地方时。自然界的这一事实对现代化的交通是太不方便了，因此在允许的误差范围内把地球表面分区，这些区以经度为边界，每一时区包括 15° 经度，在一个时区中的所有地方都使用中央经线的地方平均时。格林威治子午线($\lambda = 0$)的地方平均时叫作**世界**

时，或者叫格林威治平均时 (G. M. T.)；经线为 $\lambda=-15^\circ$ 或东经 15° 的地方平均时就是中欧时间(M. E. T.)。

【例 1】 在 11 月 18 日早晨，一条船位于纬度 $\varphi=54^\circ 57'$ 北处，观察到太阳的地平纬度是 $h_s=9^\circ 15'$。船上的精密记时仪给出 G. M. T=8 小时 58 分 20 秒，由航海年历给出 $\delta_s=-19^\circ 12'$ 以及时差 +14 分 50 秒。问这条船位于那条经线上?

在航海三角形天顶 Z-极 P_N-太阳 S 中，已知三条边：$\widehat{ZS}=90^\circ-h=80^\circ 45'$，$\widehat{ZP}_N=90^\circ-\varphi=35^\circ 03'$，$\widehat{SP}_N=90^\circ-\delta=109^\circ 12'$。对时角 t 和 360° 之差 t'，由半角公式给出：

$$\sin\frac{1}{2}t'=\sqrt{\frac{\sin(S-[90^\circ-\varphi])\sin(S-[90^\circ-\delta])}{\sin(90^\circ-\varphi)\sin(90^\circ-\delta)}}。$$

	lg sin
$90^\circ-h=\ 80^\circ 45'$	9.98950
$90^\circ-\varphi=\ 35^\circ 03'$	+8.76015
$90^\circ-\delta=109^\circ 12'$	8.74965
$2s=225^\circ 00'$	−9.75913
$s=112^\circ 30'$	−9.97515
$s-[90^\circ-\varphi]=\ 77^\circ 27'$	9.01537
$s-[90^\circ-\delta]=\ 3^\circ 18'$	9.50768
$t'/2=18^\circ 46' 34''$	
$t'=37^\circ 33' 8''$=2 小时 30 分 13 秒	

这样，观察确定的时间是在真太阳中天前 2 小时 30 分钟 13 秒，也就是在 12 小时 −2 小时 30 分钟 13 秒=9 时 29 分 47 秒。但是地方平均时还要少 14 分 50 秒，或者说地方平均时是 9 时 14 分 57 秒。这个时间和 G. M. T. 之间的差是 9 时 14 分 57 秒−8 时 58 分 20 秒=16 分 37 秒，或者说 $\frac{(16^\circ 37')}{4}=4^\circ 9' 15''$。于是船的位置是东经 $4^\circ 9' 15''$ 和北纬 $54^\circ 57'$。

【例 2】 在赤道北面平静的海面上有一条船只在航行，18 时 50 分 G. M. T. 时在船上测得太阳的地平纬度是 $h_1=21.7^\circ$。从航海年历上得到太阳的赤纬是 $\delta_1=-10.15^\circ$，时差是 E. T.=+15 分 3 秒。在沿着航向为北 67.5° 西的大圆航行了 15.2 海里之后，在船上观察到太阳到了它的中天，这时它的地平纬度是 $h_2=35^\circ$，赤纬是 $\delta_2=-10.21^\circ$ (见图 12.3-11)。问两个观察位置的坐标是什么?

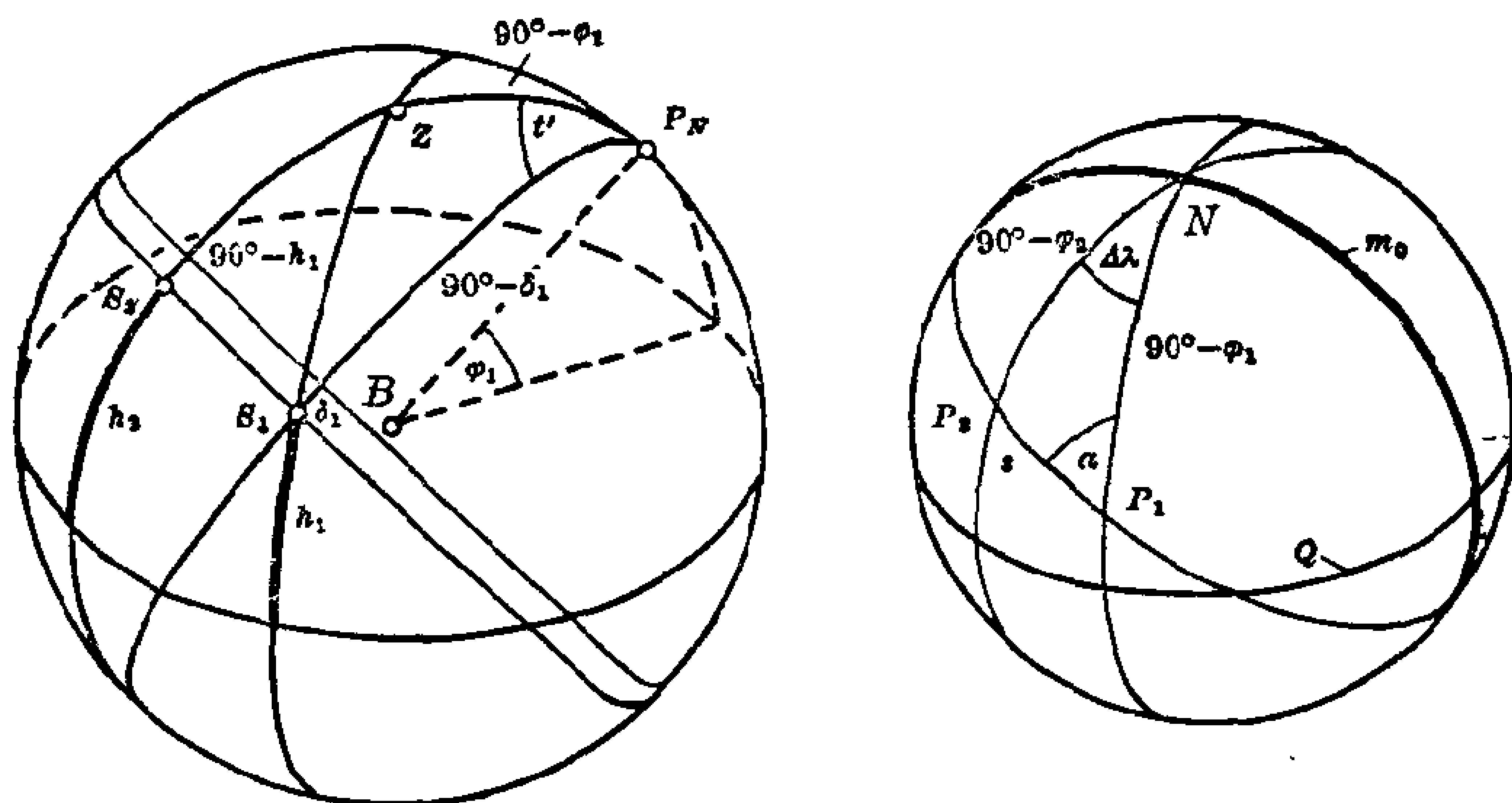


图12.3-11 例2中天空的示意图(左图)和例2中地球表面的示意图(右图)；其中 Q 是赤道，m_0 是格林威治子午线

太阳中天的地平纬度 h_2 满足:

$h_{\max}=h_2=90°-\varphi_2+\delta_2$ 或者 $\varphi_2=90°+\delta_2-h_2$，即 $\varphi_2=44.79°$。

两个观察点 P_1 和 P_2 与北极 N 在一起确定了在地球表面的一个球面三角形 P_1NP_2。沿着在 P_1 点处的航向角 $\alpha=67.5°$，船只通过了两个观察点之间的距离 $\widehat{P_1P_2}=15.2$ 海里 $=15.2\cdot1.852$ 公里，对应着一条弧 $s=\dfrac{360\cdot15.2\cdot1.852}{2\pi R}=0.253°$。航向角 α 的对边 $\widehat{P_2N}$ 是 $90°-\varphi_2=45.21°$；由正弦定律 $\sin\Delta\lambda=\sin s\sin\alpha/\sin(90°-\varphi_2)$，给出 $\Delta\lambda=0.329°$。在同一三角形中，由耐普尔公式 2a) 给出:

$$\tan\left(\frac{90°-\varphi_1}{2}\right)$$
$$=\tan\left(\frac{90°-\varphi_2-s}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\Delta\lambda}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{\alpha-\Delta\lambda}{2}\right),$$

因而 $90°-\varphi_1=45.3°$，$\varphi_1=44.7°$。

在第一个观察点的航海三角形 ZP_NS_1 中，已知三边 $\widehat{ZS_1}=90°-h_1$，$\widehat{ZP_N}=90°-\varphi_1$ 和 $\widehat{P_NS_1}=90°-\delta_1$。由边的正弦定律能够计算出 360° 和时角 t 之间的差 t':

$$\cos t'=\frac{(\sin h_1-\sin\varphi_L\sin\delta_1)}{\cos\varphi_1\cos\delta_1},$$

由此得到 $t'=45.13°=3.01$ 小时 $=3$ 小时 0 分 36 秒。因此在第一观察

点处，真地方时是12时−3时0分36秒=8时59分24秒，或者因为$t_m = t_s - \mathrm{E.T.}$得到地方平均时是8时44分21秒。与格林威治地方平均时的时差是18时50分−8时44分21秒=10时05分39秒，即10.094小时。于是经度差为$10.094 \cdot 15° = 151.41°$。这样，格林威治在$P_1$的东面，于是得到$P_1$的经度是西经151.41°，而$P_2$的经度是$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = 151.74°$。

第13章　平面解析几何

13.1　平面坐标系……………494
平行坐标系……………495
极坐标……………496
从一种坐标系变换到另一种坐标系………497
13.2　点和直线……………500
线段和分割比…………500
直线方程……………503
点和直线的结合………512
13.3　若干直线……………514
交点和交角……………515
三角形和多边形………519
13.4　圆……………526
圆的方程……………526
圆和直线……………528
两个圆……………532
13.5　圆锥曲线……………533
圆锥曲线看成是圆锥与平面的交线………533
抛物线方程……………536
椭圆方程……………538
双曲线方程……………541
圆锥曲线和直线………544
圆锥曲线的法线和极线……………549
两条圆锥曲线…………552
圆锥曲线的公共顶点型方程……………554
圆锥曲线的极坐标方程……………556
一般二次方程的讨论…561

解析几何的主要思想是用代数计算的方法来进行几何研究，这种方法已经证明是卓有成效的。把几何思想与代数思想融合起来，再与函数思想结合在一起，十分有助于人们对具体实体的探索和理解。同时这种方法在数学上具有特别的吸引力，在训练思维上也产生了重大影响。解析几何方法的诞生，以及随之而来的微积分计算方法的发展，标志着向近代数学的过渡。解析几何诞生的年份可从1637年算起，这是笛卡尔(1596～1650年)为了避免与教会辩论而匿名出版他的著作«方法论»的年份。在这本对哲学史也很重要的著作中，标题为“几何学”的第三部分系统地阐述了解析几何的基本原理。此前不久，费尔马(1601～1665年)也已经得出解析几何的方法，但是他的论文«平面几何和立体几何轨迹导

论》直到1679年才发表。因为笛卡尔的"几何学"采用了较好的记法，因此一般总是把解析几何方法的发展归功于笛卡尔。然而，在笛卡尔以后，经过很长的时间，特别是经过欧拉(1707～1783年)的努力才发展成现在的形式。例如笛卡尔没有使用两根轴，而只是到了欧拉时代，由他引入了大部分的现代记法，才从几何轨迹方程得到具有深远意义的结论，而笛卡尔和费尔马却总是认为方程一经建立，他们的研究也就结束。

13.1 平面坐标系

把几何图形看作点集，并给每一个点指定一个数字量与它对应，并以此同其他的点相区别，这样就达到了几何思想和代数思想的融合。这样，一条曲线或者一条直线就是它的数值满足某一关系的点的全体的集合，而这种关系就叫作图形的方程，例如椭圆的方程或者直线的方程。两变量线性方程的图形总是一条直线，而两变量二次方程的图形总是一条圆锥曲线。解析几何这种构造法的基础是点和数之间的对应关系，这种对应关系必须是一对一的。直线上，或者更一般地在一条曲线上，一个数字就足以唯一地去确定一个点，在平面或曲面上一个数对就足以唯一地确定一个点，而在空间中一个三数组足以唯一地确定一个点；反过来，在曲线上的一个点唯一地确定了一个数，而在曲面上的一个点唯一地确定了一个数对，在空间中的一个点唯一地确定了一个三数组，这些数字就叫作坐标。坐标可以用不同的方法来得到，坐标系就是确定这些数的方法。

数轴 如果在直线上给出一个**零点** O 和**单位线段** $u=\overrightarrow{O1}$，那末就能唯一确定直线上任一点 P 的位置。单位线段的整数倍只要通过重复截取 u 就能得到，截取方向既可以沿着从0到1的**正向**也可以沿着从1到0的**负向**(见图13.1-1)。这些整倍数的端点与全体正、负整数对应。任一点 P 或者是某一个端点，或者位于两个端点之间；例如 n 和 $n+1$ 之间，总是存在一个实数 x，使得 x 乘 u 是点 P 离开原点 O 的距离 $|OP|$。对正的 x，有 $n\leqslant x\leqslant n+1$；而对负的 x，有 $-n'\geqslant x\geqslant -n'-1$。数 x 就是

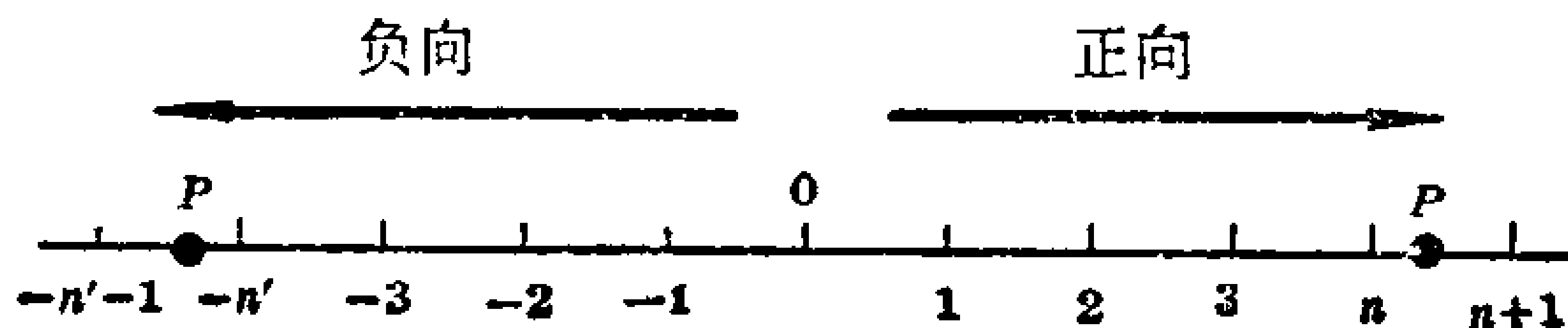


图 13.1-1 数轴

点 P 的坐标。反过来，任一实数 x 由方程 $m(OP)=xu$ 唯一地确定了数轴上的一个点 P，其中当 $x>0$ 时，$m(OP)=|OP|$；当 $x<0$ 时，$m(OP)=-|OP|$。

平行坐标系

斜平行坐标　因为平面有两维，因而要确定平面上一点的位置就需要两条互不平行的数轴，它们的原点分别是 O 和 O'，单位线段分别是 $u=\overrightarrow{O1}$ 和 $u'=\overrightarrow{O'1'}$。这两条数轴常常这样安排，使得它们的零点重合，$O=O'$；这两条数轴就叫作**坐标系的轴**，通常称为 x 轴或**横坐标轴**和 y 轴或**纵坐标轴**。如果这两条轴所夹的角 $\alpha<180°$，那末在**右手系**中选择轴的符号使得 $+x$ 轴按**数学上正向意义**（逆时针）旋转角 α 就重合到 $+y$ 轴上；在**左手系**中只不过是旋转按反向意义进行。整个平面被坐标轴分成四个区域，这四个**象限**按照 I, II, III 和 IV 来编号，先后次序跟坐标系的旋转方向相同。如果点 P 位于其中某一象限，那末过这一点平行于每一坐标轴能够画一根直线，并与另一坐标轴相交于一点，比如与 x 轴相交于 P' 而与 y 轴相交于 P''（见图 13.1-2）。数轴上这两点的坐标就是**点 P 的坐标**。不同的点就得到不同的数对 (x, y)。反过来，对任一数对 (a, b)，在坐标轴上有两个点 P_a, P_b 满足 $m(OP_a)=au$ 和 $m(OP_b)=bu'$。过这两点 P_a, P_b 作平行于另一坐标轴的直线，它们相交于坐标是 a 和 b 的一点 P。甚至在点 P 位于某一坐标轴上时，因为把它看成是平面上的一个点，因而也必须用一个数对来确定它的位置。那时 P 点与 P' 或 P'' 重合，而在另一轴上的点就是原点，因此它的坐标是零。于是在横坐标轴上的点它的坐标是 $(x, 0)$，而在纵坐标轴上的点它的坐标是 $(0, y)$。在表示点 P 的数对中，x **坐标或者横坐标总是放在第一个位置**，而 y **坐标或者纵坐标放在第二个位置**。原点所对应的坐标是 $(0, 0)$。

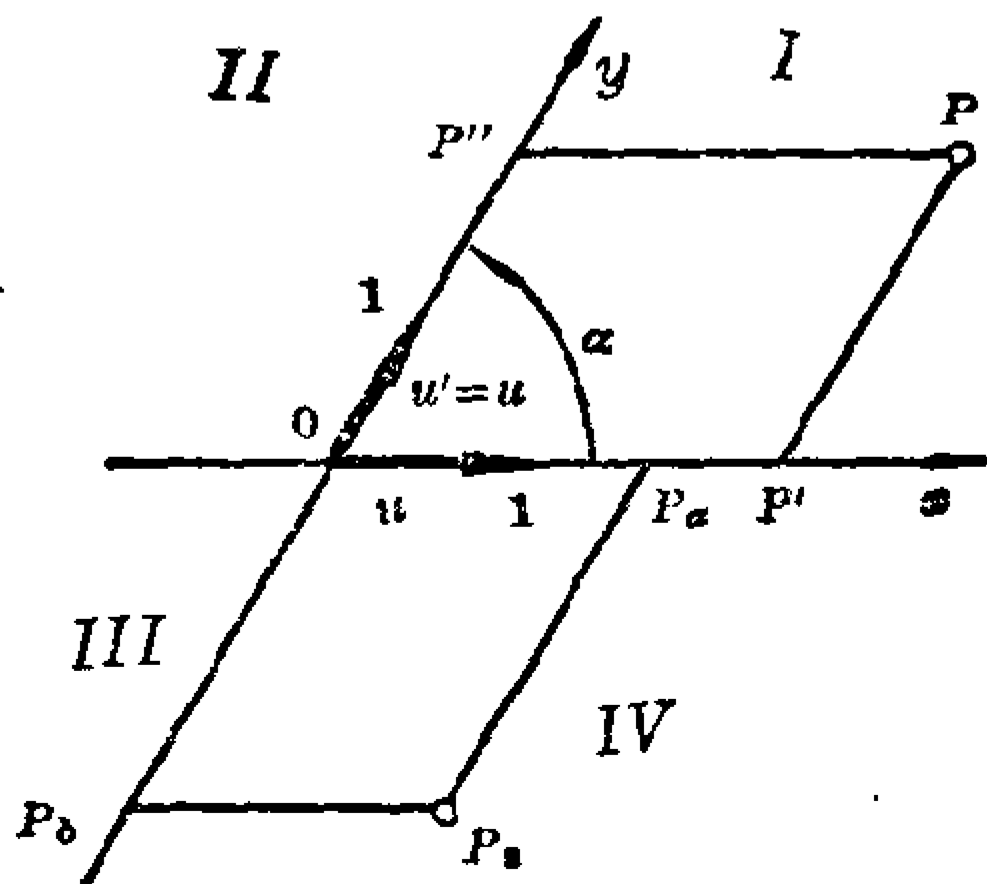


图 13.1-2　斜坐标系

在每一个象限中，坐标都有确定的符号。对于给定的象限数，对应的

符号在下表中给出。

符	号	点所在的象限
横　坐　标	纵　坐　标	
+	+	I
−	+	II
−	−	III
+	−	IV

直角（平行）坐标，笛卡尔坐标　在笛卡尔坐标系中，坐标轴互相垂直，并且在两条轴上选择**相同的长度单位**。还有，过P点的两条平行线互相垂直并与坐标轴互相垂直，这两条平行线是用来求出对应的坐标的。在绝大多数情况下使用这种直角坐标系，并且一般使用右手系，只是在测量学中使用左手系（参看 **I.** 第11章）。

【例】　在图13.1-3中点P_1的坐标是$x_1=+2$和$y_1=+3$。如果用坐标$x_2=-\frac{3}{2}$和$y_2=+\frac{5}{4}$来画出点P_2，那末它只能是图中所给出的位置。原点的坐标是(0, 0)。

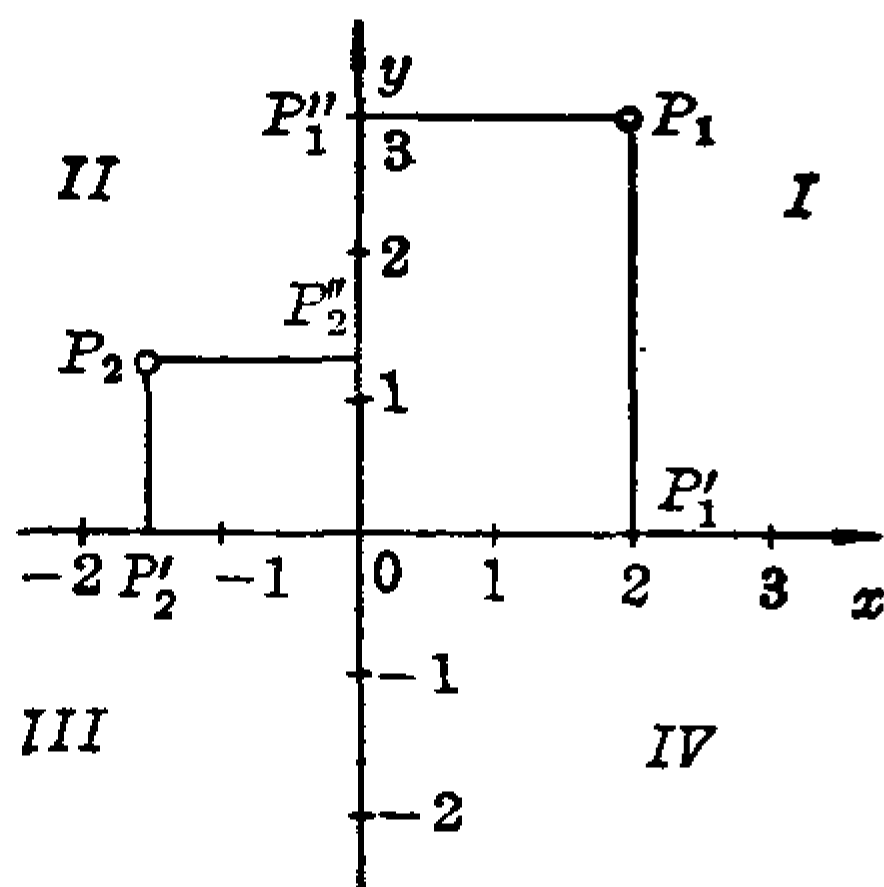


图13.1-3　直角（平行）坐标

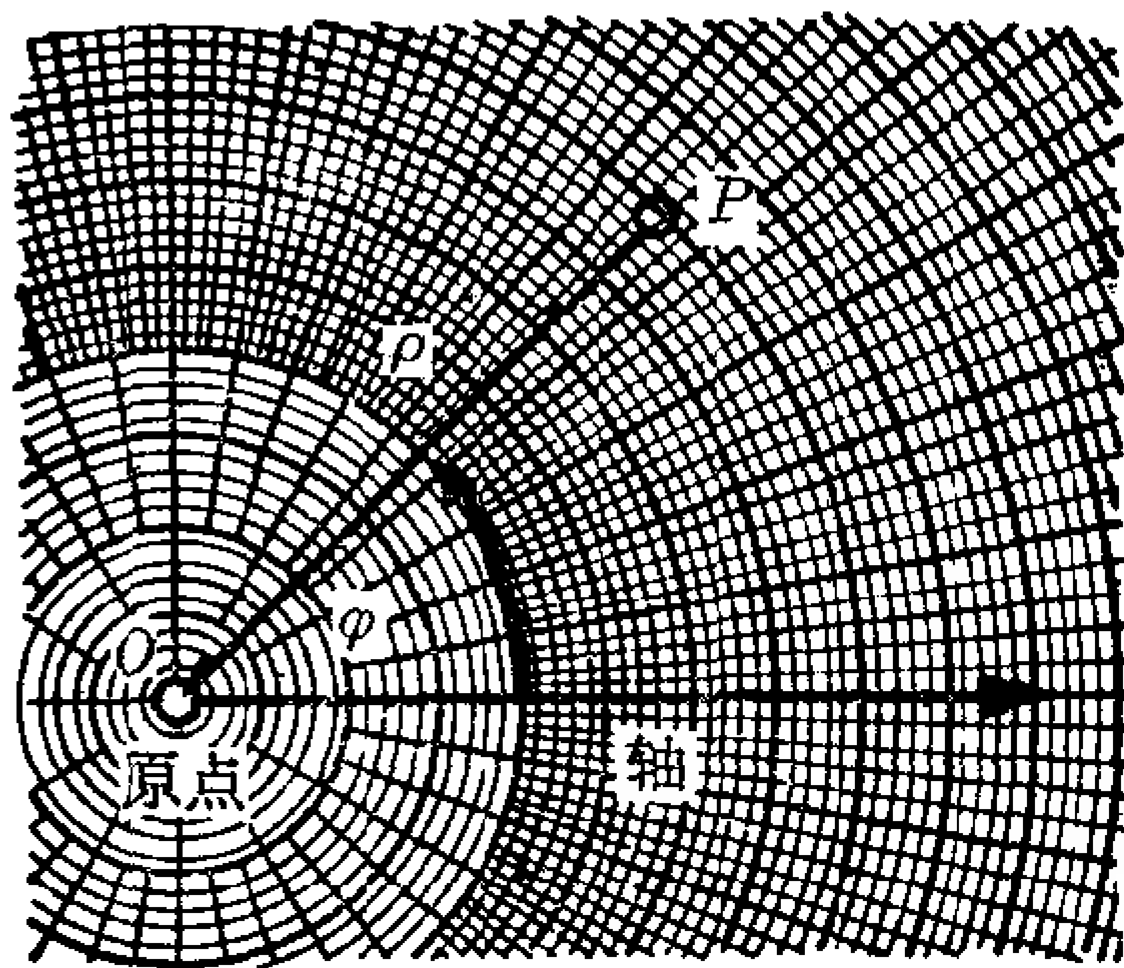


图13.1-4　点P的极坐标：$\varphi=45°$和$\rho=4$

极坐标

极坐标系　极坐标系是由一个定点O，即*原点*或*极点*，和过这一点的*零方向*或者轴所确定，在这条轴上就象在数轴上一样能够截取正的长度。

然后平面上的任意一点 P 首先能够用一个角 φ 来确定，必须把这根轴按数学上正向意义旋转角 φ 使之通过 P 点，其次沿着这根数轴测量从极点到点 P 的正向距离 ρ(见图 13.1-4)。角 φ 叫作幅角、相位角或方位角，它能从 $0°$ 到 $360°$ 中取值；长度 $|OP|=\rho$ 叫作极半径，它只能取非负值。对点 O 本身，$\rho=0$ 而 φ 是不确定的。

从一种坐标系变换到另一种坐标系

同一个几何图形，譬如说圆，可以在两个不同的坐标系 C_1 和 C_2 中加以描述，例如，在笛卡尔坐标系和极坐标系中加以描述。因为具有相同的几何性质，因而能求得两个方程 $f_1(x, y)=0$ 和 $f_2(\xi, \eta)=0$。我们不从几何数据直接导得这两个函数，而利用坐标系的性质和它们之间的相对位置就能够从其中一个函数来计算出另一个函数。这就称为从一个坐标系到另一个坐标系的**变换**。变换方程必须清楚地说明怎样从在 C_1 中一点的坐标 (x, y) 来计算在 C_2 中同一点的坐标 (ξ, η) 以及它的逆过程。如果变换方程是 $x=t_1(\xi, \eta)$，$y=t_2(\xi, \eta)$，它们的逆变换方程是 $\xi=\tau_1(x, y)$，$\eta=\tau_2(x, y)$，那末描述同一几何图形的方程 $f_1(x, y)=0$ 和 $f_2(\xi, \eta)=0$ 就能互相变换。

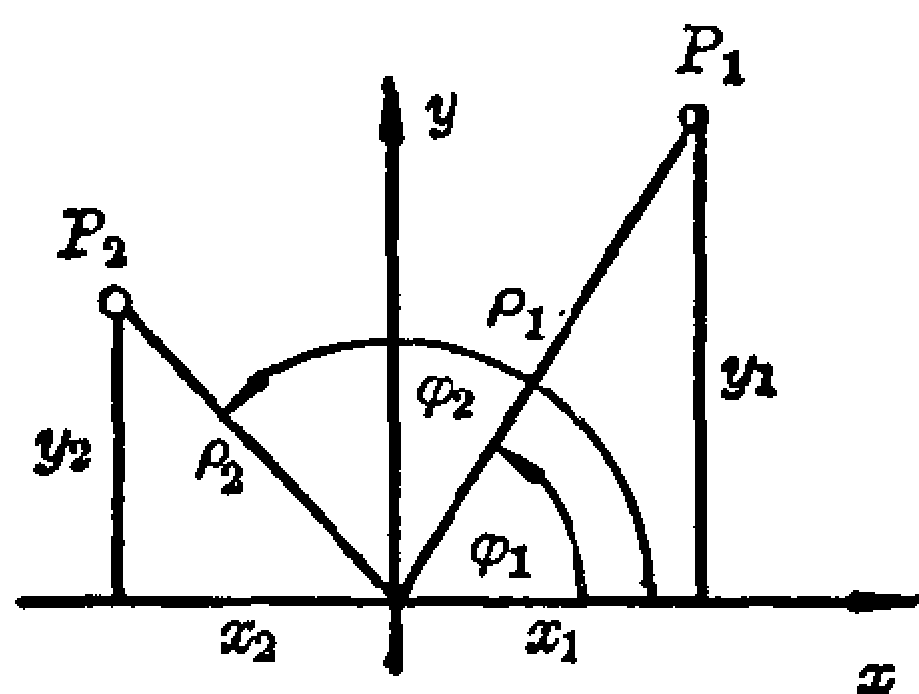


图 13.1-5 笛卡尔坐标系和极坐标系之间的关系

从极坐标变换到笛卡尔坐标的变换及其逆变换 为了简单起见，可以假定极坐标系的极点与笛卡尔坐标系的原点重合，并且极坐标系的轴跟 x 轴重合。然后，如果点 P 的极坐标是 (ρ, φ) 和它的笛卡尔坐标是 (x, y)，那么由三角关系式给出 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，尤其能从单位圆中看到，x 和 y 的符号在不同象限中的所有可能组合能够由 φ 取到从零到 2π 中的所有值来得到(见图 13.1-5)。

$x=\rho\cos\varphi$	$x^2+y^2=\rho^2$	$\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$y=\rho\sin\varphi$	$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$	$\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

【例1】　如果 P_1 的直角坐标是(3, 4)，那末 $\rho_1=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$; $\cos\varphi_1=\frac{3}{5}=0.6, \sin\varphi=\frac{4}{5}=0.8$; 从三角函数表，得 $\varphi_1=53°8'$。因此 P_1 的极坐标是 $\rho_1=5$ 和 $\varphi_1=53°8'$。

【例2】　P_2 的极坐标是 $\rho_2=3$, $\varphi_2=120°$。那末 P_2 的直角坐标是 $x_2=3\cos 120°$, $y_2=3\sin 120°$，这样从三角函数表就得到 $x_2=-\frac{3}{2}$, $y_2=\frac{3}{2}\sqrt{3}$。

【例3】　在极坐标系中，圆心在极点、半径为 r 的圆的方程由 $\rho=r$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ 给出。不需要进一步的几何考虑，从变换方程用代入法就可得出笛卡尔坐标系中的圆的方程：$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=r$，或 $x^2+y^2=r^2$。

直角坐标系的平移　有两个不同的笛卡尔坐标系，坐标为 x 和 y 的 C_1 和坐标为 ξ 和 η 的 C_2，它们之间的相互关系是对应的轴相互平行，以及 C_2 的原点 O_2 在 C_1 中的坐标是 (a, b)（见图 13.1-6）。那末同一点 P 在 C_1 中的坐标是 (x, y)，而在 C_2 中的坐标是 (ξ, η)，其中 $x=a+\xi$, $y=b+\eta$，或者 $\xi=x-a$, $\eta=y-b$。

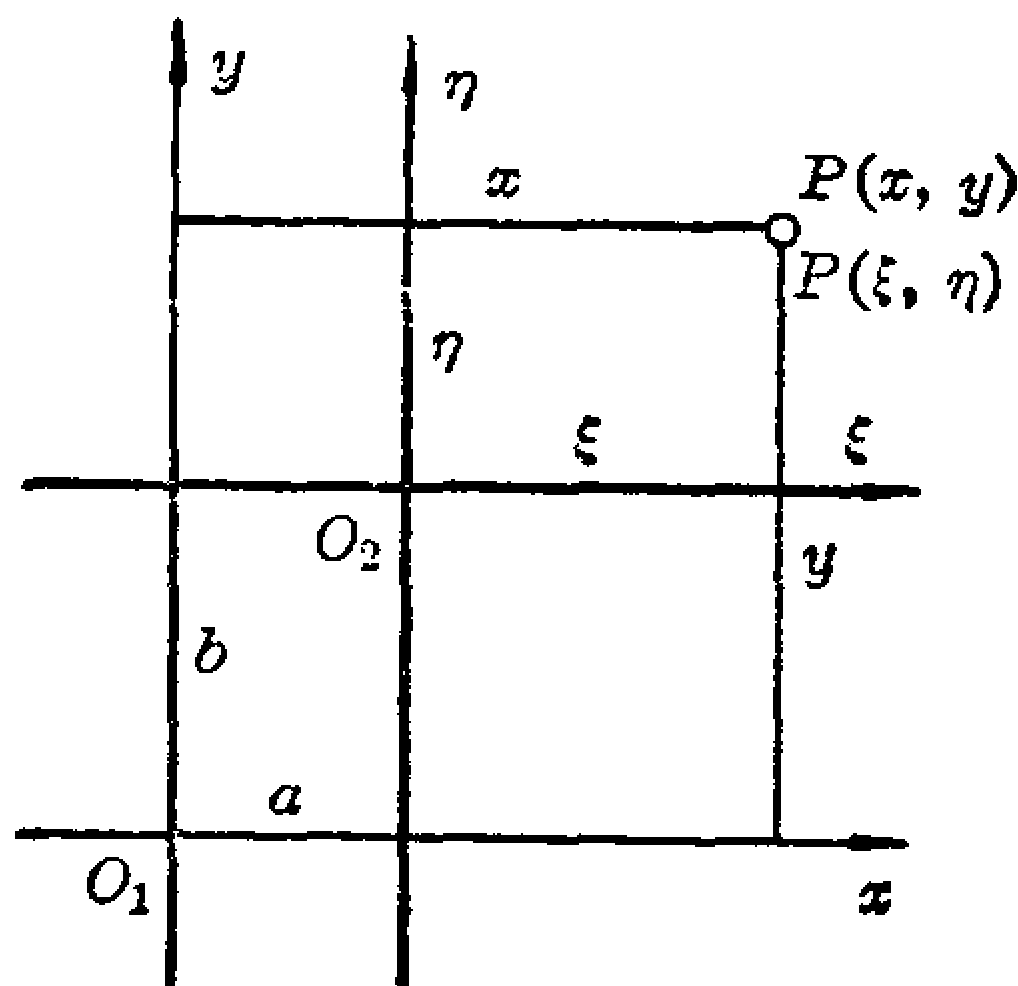


图 13.1-6　相互之间有位移的两个平行直角坐标系

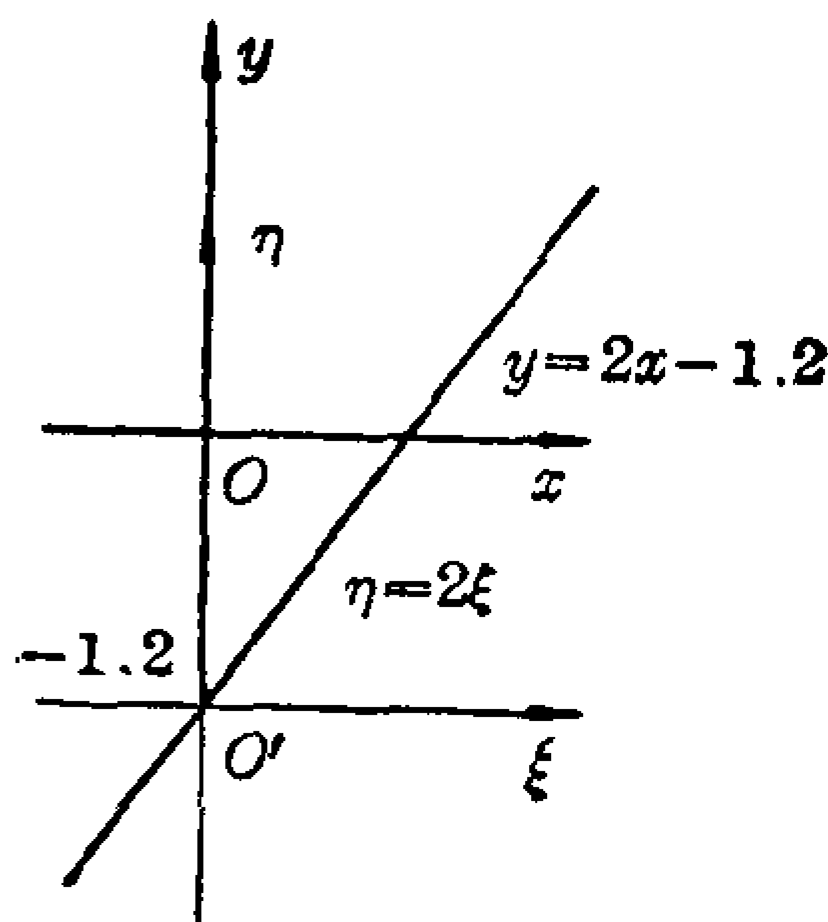


图 13.1-7　直线方程的变换

由平移产生的坐标变换	$x=a+\xi$, $y=b+\eta$
逆　变　换	$\xi=x-a$, $\eta=y-b$

与新坐标系原点所在的象限无关，这些变换公式总是适合的；例如，如果 a 和 b 都是正的，则位移是向上和向右；如果 a 和 b 都是负的，那么

位移是向下和向左。

【例 1】 (x, y)坐标系变换成与它平行的(ξ, η)坐标系，并使(ξ, η)坐标系的原点在(x, y)坐标系的点$(4, -2.5)$处，即$a=4$, $b=-2.5$，则变换方程是$x=4+\xi$, $y=-2.5+\eta$。

【例 2】 (x, y)坐标系中，有一条曲线（一条直线）的方程是$y=2x-1.2$（见图 13.1-7）。如果令$x=0$，就得到这条直线与y轴的交点，它的坐标是$(0, -1.2)$。设这一点就是(ξ, η)坐标系的原点，(ξ, η)坐标系与(x, y)坐标系平行，则因$a=0$，和$b=-1.2$，得到变换方程是$x=\xi$, $y=\eta-1.2$。此变换方程适合于平面上每一点。因此在(ξ, η)坐标系中曲线（直线）方程变成$\eta-1.2=2\xi-1.2$，或者$\eta=2\xi$。可以看出，在这种情况下方程的形式由于变换而得到简化。

直角坐标系的旋转 设(x, y)一直角坐标系按数学上的正向意义旋转（保持原点不动）ψ角而成为(ξ, η)坐标系。设点P在老坐标系中的坐标是(x, y)，而在新坐标系中的坐标是(ξ, η)（见图 13.1-8）。

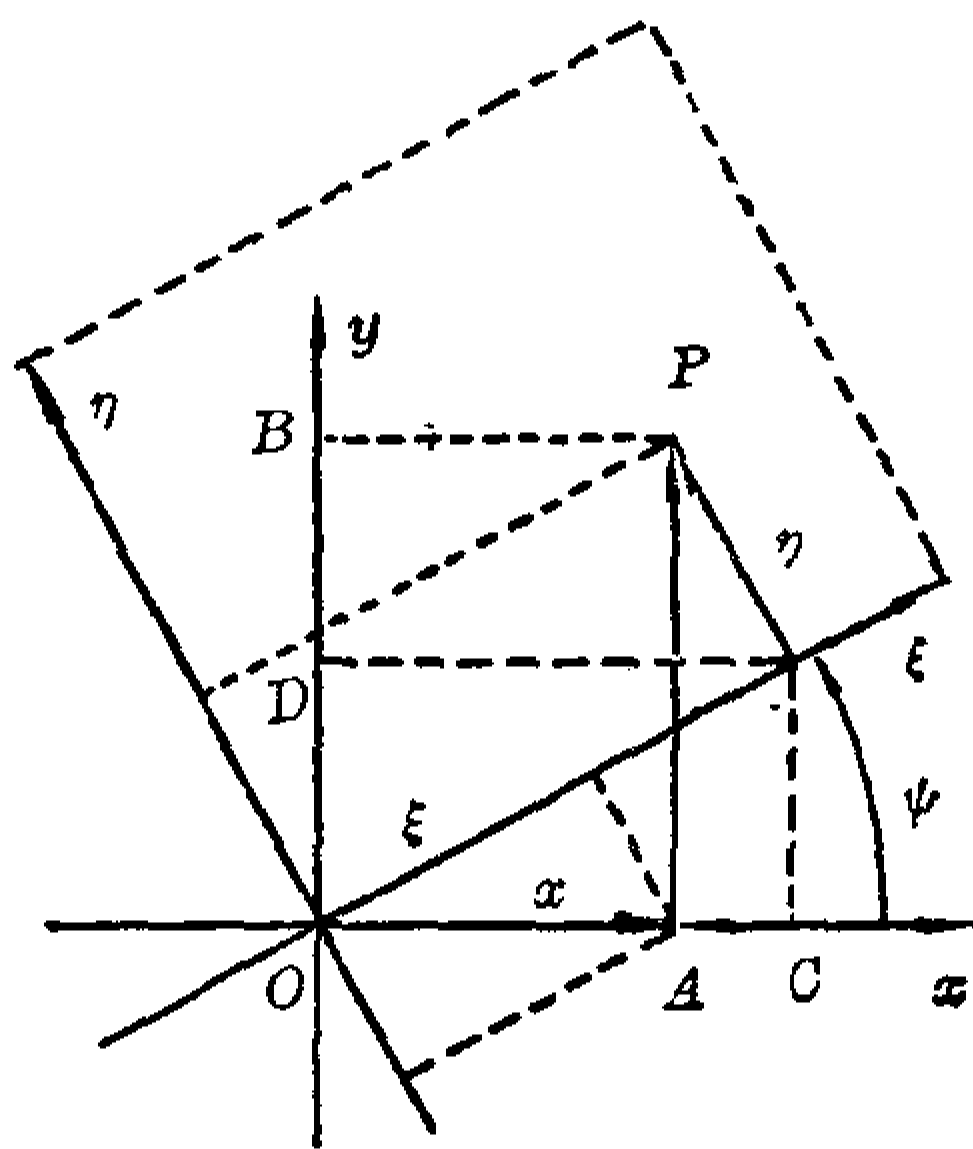


图 13.1-8 坐标系的旋转

对任意的角ψ, ξ坐标在x轴上的投影是$\overrightarrow{OC}=\xi\cos\psi$。$\eta$轴与$x$轴的倾角是$\psi+\frac{\pi}{2}$，所以由三角学定理，$\eta$坐标在$x$轴上的投影是$\overrightarrow{CA}=\eta\cos\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)=-\eta\sin\psi$。因此，根据向量加法：$x=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}=\xi\cos\psi-\eta\sin\psi$。

对任意的角ψ, ξ轴与y轴的倾角是$-\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)$；而$\eta$轴与$y$轴的倾角是$\psi$。因此$\xi$坐标在$y$轴上的投影是$\overrightarrow{OD}=\xi\cos\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)=\xi\sin\psi$，而$\eta$坐标在$y$轴上的投影是$\overrightarrow{DB}=\eta\cos\psi$；所以，$y$坐标满足变换方程

$$y=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB}=\xi\sin\psi+\eta\cos\psi。$$

把(ξ, η)坐标系旋转角$-\psi$就得到关于ξ, η的变换公式。

(x, y) 坐标系旋转角 ψ 的坐标变换	$x=\xi\cos\psi-\eta\sin\psi$ $y=\xi\sin\psi+\eta\cos\psi$	$\xi=x\cos\psi+y\sin\psi$ $\eta=-x\sin\psi+y\cos\psi$

【例】 一个坐标系中的点 $P(2, 4)$，在坐标系旋转 30° 后，它在新坐标系中的坐标是什么？

老坐标是 $x=2$, $y=4$; 因为 $\sin\psi=\frac{1}{2}$, $\cos\psi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\xi=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{1}{2}=2+\sqrt{3},$$

$$\eta=-2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-1+2\sqrt{3}。$$

提示。就象在上面例子那样，用坐标系平移能消去曲线方程中的常数项，而用坐标系的旋转，常常可以从变量 x 和 y 的二次方程中消去混合项 xy (参看“一般二次方程的讨论”这一节)。在这中间使用了变到主轴的变换。假定给出了方程 $x^2+xy+y^2-3=0$，然后，如果使用旋转 45° 的变换方程，

$$x=\xi\cos 45°-\eta\sin 45°=(\xi-\eta)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y=\xi\sin 45°+\eta\cos 45°=(\xi+\eta)\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

把它代到上面的方程中去，那末新的方程就是:

$$\frac{1}{2}(\xi^2-2\xi\eta+\eta^2)+\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)+\frac{1}{2}(\xi^2+2\xi\eta+\eta^2)-3=0,$$

或者
$$3\xi^2+\eta^2-6=0。$$

13.2 点和直线

线段和分割比

线段的长度　线段的长度，即在它的两个端点之间的距离，在纯粹几何学中是用一把尺来度量的，但是在解析几何学中，它是根据它的端点坐标来计算的。如果线段的端点 P_1 和 P_2 (见图 13.2-1)在直角坐标系中

的坐标是 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，则由毕达哥拉斯定理就能得到线段 P_1P_2 的长度。

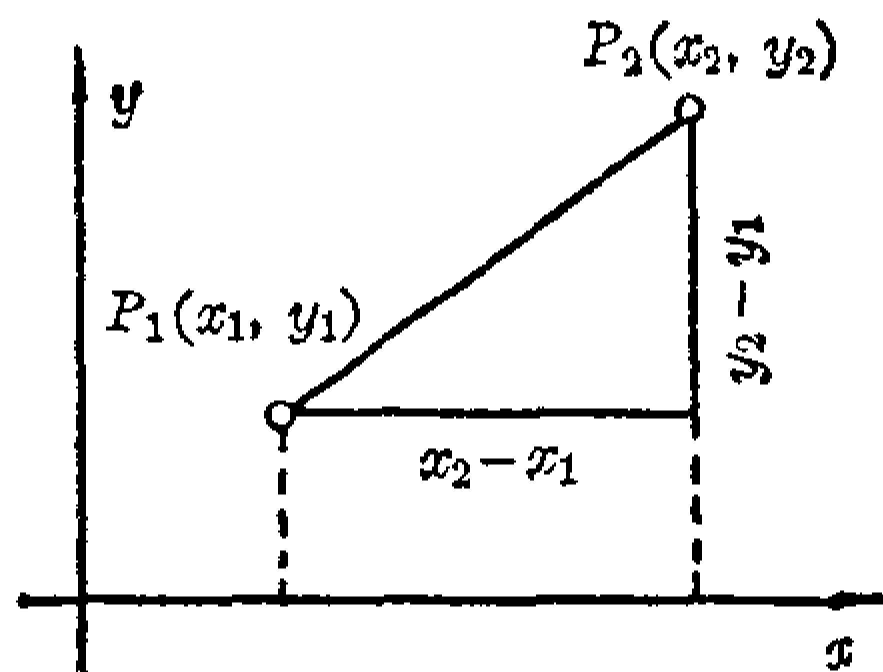


图 13.2-1 两点间的距离；线段的长度

在点 P_1 和 P_2 之间的距离，线段 P_1P_2 的长度
$\lvert P_1P_2\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

【例】 1. 给出点 $P_1(1, 8)$, $P_2(4, 2)$:

$|P_1P_2|=\sqrt{(4-1)^2+(2-8)^2}=\sqrt{3^2+(-6)^2}=\sqrt{45}\approx 6.71$。

2. 给出点 $P_3(-3, -2)$, $P_4(-6, -1)$:

$$|P_3P_4|=\sqrt{(-6+3)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{10}\approx 3.16。$$

3. 从 P_1 到 P_4 的直接路程要比从 P_1 通过 P_2 和 P_3 再到 P_4 的折线短多少？——我们求得 $|P_3P_4|=\sqrt{130}\approx 11.40$ 和

$$|P_1P_2|+|P_2P_3|+|P_3P_4|$$
$$=\sqrt{45}+\sqrt{65}+\sqrt{10}\approx 6.71+8.06+3.16=17.93。$$

即，路程差是 $17.93-11.40=6.53$。

线段的分割比 如果点 P 位于线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 上，并且不与 P_2 重合，那末点 P 就按照 $\overrightarrow{P_1P}:\overrightarrow{PP_2}=\lambda$ 的比例把线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 分成两段，λ 就叫作点 P 关于线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的**分割比**。$\overrightarrow{P_1P}$ 不仅表示线段的长度 $|P_1P|$，而且也表示了从 P_1 到 P 的方向，即，$\overrightarrow{P_1P}=-\overrightarrow{PP_1}$。上述说明同样适合于 $\overrightarrow{PP_2}$。因此，如果 P 在 P_1 和 P_2 之间，那末 $\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ 具有相同的方向，因此就有相同的符号，从而 **λ 是正的**。就象任意一条数轴那样，两条线段的符号与在这条直线上所选择的正向有关，也就是与这条直线的定向有关。如果改变直线的定向，那末线段 $\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ 的符号也反向，但是仍有相同的符号。这说明**直线的定向并不改变分割比 λ**，因此可以不考虑直线的定向。如果 P 点在线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的外面，那末 $\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ 的符号相反，因

此 λ 是负的。

更精确的研究表明 P 点在直线上的每一个位置都能用分割比 λ 的一个值来表征(见图 13.2-2)。事实上，当 P 点沿着线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 从 P_1 向 P_2 移动时，就可以看到 λ 单调地增加，这是因为在 $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}}$ 中，分子总是在增加，而分母总是在减小的缘故。对 $P=P_1$，有 $\lambda=0$；对线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的中点 M，$\lambda_M=+1$；当 P 任意地接近点 P_2 时，λ 就趋向于无限大。

如果 P 点是线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的外分点，那末线段 $\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ 的长度差总是 $|P_1P_2|$，而线段 $\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ 越是大，即如果 P 点离开线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 足够远，那末这个差 $|P_1P_2|$ 对分割比 $\overrightarrow{P_1P}:\overrightarrow{PP_2}=\lambda$ 的影响也就越小，从而 λ 与 -1 之差就任意小。不管 P 是按照 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向离开，还是按照 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 的方向离开，这并没有什么差别。因此可以简单地说：在直线的**非正常点或无穷远点** P 处，分割比的值为 $\lambda=-1$。如果 P 按 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向接近点 P_1，那末 $|PP_2|=|PP_1|+|P_1P_2|>|PP_1|$，因此分割比的绝对值总是小于 1，即 λ 的值从 -1 增加到 0。如果 P 按照 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 的方向接近点 P_2，那末 $|P_1P|=|P_1P_2|+|P_2P|>|P_2P|$，即 $|\lambda|=|P_1P|:|PP_2|>1$，因此，当 $P\to P_2$ 时，就有 $|PP_2|\to 0$ 或者 $|\lambda|\to\infty$；所以，当 P 点作为外分点按照 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 的方向朝 P_2 运动时，λ 的值单调地从 -1 减少到 $-\infty$。对 $P=P_2$，λ 没有定义；当 P 作为一个内点趋向于 P_2 时，λ 趋于 $+\infty$；而当 P 作为一个外点趋向于 P_2 时，λ 趋于 $-\infty$。

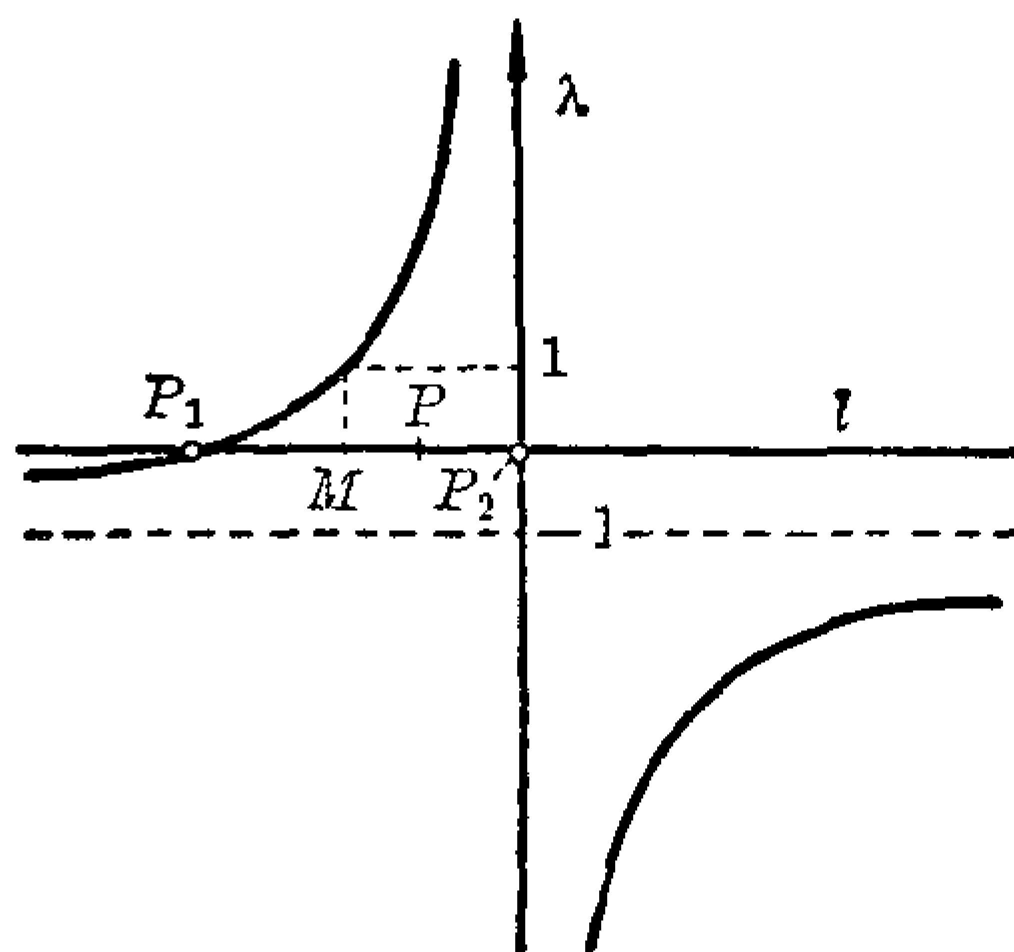


图 13.2-2　当 P 画出一条直线时，分割比 λ 的值

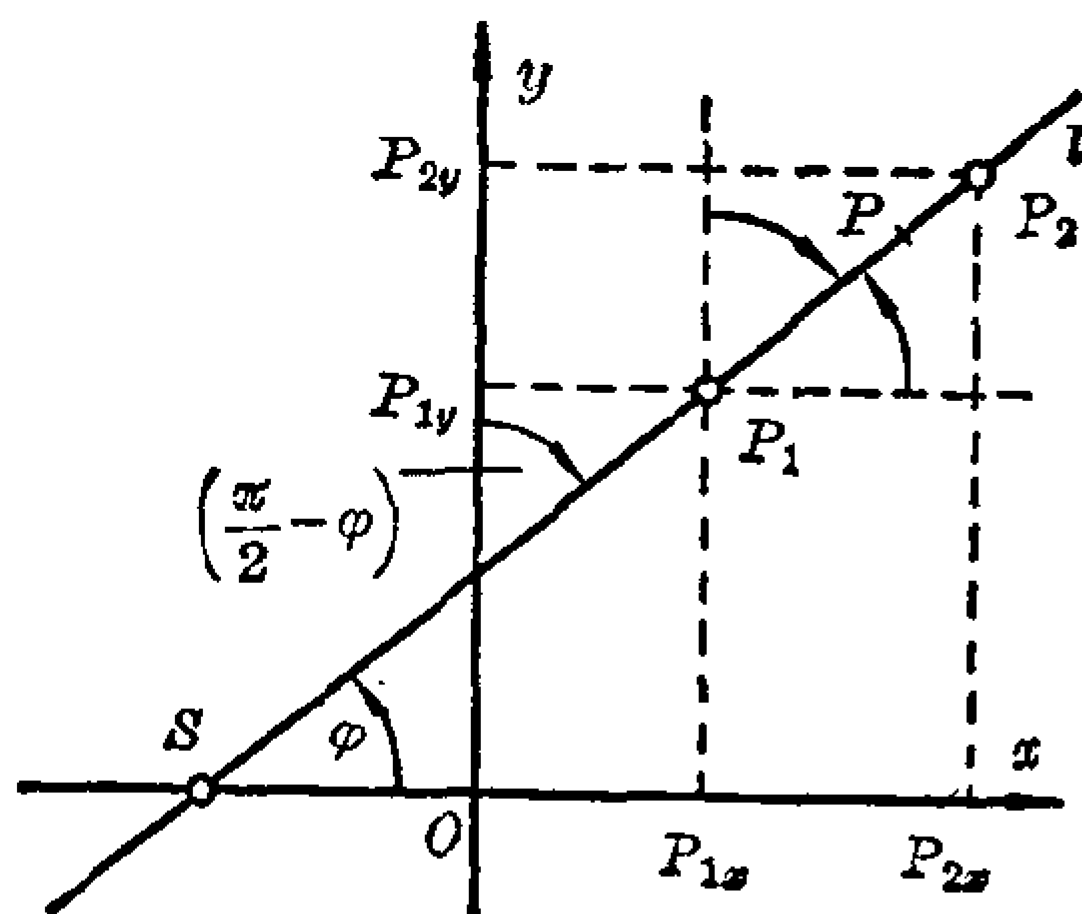


图 13.2-3　分割比和直线方程

直线方程

直线的方向　一条有向直线 l 与 $+x$ 轴的交角是 $\sphericalangle(x, l)=\varphi$，即 $+x$ 轴绕着它与直线 l 的交点 S，按照数学上的正向意义(这是指在右手系中，如在左手系中则按相反的方向)旋转 φ 角，并与这条直线 l 的方向重合。这条直线与 $+y$ 轴的交角是 $\sphericalangle(y, l)=\varphi-\frac{\pi}{2}$。设在直线上给出两点 P_1 和 P_2，使得 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 是正的，过这两点画出平行于每一条坐标轴的直线(见图 13.2-3)，它们与坐标轴相交于 P_{1x}, P_{2x} 和 P_{1y}, P_{2y}。那末对任意角 φ，线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在坐标轴上的投影由公式 $\overrightarrow{P_{1x}P_{2x}}=\overrightarrow{P_1P_2}\cos\varphi$ 和 $\overrightarrow{P_{1y}P_{2y}}=\overrightarrow{P_1P_2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=\overrightarrow{P_1P_2}\sin\varphi$ 给出。如果 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 是 P_1 和 P_2 的坐标，则

$$x_1+\overrightarrow{P_{1x}P_{2x}}=x_2,\quad x_2-x_1=\overrightarrow{P_{1x}P_{2x}}$$

和

$$y_1+\overrightarrow{P_{1y}P_{2y}}=y_2,\quad y_2-y_1=\overrightarrow{P_{1y}P_{2y}};$$

因为

$$|P_1P_2|=+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

所以

$$\cos\varphi=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}。$$

这样，由点 P_1 和 P_2 的坐标就能够确定角 φ；角 φ 可取 0 到 2π 中的值。然而，在不需考虑直线 l 方向的场合中，从它的正切值就足以确定角 φ 了：

$$m=\tan\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\quad \varphi=\tan^{-1}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}。$$

最好是取反正切函数的主值，即取 φ 在 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<+\frac{\pi}{2}$ 区间中的值。值 m 叫作直线 l 的斜率或者叫斜度。

直线方程　如果 P 点按比例 $\lambda=\overrightarrow{P_1P}:\overrightarrow{PP_2}$ 把线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 分成两段，则对线段 $\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ 而言，上面建立的方程同样适用，即，

$$x-x_1=\overrightarrow{P_1P}\cos\varphi \quad 和 \quad y-y_1=\overrightarrow{P_1P}\sin\varphi,$$

$$x_2-x=\overrightarrow{PP_2}\cos\varphi \quad 和 \quad y_2-y=\overrightarrow{PP_2}\sin\varphi。$$

因此，对分割比 λ 就有：

$$\lambda=\overrightarrow{P_1P}:\overrightarrow{PP_2}=\frac{x-x_1}{\cos\varphi}:\frac{x_2-x}{\cos\varphi}=(x-x_1):(x_2-x)$$

或
$$\lambda=\overrightarrow{P_1P}:\overrightarrow{PP_2}=\frac{y-y_1}{\sin\varphi}:\frac{y_2-y}{\sin\varphi}=(y-y_1):(y_2-y)。$$

如果 λ 取 $-\infty$ 到 $+\infty$ 中所有的值，那末点 P 就画出直线 l；如果 P 点的坐标满足方程 $(x-x_1):(x_2-x)=(y-y_1):(y_2-y)$，则点 P 就在这条直线上。坐标 (x, y) 常称为**流动坐标**。用对应项相加的办法，方程 $a:b=c:d$ 能够变成 $a:(a+b)=c:(c+d)$ 这种形式，因此直线方程就是 $(x-x_1):(x_2-x_1)=(y-y_1):(y_2-y_1)$。把里面两项相互交换位置，就得到**两点式**方程。

两点式	$\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)}=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$

这个方程强调了：在坐标系中，两点 P_1 和 P_2 就完全确定了一条直线。在**点斜式**中，点 P_1 和斜率 $m=(y_2-y_1):(x_2-x_1)=(y-y_1):(x-x_1)$ 也完全确定了一条直线的位置。

点斜式	$(y-y_1)=m(x-x_1)$

两点式的右边 $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ 对应了 $\tan\varphi$ 的值，因此按照 P_1 和 P_2 的相对位置可以取到这个三角函数的所有值。特别感兴趣的是在 $(y_2-y_1)=0$ 和 $(x_2-x_1)=0$ 这**两种特殊情况**下商的值。在第一种情况中，因为 $\tan\varphi=0$，由 P_1 和 P_2 确定的直线平行于 x 轴，而 $\varphi=0°$ 或 $\varphi=180°$；从直线方程得到 $\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)}=0, y-y_1=0, y=y_1$；即在这条直线上 x 坐标为任意值的点 P，它的 **y 坐标值保持常数值** $y=y_1$，从这个直线方程也可以知道这条直线平行于 x 轴。在第二种情况中，从方程 $\tan\varphi=\infty$，得到 $\varphi=90°$，或者 $\varphi=270°$，并且类似地可以从作过恒等变换的方程 $\frac{(x-x_1)}{(y-y_1)}=\frac{(x_2-x_1)}{(y_2-y_1)}=0$ 得到 $x-x_1=0$；对流动点 P 的任何 y 坐标，它**的 x 坐标总是取常数值** $x=x_1$；即这条直线平行于 y 轴。对 x 轴和 y 轴本身而言，因为分别有 $y_1=0$ 和 $x_1=0$，因此方程分别是 $y=0$ 和 $x=0$。

点 P 按照比例 λ 把线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 分成两段，则从方程 $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}$ 和 $\lambda=$

$\frac{y-y_1}{y_2-y}$就能求得点P的坐标(x, y)；例如$\lambda x_2-\lambda x=x-x_1$或者$x=\frac{(x_1+\lambda x_2)}{(1+\lambda)}$。对线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的中点$M$，因为$\lambda=+1$，就有$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$。

点P按照比例λ把线段$\overrightarrow{P_1P_2}$分成两段	$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

【例 1】　求线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角φ。

a）给出点$P_1(2, 3)$和$P_2(7, 8)$：

$$\cos\varphi=(7-2)/\sqrt{(7-2)^2+(8-3)^2}=5/\sqrt{5^2+5^2}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin\varphi=(8-3)/(5\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}。$$

方向角$\varphi=45°$。

b）给出点$P_1(-1, -2)$和$P_2(0, 8)$：

$$\cos\varphi=(0+1)/\sqrt{(0+1)^2+(8+2)^2}=\frac{1}{\sqrt{101}};$$

$$\sin\varphi=\frac{8+2}{\sqrt{101}}=\frac{10}{\sqrt{101}};\quad \tan\varphi=10。$$

方向角$\varphi=84.3°$。

c）给出点$P_1(2, -3)$和$P_2(-3, +5)$：

$$\cos\varphi=(-3-2)/\sqrt{(-3-2)^2+(5+3)^2}=-\frac{5}{\sqrt{89}};$$

$$\sin\varphi=\frac{8}{\sqrt{89}};\ \tan\varphi=-\frac{8}{5}=-1.6。$$

方向角φ在第II象限：$\varphi=180°-58°=122°$。

【例 2】　点T把连接$P_1(3, -2)$和$P_2(-5, 4)$的线段按照比例$\overrightarrow{P_1T}:\overrightarrow{TP_2}=2:3$分成两部分，求出$T$点的坐标。——因$\lambda=\frac{2}{3}$，所以得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{3+\frac{2}{3}(-5)}{1+\frac{2}{3}}=\frac{9-10}{5}=-\frac{1}{5};$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{-2+\frac{2}{3}\cdot 4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-6+8}{5}=\frac{2}{5};$$

因此 T 点的坐标是 $T\left(-\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right)$。

这条线段在 $M(-1,\ 1)$ 处被等分成两段 $(\lambda=+1)$。

【例 3】　求出连接点 $P_1(-4,\ -2)$ 和点 $P_2(5,\ -4)$ 的直线方程（见图 13.2-4）。把给出的值 $x_1=-4,\ y_1=-2, x_2=5, y_2=-4$ 代入两点式方

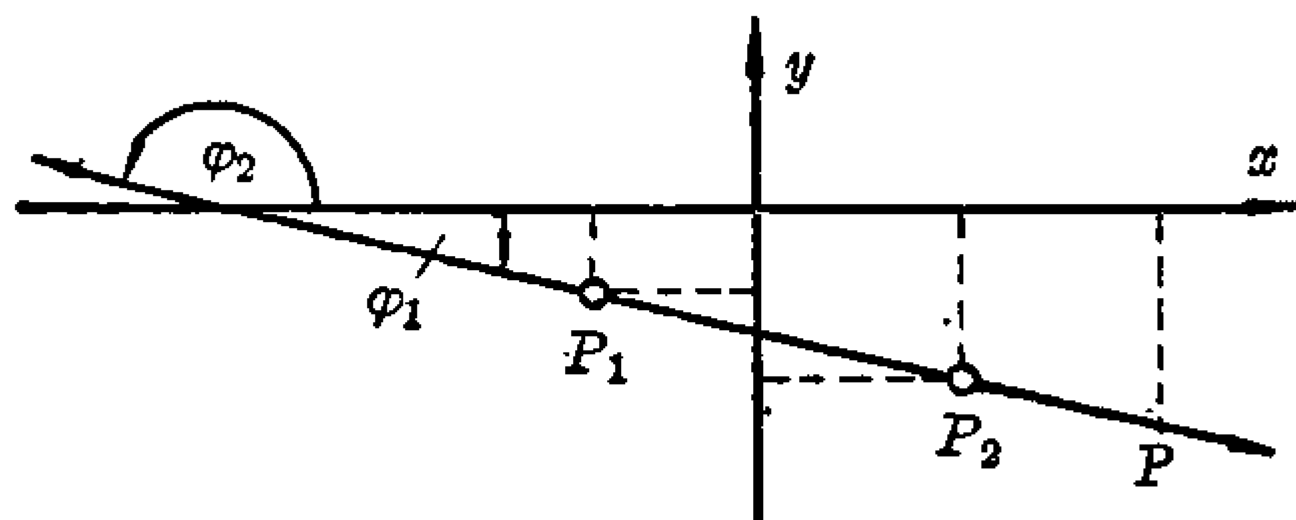


图 13.2-4　过 $P_1(-4,\ -2)$ 和 $P_2(5,\ -4)$ 的直线

程中就得到方程 $\frac{y+2}{x+4}=\frac{-4+2}{5+4}$，可简化为 $y=-\left(\frac{2}{9}\right)x-\frac{26}{9}$。斜率 m 的值是 $m=-\frac{2}{9}=-0.22\cdots=\tan\varphi$。$\varphi$ 的值或者是 $\varphi_1=-12.53°$ 或者是 $\varphi_2=180°-12.53°=167.47°$；主值是 $\varphi=-12.53°$。沿着 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向，在直线上有一点 P_3，它与 P_2 的距离是 $3|P_1P_2|$，则 P_3 按比 $\lambda=\frac{\overrightarrow{P_1P_3}}{\overrightarrow{P_3P_2}}=\frac{4|P_1P_2|}{(-3|P_1P_2|)}=-\frac{4}{3}$ 把线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 分成两段。因此 P_3 的坐标是：

$$x_3=\left(x_1-\frac{4}{3}x_2\right)\Big/\left(1-\frac{4}{3}\right)=\left(-4-\frac{4}{3}\cdot 5\right)\Big/\left(-\frac{1}{3}\right)=12+20=32$$

和

$$y_3=\left(y_1-\frac{4}{3}y_2\right)\Big/\left(1-\frac{4}{3}\right)$$

$$=\left[-2-\frac{4}{3}(-4)\right]\Big/\left(-\frac{1}{3}\right)=-16+6=-10。$$

【例 4】　求出过点 $P_1(3,\ 4)$且方向角为 $\alpha=60°$ 的直线方程。

因为 $x_1=3,\ y_1=4,\ \tan\alpha=m=\tan 60°=\sqrt{3}$，因此直线方程是 $y-4=\sqrt{3}(x-3)$，即 $y=x\sqrt{3}+4-3\sqrt{3}$。

直线方程的笛卡尔正则形式（即斜截式）　在上面最后一个例子，直线方程简化成 $y=ax+b$ 的形式。这个方程能够作为不与 y 轴平行的任何一条直线的一般方程。例如从点斜式，得到

$$y-y_1=m(x-x_1)=mx-mx_1,$$

$$y=mx+(y_1-mx_1)$$

或者
$$y=mx+c,$$
其中
$$c=y_1-mx_1。$$

笛卡尔正则形式	$y=mx+c$

正如前面已经说过的那样，平行于 y 轴的直线方程是 $x=x_1$。因为 $m=\tan\varphi$，所以很明显，mx_1 就是给出的点 P_1 和交点 S 的纵坐标之差，其中 S 是给出的直线和 y 轴的交点，因此 $c=(y_1-mx_1)$ 就是点 S 的纵坐标。只要令 $x=0$，并代到正则形式方程中就能确定这个值：$y_S=c$。

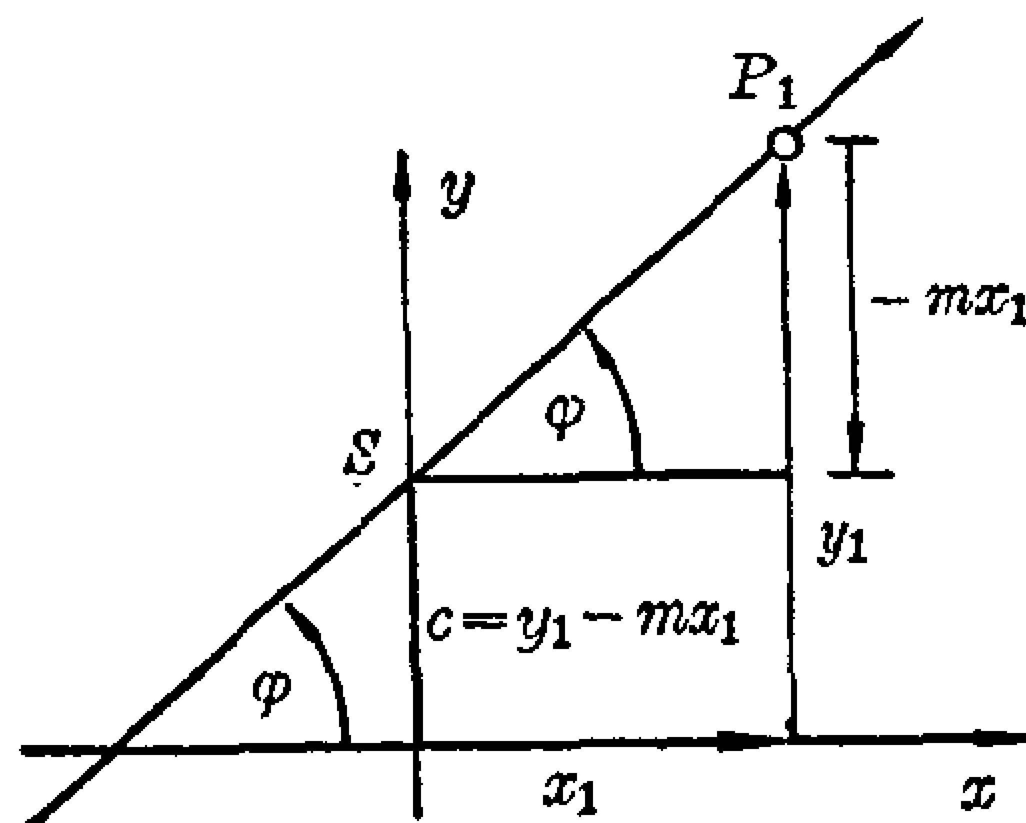


图 13.2-5　从点斜式导出笛卡尔正则形式

如果取直线 $y=mx$，并给出 x 的值 1（见图 13.2-5），那末 $y=m$；然后把这条直线沿着 y 轴方向平移一段距离 c，就得到直线 $y=mx+c$。因此，如果在与 y 轴平行且距离为 $+1$ 的直线上，从点(1, 0)开始取一条长度为 m 的线段，那末从原点到这条线段端点的直线就是直线 $y=mx$。与这条直线平行，并通过 y 轴上一条从原点出发的长度为 c 的线段的另一个端点的直线就是所需要的直线 l（见图 13.2-6）。

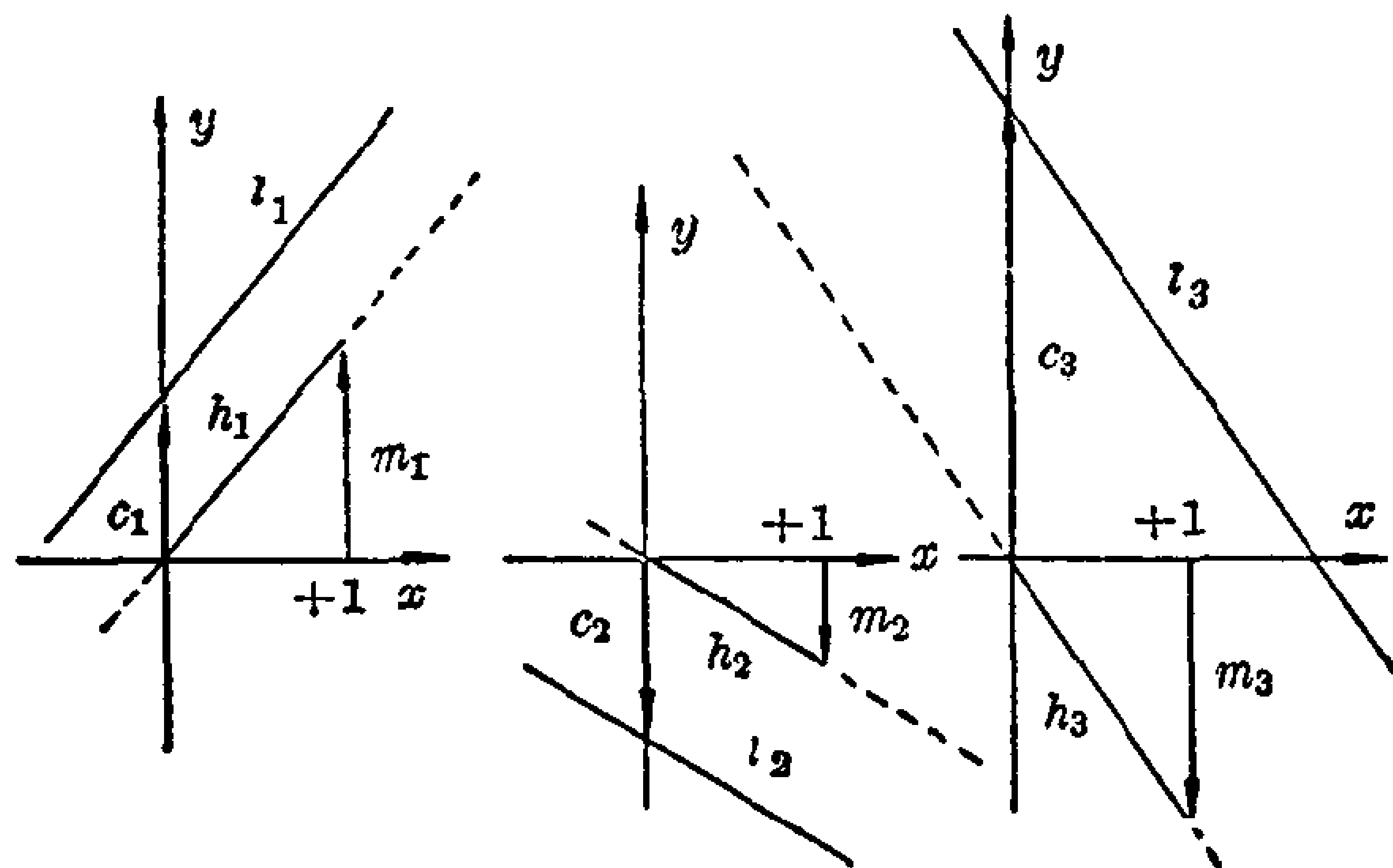


图 13.2-6　正则形式 $y=mx+c$ 的三个例子

相交成角φ，然后直线l与x轴的夹角(x, l)由法线n旋转$-\frac{\pi}{2}$而得到，即$\measuredangle(x, l)=\measuredangle(x, n)-\frac{\pi}{2}=\varphi-\frac{\pi}{2}$。法线$n$与$y$轴的交角$(y, n)$由$\measuredangle(y, n)=\varphi-\frac{\pi}{2}$给出。角$\varphi=\measuredangle(x, n)$能够取到0和$2\pi$之间的所有值。如果点$P$的笛卡尔坐标是$x=\overrightarrow{OR}$, $y=\overrightarrow{RP}$，并且离开直线l的距离$d=\overrightarrow{QP}$，那末从原点O到点P有两条向量路线，即$\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LQ}+\overrightarrow{QP}$和$\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}$。它们在法线$n$上的投影必须在大小和方向上都相等：

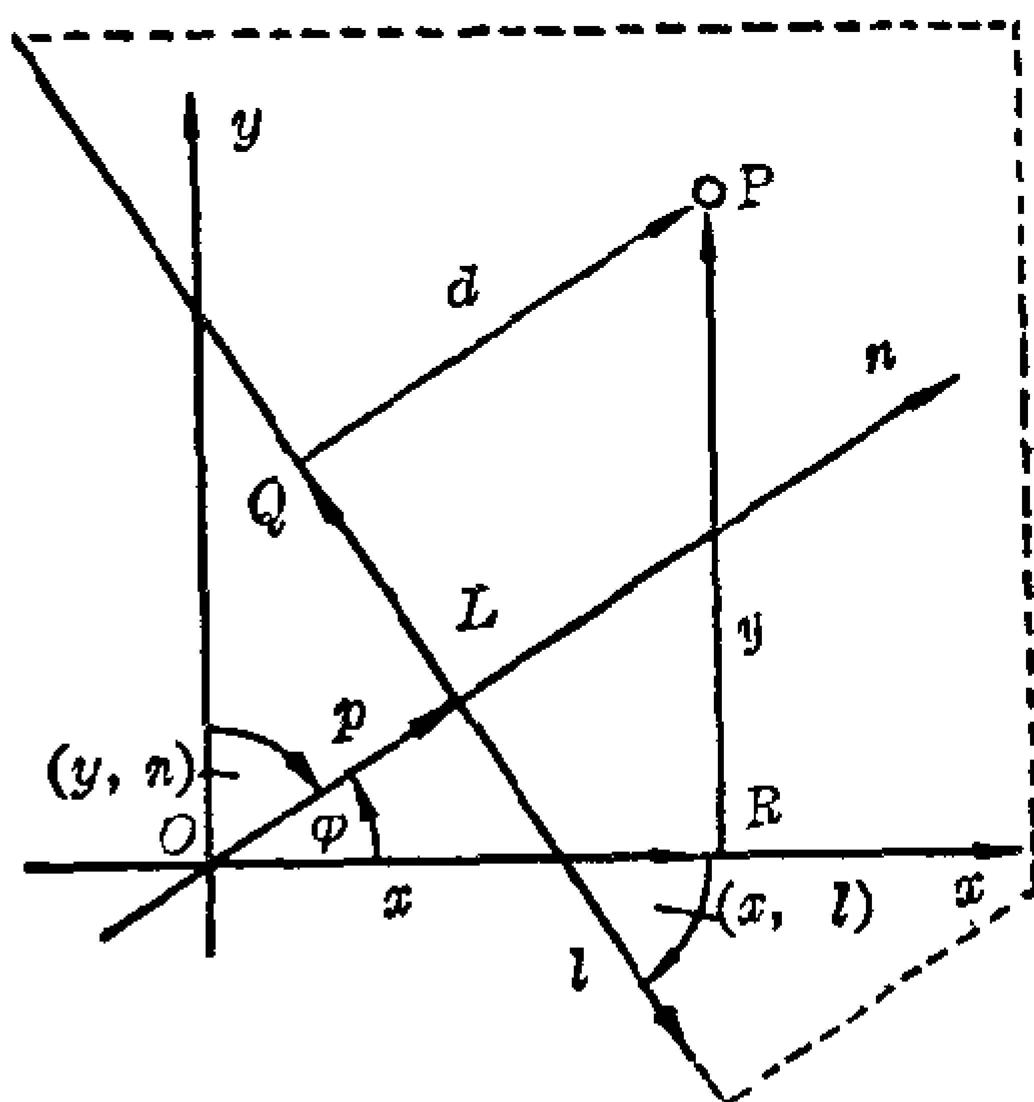


图 13.2-8 直线方程的海赛正则形式

$$p+0+d=x\cos\varphi+y\cos(y, n)=x\cos\varphi+y\sin\varphi$$

或
$$d=x\cos\varphi+y\sin\varphi-p。$$

设点P在l的正半平面中，则P点离开直线l的距离d是正的，而若P点在l的负半平面中，则距离d是负的。

在直线l上的点P离开直线l的距离$d=0$，因此直线方程就是$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$。

海赛正则形式	$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$

如上所述，方程中p的符号与直线l的方向有关。有两条直线与l平行，并且距离为$\pm\delta$，其方程是

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-(p\pm\delta)=0。$$

对$\delta=-p$，其中有一条平行线过原点，它的方程是

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi=0$$

或
$$y=-x\cot\varphi=x\tan\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=mx,$$

因此就变成了笛卡尔正则形式。然而，如果$\delta>p$，则其中一条平行线在原点的另一边，并且$p'=p-\delta$取负值。

【例 1】 如果直线l离开原点的距离是$p=3$，而且法线n的方向由

角 $\varphi=30°$ 所确定(见图 13.2-9),则海赛正则形式的直线方程是 $x\cos 30°+y\sin 30°-3=0$ 或 $x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+y\frac{1}{2}-3=0$; 用笛卡尔正则形式来写就是 $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+6$。点 $P_1(5, 7)$ 和点 $P_2(-1, -3)$ 与直线 l 的距离是:

$$d_1=\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{7}{2}-3\approx 4.33+0.5=4.83;$$

$$d_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}-3\approx-(0.87+4.5)=-5.37。$$

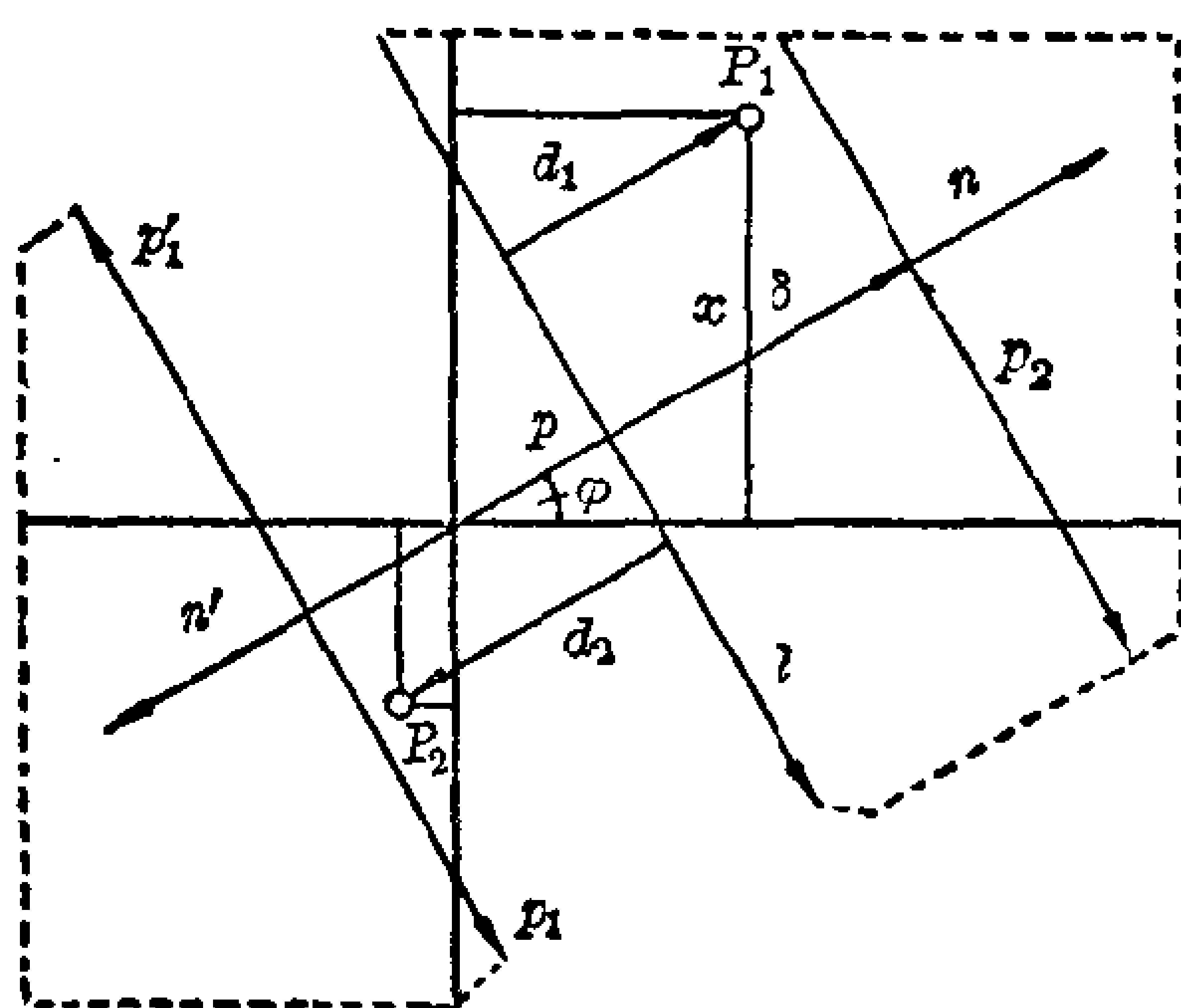


图 13.2-9　用海赛正则形式描述的直线,例 1: $\varphi=30°$, $p=3$。

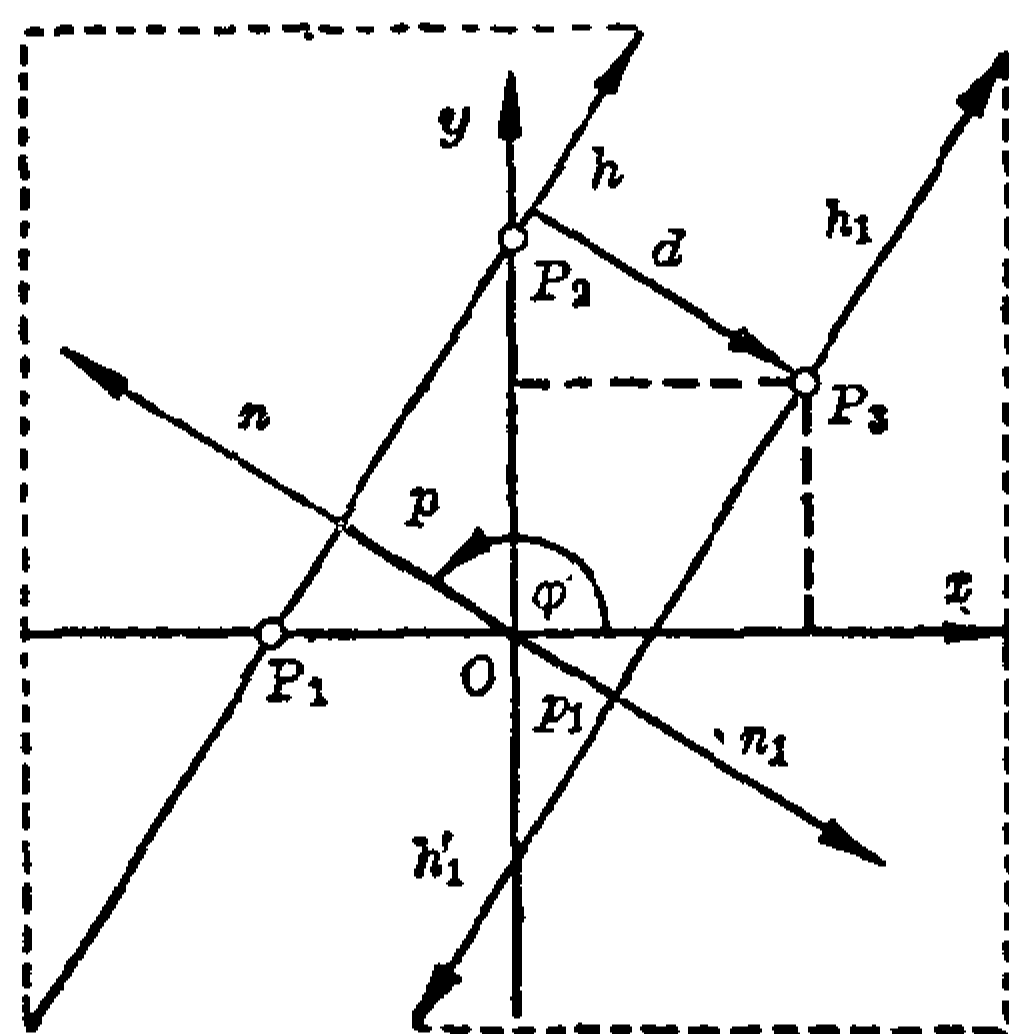


图 13.2-10　用海赛正则形式描述的直线,例 2

与 l 的距离为 $\delta=\pm 6$ 的两条平行线 p_2 和 p_1 的方程是: $x\frac{\sqrt{3}}{2}+y\frac{1}{2}-9=0$ 和 $x\frac{\sqrt{3}}{2}+y\frac{1}{2}+3=0$; 在第二个方程中, p 的值是负的。而对距离为 $p_1>0$ 且法线是 $n'=-n$ 的平行线的方程是:

$$-x\frac{\sqrt{3}}{2}-y\cdot\frac{1}{2}-3=0 \quad 或 \quad x\cos 210°+y\sin 210°-3=0。$$

【例 2】　直线 h(见图 13.2-10)与 x 轴和 y 轴相交于点 $P_1=(-5,0)$ 和 $P_2=(0, +8)$,并且此直线与 x 轴的交角是 (x, h),对这个角有 $\tan(x, h)=\frac{8}{5}=1.6$, 即 $\sphericalangle(x, h)=58°$。因 $\sphericalangle(x, h)=\varphi-\frac{\pi}{2}$, $\varphi=58°+90°=148°$。用海赛正则形式来写直线方程就是 $x\cos 148°+y\sin 148°-p=0$, 由线段 $\overrightarrow{OP_1}$ 或者 $\overrightarrow{OP_2}$ 在法线 n 上的投影就得到 p 的值:

$$p=\overrightarrow{OP_1}\cos 148°=(-5)(-\sin 58°)=5\cdot 0.8480\approx 4.24$$

或 $$p=\overrightarrow{OP_2}\cos(148°-90°)=8\cos 58°=8\cdot 0.5299\approx 4.24。$$

因此直线方程的海赛正则形式就是 $-x(0.85)+y(0.53)-4.24=0$。

点 $P_3(6, 5)$ 与直线 h 的距离 d 由 $d=-6\times 0.85+5\times 0.53-4.24=-5.09+2.65-4.24\approx -6.68$ 给出。这个距离 d 比 p 大 $p_1=6.68-4.24=2.44$。因此，过 P_3 与 h 平行的平行线 h_1 的方程是 $-x(0.85)+y(0.53)+2.44=0$，而法线为 $n_1=-n$ 的平行线方程就是 $x\cos(148°+180°)+y\sin(148°+180°)-2.44=0$ 或 $x(0.85)-y(0.53)-2.44=0$。

直线方程的一般式 直线的一般方程是 $Ax+By+C=0$，其中 A, B, C 是任意实数，但 A 和 B 不能同时为零，它的图象总是一条直线。如果 A 为零，或者 B 为零，例如 $A=0$, $B\neq 0$，则方程就变成 $By+C=0$, $y=-\frac{C}{B}$，这就是一条与 x 轴平行的直线，并且与 x 轴的距离为 $y=-\frac{C}{B}$；如果 $B=0$, $A\neq 0$，则为一条与 y 轴平行的直线，并且与 y 轴的距离为 $x=-\frac{C}{B}$。如果 A 和 B 都不是零，那末方程 $y=-\left(\frac{A}{B}\right)x-\left(\frac{C}{B}\right)$ 就是笛卡尔正则形式，其中斜率是 $m=-\frac{A}{B}$，而它在 y 轴上的截距是 $c=-\frac{C}{B}$。如果 $C=0$，那末直线过原点。

如果一个半平面只包含这样一些点 $P(x, y)$，即把这些点 $P(x, y)$ 的坐标代到线性方程 $Ax+By+C=f(x, y)$ 中去就给出正的函数值，这半平面称为正的。考虑在例 2 中的方程 $y=\left(\frac{8}{5}\right)x+8$ 对应了线性方程 $5y-8x-40$，那末对点 $P_3(6, 5)$，它的值是 $25-48-40=-63$，因此 P_3 位于负半平面中。

直线的方向是这样确定的，即顺着直线的正向画这条直线时，正半平面位于直线的左边。如果用 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 去乘方程 $Ax+By+C=0$，其中 $\varepsilon=\pm 1$：

$$\frac{\varepsilon Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{\varepsilon By}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{\varepsilon C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

从而方程就被正则化，即 x 系数和 y 系数的平方和是 1：

$$\left(\frac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=1。$$

然后这些系数就可解释为一个角 φ 的余弦和正弦值(见图 13.2-11)。如果令

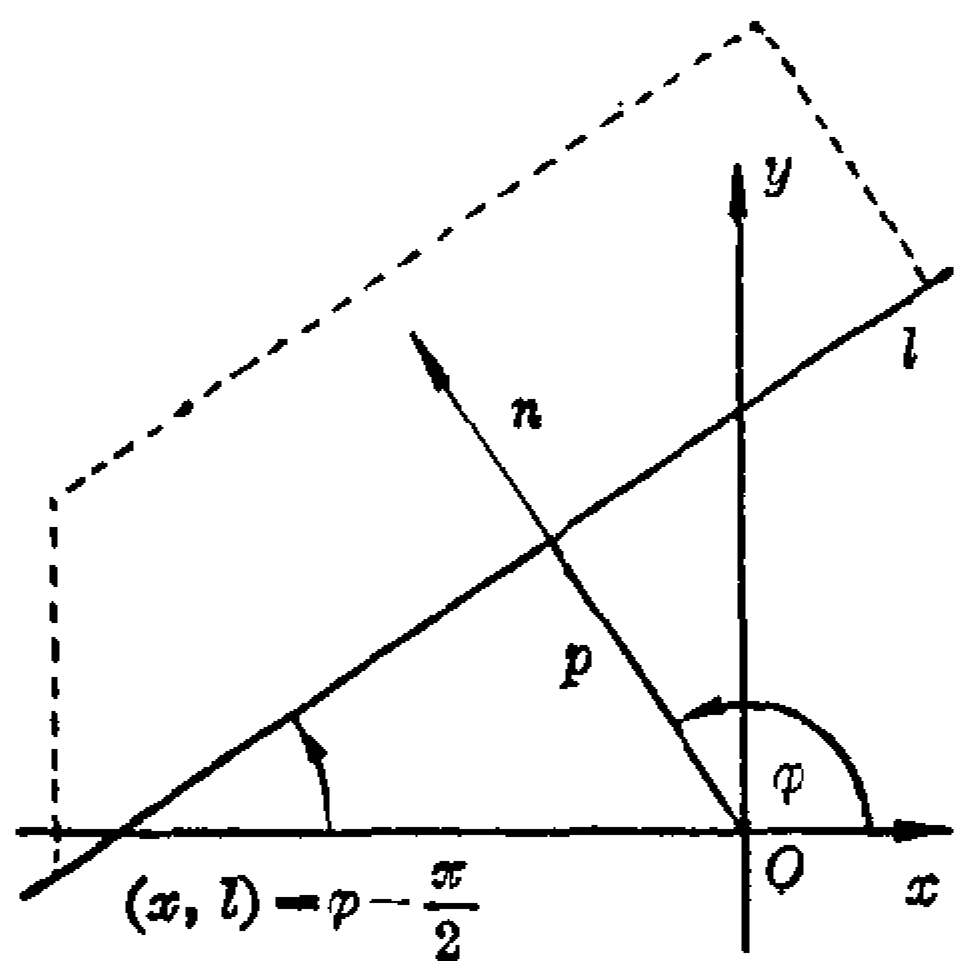


图 13.2-11　方程 $3y-2x-4=0$ 的正则化

$$\frac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\varphi,$$

$$\frac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\varphi,$$

$$\frac{\varepsilon C}{\sqrt{A^2+B^2}}=-p,$$

那末方程就变成了海赛正则形式(法线式);对 $\varepsilon=+1$, 则只有在正半平面中的点 P, 它的距离 d 才是正的。

【例】 要把方程 $3y-2x-4=0$ 化成海赛正则形式。

因为 $3\times0-2\times0-4=-4$, 因此原点属于负半平面。因为 $A=-2$, $B=+3$, $C=-4$, 所以必须用 $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ 来除每一个系数。这就得出用海赛正则形式写的直线方程:

$$-\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)x+\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)y-\frac{4}{\sqrt{13}}=0。$$

即 $\cos\varphi=-\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\varphi=\frac{+3}{\sqrt{13}}$, $\tan\varphi=-\frac{3}{2}=-1.5$; $\varphi=123°41'$; $p=\frac{+4}{\sqrt{13}}$。 从笛卡尔正则形式 $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$, 作为校验用, 我们有 $m=\tan(x,l)=\frac{2}{3}$, $(x, l)=33°41'$, 即 $\varphi-90°=33°41'$, $\varphi=123°41'$。

点和直线的结合

如果点在直线上, 或者直线通过一个点, 就称为点和直线之间的**结合**。怎样才能用解析法来说明结合性呢? 在一条直线的方程中, 例如在 $y=2x-7$ 中, x 和 y 就是在这条直线上任意一点 $P(x, y)$ 的坐标。 如果 $P_1(4, 1)$ 是其中的一点, 则它必须满足这个方程, 特别对 $x=x_1$, $y=y_1$ 也应满足这个方程。 这就称为**坐标 x_1 和 y_1 满足直线方程** $y=2x-7$; 在现在这个场合中, $1=2\cdot4-7$。相反地, 因为 $4\neq2\cdot2-7$, 因此点 $P_2(2, 4)$ 的坐标不满足直线方程。很明显, 这些考虑与直线方程所取的形式无关, 而

总是保持正确的。

点 $P_1(x_1, y_1)$位于直线上的充要条件就是它的坐标满足这条直线的方程。

【例】 1. 点 $P(2, 3)$不在直线 $2x-\frac{y}{4}+8=0$ 上，这是因为 $2\cdot2-\frac{3}{4}+8\neq0$。

2. 直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-17=0$ 不通过原点，这是因为 $\frac{0}{2}+\frac{0}{3}-17\neq0$。

3. 点 $P_1(57, 88)$ 位于直线 $y-8=2\cdot(x-17)$ 上，因为 $88-8=2\cdot(57-17)$。

4. 过点 $P_1\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 和 $P_2\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 的直线方程是 $\frac{y-\frac{3}{2}}{(x-0)}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2}$ 或 $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$。它与 x 轴相交于点 S，其纵坐标是 $y_0=0$，从而其横坐标是 $x_0=-3$。于是点 $S(-3, 0)$就是直线 $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ 与 x 轴的交点，$x_0=-3$ 是函数的零点。

5. 如果横坐标 $x_1=5$ 的点 P_1 在直线 $y=\frac{2x}{3}-2$ 上，那末它的纵坐标 y 必须具有值 $y_1=\frac{2x_1}{3}-2=\frac{10}{3}-2=\frac{4}{3}$。

6. 求直线 l_1，它通过点 $P_1(6, 4)$ 且与点 $P_2(3, -5)$ 的距离是 $d=3$。

借着以线段 P_1P_2 为直径的泰勒斯圆，用几何法能够作出这条直线（见图 13.2-12）。

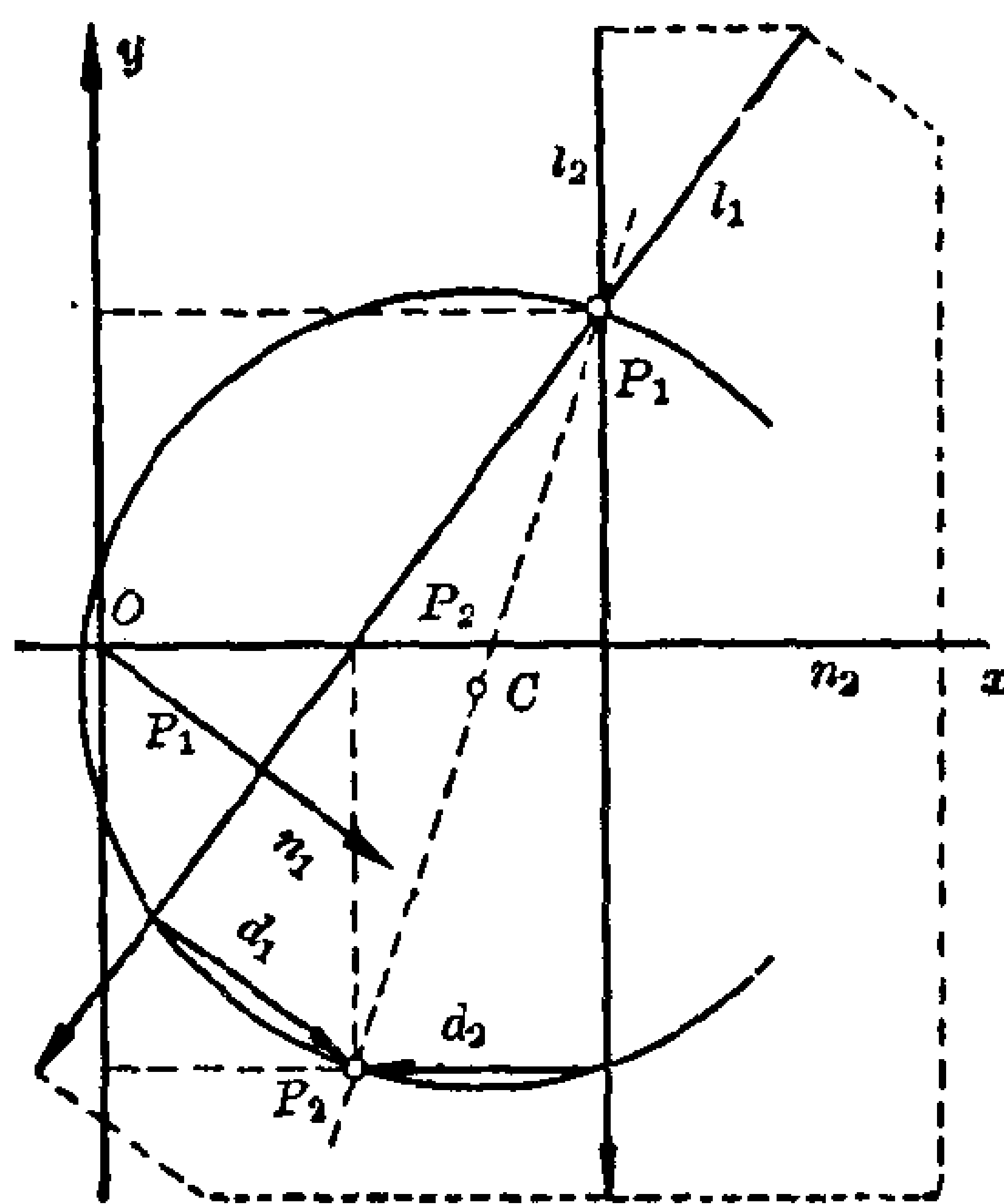


图 13.2-12　过点 P_1 的直线 l_1 和 l_2 与点 P_2 的距离是 d_1 和 d_2

用这种方法确定了两条直线 l_1 和 l_2；按照从原点画垂线的方向，它们的距离或者是正的 $(d_1=+3)$ 或者是负的 $(d_2=-3)$。同时必须注意到，如果解是可能有的话，那末**给定的距离 d 必须小于线段 P_1P_2 的长度**。直线方程建议采用海赛正则

形式 $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$，而要确定的三个数是 $\cos\varphi$，$\sin\varphi$ 和 p。因为直线通过点 $P_1(6,4)$ 且与点 $P_2(3,-5)$ 的距离是 $d=\pm3$，因此

$$\left|\begin{array}{l}6\cos\varphi+4\sin\varphi-p=0\\3\cos\varphi-5\sin\varphi-p=\pm3\end{array}\right|\begin{array}{l}+\\-\end{array}\rightarrow 3\cos\varphi+9\sin\varphi=\mp3$$

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1 \longleftarrow \cos\varphi=\mp1-3\sin\varphi$$

$$1\pm6\sin\varphi+9\sin^2\varphi+\sin^2\varphi=1 \qquad \cos\varphi_1=\pm4/5,\ \cos\varphi_2=\mp1$$

$$10\sin^2\varphi\pm6\sin\varphi=0 \qquad p_1=\pm2^2/_5,\quad p_2=\mp6$$

$$\sin\varphi_1=\mp3/5,\ \sin\varphi_2=0$$

选择 $p_1=+2\frac{2}{5}$ 和 $p_2=+6$ 就确定了两条直线 l_1 和 l_2 的方向；令 $\cos\varphi_1=+\frac{4}{5}$，$\sin\varphi_1=-\frac{3}{5}$，$p_1=+2\frac{2}{5}$ 和 $\cos\varphi_2=+1$，$\sin\varphi_2=0$，$p_2=+6$，我们就得到了所需要的方程 $+\frac{4x}{5}-\frac{3y}{5}-2\frac{2}{5}=0$ 和 $x-6=0$。或者，用笛卡尔正则形式来写，就是 $y=4\frac{x}{3}-4$ 和 $x=6$。如果把 $x=0$，$y=0$ 代到两个方程 $f_1(x,y)=-\frac{3y}{5}+\frac{4x}{5}-2\frac{2}{5}$ 和 $f_2(x,y)=x-6$ 中去，可以看到原点 O 位于两条直线的负半平面中。

13.3　若干直线

在平面几何中，我们已经知道，在平面中两条直线的相互位置可以借着平行和距离概念，或者交点和夹角的概念来进行描述。在解析几何中，两条直线对应的特征能够从它们的直线方程来得到。

使用两条直线的笛卡尔正则形式 $y=m_1x+c_1$ 和 $y=m_2x+c_2$，它们的方向由直线的斜率 m_1 和 m_2 所表征。当且仅当 $m_1=m_2$ 时，这两条直线相互平行。在另一方面，如果用海赛正则形式给出这两条直线的方程 $x\cos\varphi_1+y\sin\varphi_1-p_1=0$ 和 $x\cos\varphi_2+y\sin\varphi_2-p_2=0$，如果它们的线性项系数乘上一个公共因子 $\varkappa$ 是相等的，即 $\cos\varphi_1=\varkappa\cos\varphi_2$ 和 $\sin\varphi_1=\varkappa\sin\varphi_2$，那末这两条直线互相平行。因为把一般线性方程正则化就能得到这些系数，因而由 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 这种形式给出的两条平行线就适合同样的条件：$A_1B_2-A_2B_1=0$

如果在一个线性方程，例如 $Ax+By+C=0$ 中，把 x 和 y 解释为一个给定点的坐标，而把系数 A，B，C 看成参数，那末这个方程就意味着从

平面上所有的点(x, y)的集合中挑出一个子集：这个子集由这样一些点所组成，这些点的坐标满足由参数的比例$A:B:C$所给出的条件。从前面就已经看到这个子集把一条直线作为承载体。反过来，可以把A, B, C看作为齐次坐标，其中A和B不同时为零。那末x, y就是参数，它们从平面上所有直线(A, B, C)或$(\cos\varphi, \sin\varphi, p)$组成的集合中挑出一个子集，这个子集是由把点$(x, y)$作为承载体[即通过点$(x, y)$]的直线所组成。这些直线就形成了一个线束。在直线上的一点P按给出的比例把这条直线上其他两点P_1和P_2之间的线段分成两段，如果我们给出了这一点P的两个坐标之间所必须适合的关系，那末我们立刻就能得到一条直线的齐次坐标之间所必须适合的关系，如果对应的两条直线相互平行的话。

交点和交角

确定两条直线的交点 以一般形式给出两条直线$A_1x+B_1y+C_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2=0$，要求出这两条直线的交点$P_0(x_0, y_0)$的坐标x_0和y_0。P_0作为两条直线的交点就必须同时在这两条直线上，因此它的坐标x_0和y_0必须同时满足这两条直线的方程。所以解下面的方程组就得到交点：

$$\left|\begin{aligned} A_1x_0+B_1y_0+C_1=0 \\ A_2x_0+B_2y_0+C_2=0 \end{aligned}\right|,$$

这个方程组可以按照一般法则进行求解(参看 **I.**第4章)。如果这个方程组有解(x_0, y_0)，那末这就给出了交点坐标。如果因为方程组不相容而无解，那末直线相互平行。如果因为方程组线性相关而有无穷多个解，那末两条直线重合。

【例】 1．两条直线$-3x+3y-6=0$和$2x+3y+9=0$交于那一点？下面的安排说明了方程组的求解过程。

$$\left|\begin{aligned} -3x_0+3y_0-6=0 \\ 2x_0+3y_0+9=0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} - \\ + \end{aligned} \quad \begin{aligned} -5x_0+15&=0 \\ x_0&=-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3(-3)+3y_0-6=0 \\ y_0=-1 \end{aligned}$$

直线的交点是$P_0(-3, -1)$(见图13.3-1)。

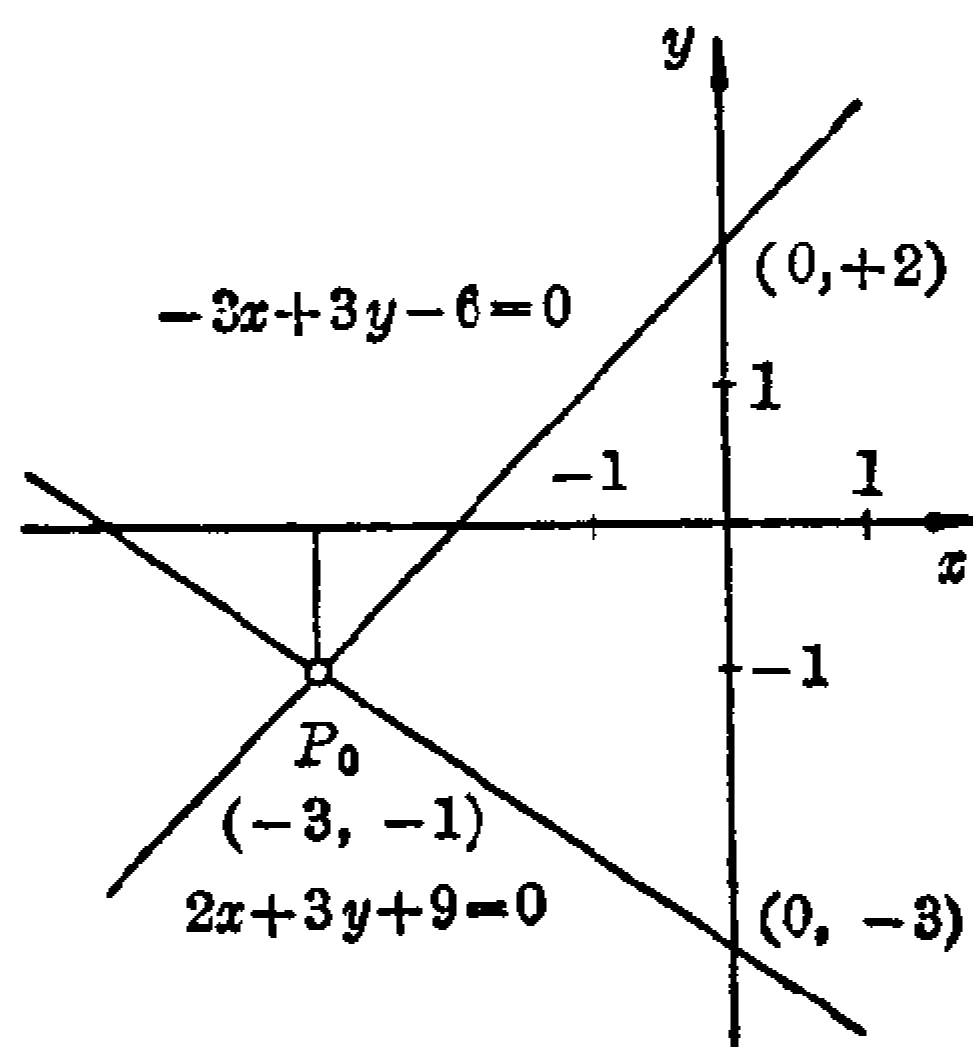


图 13.3-1　确定两条直线的交点

2．为了求出以笛卡尔正则形式给出的两条直线，例如 $y=-3x+14$，$y=-x-1$ 的交点 P_0，最常用的解法是令方程的右边相等。在所给的例子中，直线的交点是 $P_0(7.5, -8.5)$。

3．直线 $3x+y-7=0$ 和 $2x-y-3=0$ 的交点是 $P_0(2, 1)$。

4．直线 $2x-3y+5=0$ 和 $3y-2x+2=0$ 互相平行，原点都属于两条直线的正半平面。用海赛正则形式来写，方程组就变成：

$$\left|\begin{aligned}2x_0-3y_0+5=0\\-2x_0+3y_0+2=0\end{aligned}\right| \Rightarrow \left|\begin{aligned}+2x_0/\sqrt{13}-3y_0/\sqrt{13}+5/\sqrt{13}=0\\-2x_0/\sqrt{13}+3y_0/\sqrt{13}+2/\sqrt{13}=0\end{aligned}\right|$$

直线相互之间的距离是 $7/\sqrt{13}$。

5．方程 $0.8x+0.4y-1.2=0$ 和 $2x+y-3=0$ 代表了同一条直线，第二个方程除以 $\frac{5}{2}$ 就得到第一个方程。在这个方程组中，这两个方程线性相关，直线重合。

6．直线 $y=2x-8$ 和 $y=2x+12$ 相互平行，这是因为 $m_1=2=m_2$ 的缘故。类似地，直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ 和 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 也相互平行，这是因为这两条直线的笛卡尔正则形式是 $y=-\frac{3x}{2}+6$ 和 $y=\frac{-3x}{2}+3$ 的缘故。

7．求出过点 $P_1(2, -1)$ 且平行于直线 $y=2x-3$ 的直线方程。对于所要求的直线，已经给出一个点和斜率 $m=2$，因而可用点斜式，得出直线方程 $y+1=2(x-2)$。

两条直线的交角　两条直线 l_1 和 l_2 的交角 $\psi=\measuredangle(l_1, l_2)$，最简单的办法是从海赛正则形式来求得；从方程 $x\cos\varphi_1+y\sin\varphi_1-p_1=0$ 和 $x\cos\varphi_2+y\sin\varphi_2-p_2=0$，立刻得到 $\psi=\measuredangle(l_1, l_2)=\varphi_2-\varphi_1$。

从笛卡尔正则形式来求得角 ψ，由于受到反正切函数主值的限制，最多只会相差一个附加的常数 $+\pi$。如果直线方程是 $y=m_1x+c_1$ 和 $y=$

m_2x+c_2，那末 $m_1=\tan\alpha_1$ 和 $m_2=\tan\alpha_2$，这里 $\alpha_1=\measuredangle(x, l_1)$，$\alpha_2=\measuredangle(x, l_2)$，因此 $\measuredangle(x, l_1)+\measuredangle(l_1, l_2)=\measuredangle(x, l_2)$ 或者 $\measuredangle(l_1, l_2)=\psi=\alpha_2-\alpha_1$。用正切函数的加法定理就得到

$$\tan\psi=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2} \quad 或者 \quad \boxed{\tan\psi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}}$$

把直线相互交换位置，就得到 $\psi'=\measuredangle(l_2, l_1)=\alpha_2-\alpha_1=-\psi$ 或者 $\psi'=\pi-\psi$。

这个条件包含了直线相互平行的条件：从 $\psi=0$ 就得到 $m_1=m_2$，这是早就发现了的。对 $\psi=\frac{\pi}{2}$，就得到两条直线相互垂直的条件，因为 $\tan\psi=\infty$，分母必须为零，即 $1+m_1m_2=0$。

正交条件	$m_2=-\dfrac{1}{m_1}$

【例】 1．直线 $y-2=5(x-13)$ 和 $y=-\frac{x}{5}+18$ 相互垂直，这是因为它们的方程用笛卡尔正则形式来写就是 $y=5x-63$ 和 $y=-\frac{1}{5}x+18$，即 $m_1=5$ 正好是 $m_2=-\frac{1}{5}$ 的负倒数，或者说 $m_2=-\frac{1}{m_1}$。

2．求一条直线，它通过点 $P_1(1, 1)$ 且与 $y=-\frac{2x}{3}+3$ 垂直。给出直线的斜率是 $m_1=-\frac{2}{3}$，因此所要求的直线斜率为 $m_2=-\frac{1}{m_1}=+\frac{3}{2}$。于是方程的点斜式就是 $\frac{y-1}{x-1}=+\frac{3}{2}$ 或 $2(y-1)=3(x-1)$，即 $y=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}$。

3．直线 $y=-2x+16$ 和 $y=-\frac{3x}{5}+\frac{3}{5}$ 的交角是 $\psi=32°28'$，这是因为 $m_1=-2$ 和 $m_2=-\frac{3}{5}$，因此 $\tan\psi=\dfrac{-\frac{3}{5}+2}{1+2\times\frac{3}{5}}=\frac{7}{11}=0.6364$；从正切函数表就得到上面给出的 ψ 值。如果从 $m_1=-2=\tan\alpha_1$ 得到 $\alpha_1=-63°26'$ 和从 $m_2=-0.6=\tan\alpha_2$ 得到 $\alpha_2=-30°58'$，那末也能从下面的式子得到 ψ 的值：$\alpha_2-\alpha_1=-30°58'+63°26'=32°28'$。

4. 直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ 和 $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$（截距式）的笛卡尔正则形式是 $y=-\frac{5}{4}x+5$ 和 $y=\frac{2x}{3}-2$（见图 13.3-2）。因为 $m_1=-\frac{5}{4}$ 和 $m_2=+\frac{2}{3}$，因此由下面式子给出交角 ψ 的值：

$$\tan\psi=\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{4}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)}=\frac{8+15}{12-10}=\frac{23}{2}=11.5;\ \psi=85°2'。$$

检验：$\tan\alpha_1=-\frac{5}{4}$，$\alpha_1=-51°20'$；$\tan\alpha_2=+\frac{2}{3}$，$\alpha_2=+33°41'$；$\psi=\alpha_2-\alpha_1=85°1'$。

如果要求出一条直线的方程，此直线通过一个给定的点，并且与一条给定的直线的交角是给定的角 ψ，也就是说 $\tan\psi$ 和 m_1 是给出的；通过求解 $\tan\psi$ 的公式我们就能得到所需要的值 $m_2=\frac{(m_1+\tan\psi)}{(1-m_1\tan\psi)}$，因此用点斜式就能得到所需要的直线。

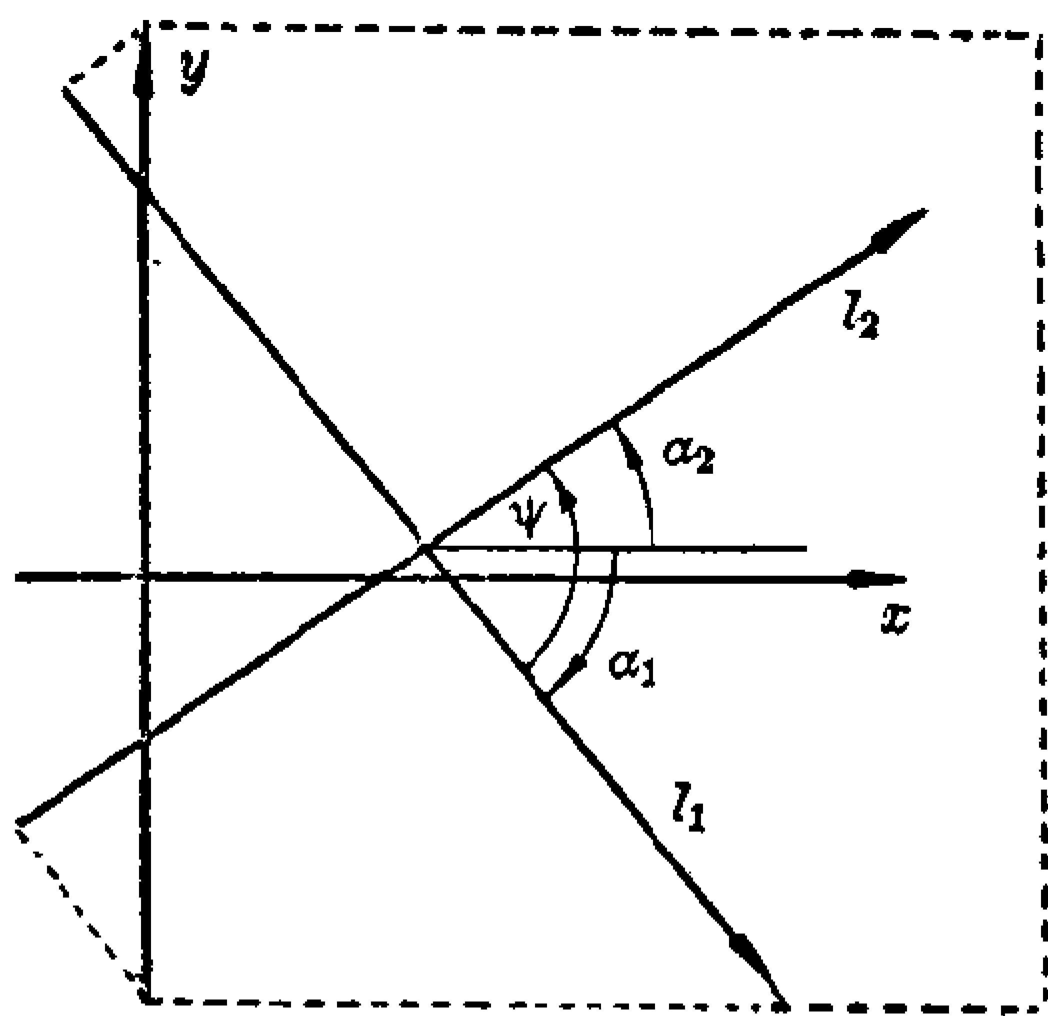


图 13.3-2　直线方程 $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ 和 $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$ 的图形和这两条直线之间的交角 ψ

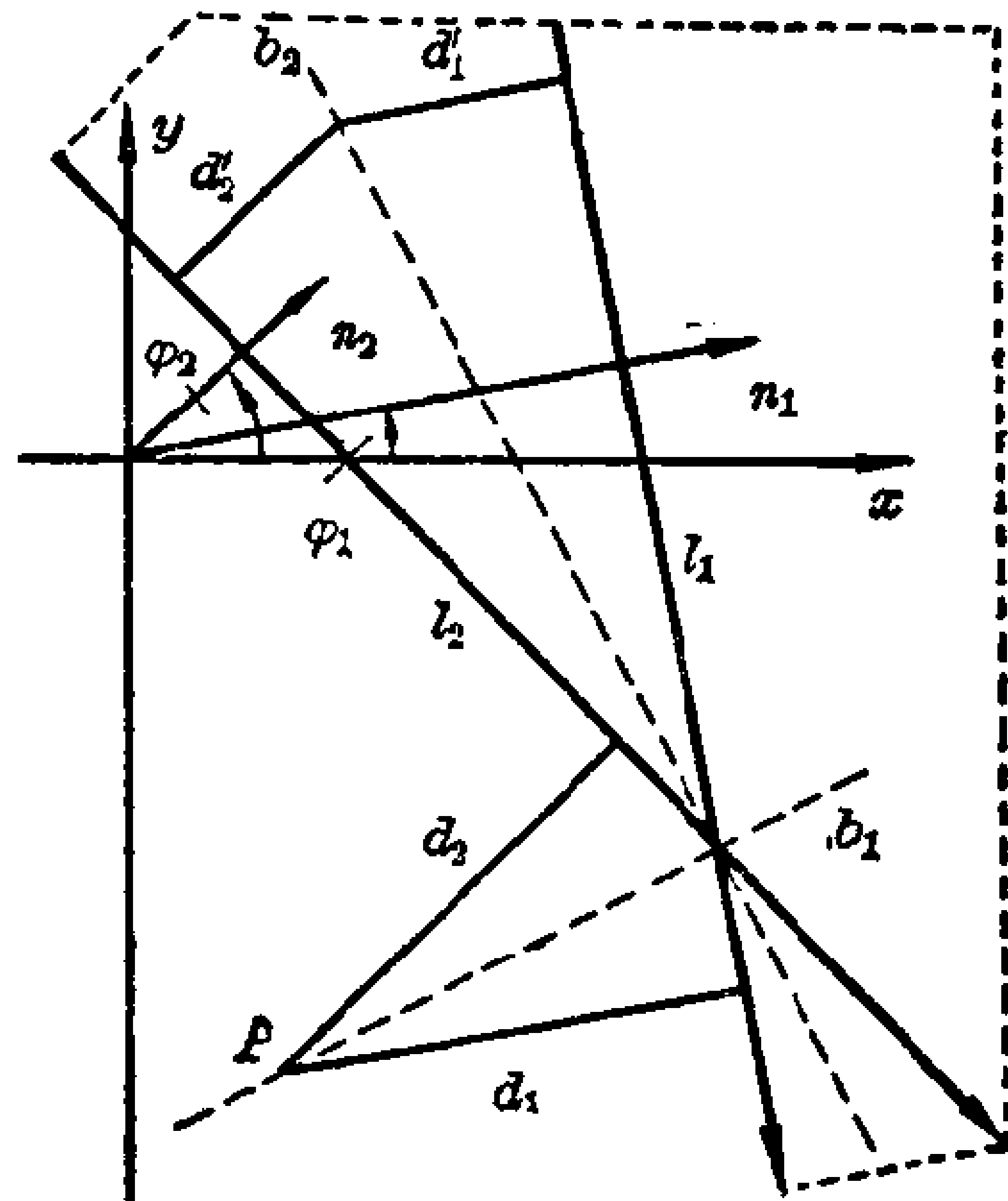


图 13.3-3　确定角平分线

角平分线的方程　两条相交的直线 l_1 和 l_2 有两条角平分线 b_1 和 b_2（见图 13.3-3）。角平分线的定义是与这两条直线有相同距离的那些点

的轨迹。对这个问题建议使用海赛正则形式，于是这两条直线由下面式子给出:

$$x\cos\varphi_1+y\sin\varphi_1-p_1=0 \quad 和 \quad x\cos\varphi_2+y\sin\varphi_2-p_2=0。$$

这两条直线把平面分成四部分，其中的一个部分属于这两条直线的正半平面，这个部分被 b_1 所平分。在这一部分中，b_1 上的每一点与 l_1 的距离是正的 d_1 并且与 l_2 的距离是正的 d_2。而在它的对顶角部分中，b_1 上每一点 P 与 l_1 和 l_2 的距离都是负的。在确定距离的方程 $d_1=\varepsilon_1(x\cos\varphi_1+y\sin\varphi_1-p_1)$ 和 $d_2=\varepsilon_2(x\cos\varphi_2+y\sin\varphi_2-p_2)$ 中，$\varepsilon_1=\pm1$ 和 $\varepsilon_2=\pm1$ 具有相同的符号；从 $d_1=d_2$ 就能得到角平分线 b_1 的方程为 $x(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)+y(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)-(p_1-p_2)=0$。在其余两部分中，角平分线 b_2 上的每一点与其中一条直线的距离是正的，而与另一条直线的距离是负的，即 $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$，或者说 $d_1'=-d_2'$；由此得到 b_2 的方程是

$$x(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)+y(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)-(p_1+p_2)=0。$$

两条相交直线的两条角平分线的方程	$x(\cos\varphi_1\pm\cos\varphi_2)+y(\sin\varphi_1\pm\sin\varphi_2)-(p_1\pm p_2)=0$ 选择负号所给出的角平分线等分属于两条直线的正半平面

【例】 给出直线方程 $x+y-2=0$ 和 $7x+y-32=0$，用海赛正则形式表示就是 $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=0$ 和 $\frac{7x}{5\sqrt{2}}+\frac{y}{5\sqrt{2}}-\frac{32}{(5\sqrt{2})}=0$。于是两条角平分线的方程是

$$x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{7}{5\sqrt{2}}\right)+y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\pm\frac{32}{5\sqrt{2}}\right)=0$$

或

$$x(5\pm7)+y(5\pm1)-(10\pm32)=0;$$

用笛卡尔正则形式来表示，这两条直线的方程就是 $y=\frac{x}{2}-\frac{11}{2}$ 和 $y=-2x+7$。

三角形和多边形

三角形的面积 如果 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 和 $P_3(x_3, y_3)$ 是三角形的顶点（见图13.3-4），那末它的面积 A 就是 $A=\frac{1}{2}|P_1P_2|\cdot h_3=\frac{1}{2}|P_1P_2|\cdot|P_1P_3|\cdot\sin\alpha$，其中 h_3 是 P_3 与 P_1P_2 的距离，而 α 是按照坐标系旋转方

在多边形内部有一任意点 P，如果用直线把 P 与多边形的所有顶点连起来，就把多边形的面积分成 n 个三角形，然后再按照画多边形的方向来画三角形，那末在多边形内部的三角形的边按互相相反的方向各画一次（见图 13.3-6)。一个非凸多边形也能用这两种方法中的任一种来分成三角形，然而这时会产生包含了多边形外点的对角线和"内"边（见图 13.3-7)。如果画一个三角形的方向与画出多边形的方向相反，则把此三角形的面积看成是负的，例如在五边形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 中的三角形 $P_1P_2P_3$ 就是这种三角形，那末只要这个多边形不要卷起来，即它的边不相交，我们仍然可以得到。**多边形的面积就是这些三角形面积的代数和。** 在图 13.3-7 中的四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 就是卷起来的。我们必须给这个多边形赋予一个有向的面积，这个面积是由一个正的面积和一个负的面积所组成；因而一个卷起来的"平行四边形"的面积是零。

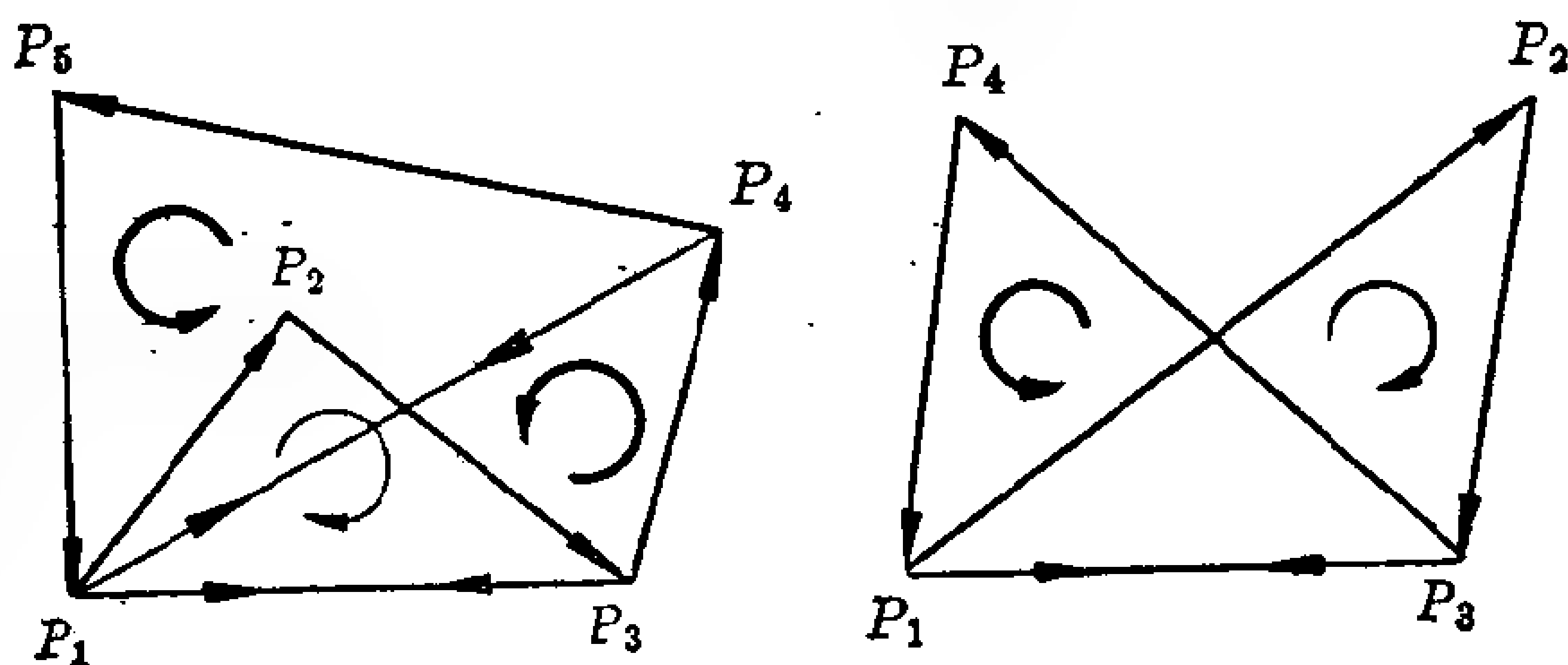


图 13.3-7　把一个非凸五边形和一个非凸四边形分别分成三个三角形和两个三角形

三角形的重心　在一个顶点是 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 的三角形中，边的中点是 $M_1\left[\frac{1}{2}(x_2+x_3), \frac{1}{2}(y_2+y_3)\right]$, $M_2\left[\frac{1}{2}(x_3+x_1), \frac{1}{2}(y_3+y_1)\right]$, $M_3\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right]$。在中线 $s_1=|P_1M_1|$, $s_2=|P_2M_2|$, $s_3=|P_3M_3|$ 上，由分割比 λ_1, λ_2, λ_3 确定了点 G_1, G_2, G_3（见图 13.3-8)；它们的坐标是

$$\xi_1=\frac{x_1+\lambda_1(x_2+x_3)/2}{1+\lambda_1},\quad \eta_1=\frac{y_1+\lambda_1(y_2+y_3)/2}{1+\lambda_1},$$

$$\xi_2=\frac{x_2+\lambda_2(x_3+x_1)/2}{1+\lambda_2},\quad \eta_2=\frac{y_2+\lambda_2(y_3+y_1)/2}{1+\lambda_2},$$

$$\xi_3=\frac{x_3+\lambda_3(x_1+x_2)/2}{1+\lambda_3},\quad \eta_3=\frac{y_3+\lambda_3(y_1+y_2)/2}{1+\lambda_3}。$$

结果表明，明显地任意选取 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$，这三对坐标就变成相等了，即它们代表了同一点 $G=G_1=G_2=G_3$。

三角形的三条中线相交于一点 G，这一点 G 按分割比 $|P_iG|:|GM_i|=2:1$ 把每一条中线分成两段，这叫作三角形的重心。

重心的坐标是三角形三个顶点的算术平均值。

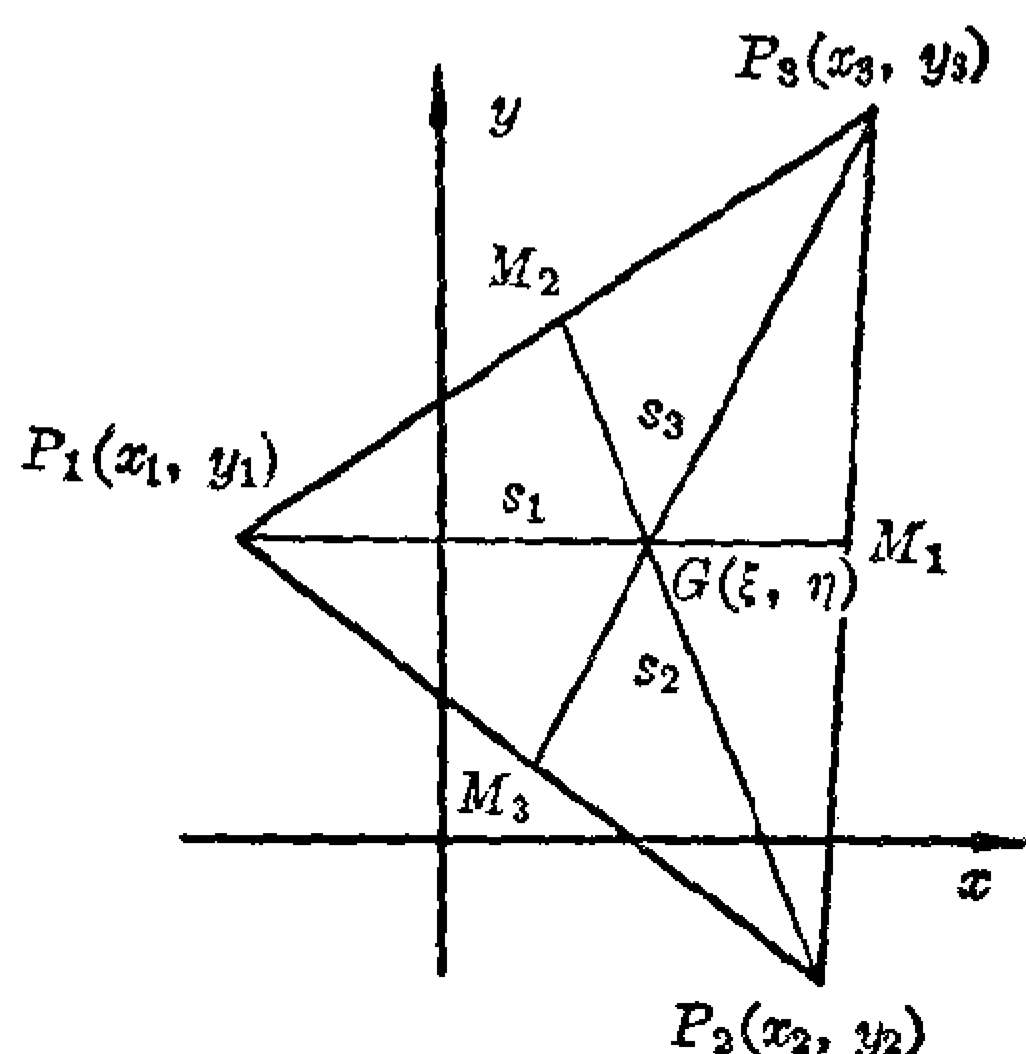


图 13.3-8　三角形的重心

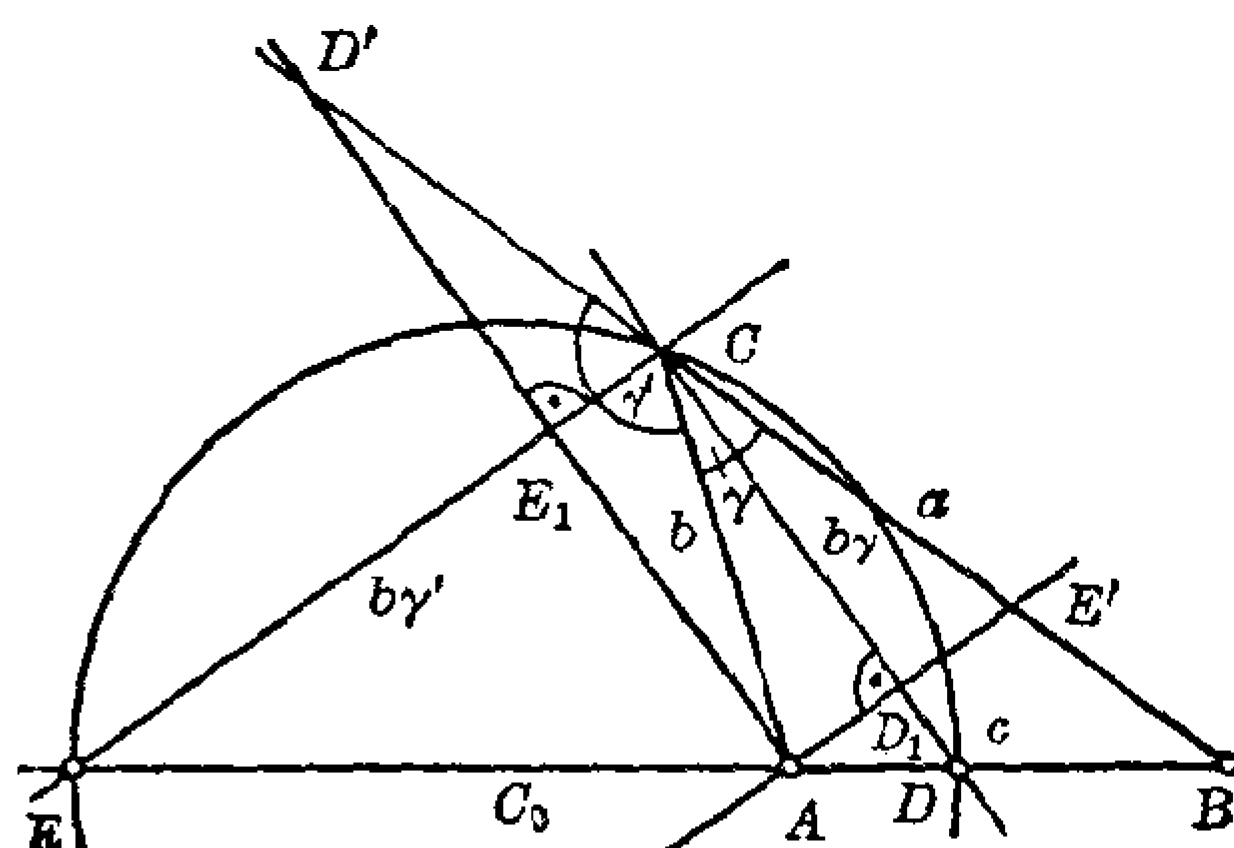


图 13.3-9　内角 γ 和对应的外角 γ' 的角平分线

三角形重心的坐标	$\xi=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$\eta=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$

【例】 在三角形 $P_1(-5, 3)$，$P_2(-2, -1)$，$P_3(7, 8)$中，重心的坐标是 $\xi=(-5-2+7)/3=0$；$\eta=(3-1+8)/3=3\frac{1}{3}$。

阿波罗尼斯(Apollonius)定理　在证明这条定理之前，先引进一条关于三角形角平分线的引理。

在三角形中，内角平分线和对应的外角平分线都按照夹此角的两条边的比把对边分成两段。

在图 13.3-9 中，三角形 ABC 的角 γ 和角 γ' 的角平分线用 $b\gamma$ 和 $b\gamma'$ 来表示。因为 γ 和 γ' 是互补角，因此 $b\gamma$ 和 $b\gamma'$ 互相垂直。直线 AD' 和 AE' 过 A 点并且与 $b\gamma$ 和 $b\gamma'$ 平行，AD' 和 AE' 还与角平分线相交于 D_1 和 E_1，交角是直角。从两对全等三角形 $\triangle AD_1C\cong\triangle E'D_1C$ 和 $\triangle AE_1C\cong\triangle D'E_1C$，得到 $|CE'|=|CA|=|CD'|$。直线 BD' 被平行线 AD'，DC' 所

截，而直线 BE 被平行线 CE, $E'A$ 所截。因此，由截距定理：

1. $|AD|:|DB|=|D'C|:|CB|=|CA|:|CB|$

和

2. $|AE|:|EB|=|E'C|:|CB|=|CA|:|CB|$。

如果考虑在边 C 上线段的方向，那末 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$ 和 $\overrightarrow{EB}$ 具有相同的符号，而 $\overrightarrow{AE}$ 有相反的符号。这样两条角平分线与对边的交点 D 和 E 把线段 $\overrightarrow{AB}$ 分成的比例 λ 具有相同的数值，但有相反的符号：$\lambda_1(ABD)=\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{DB}|}=+(b:a)$ 而 $\lambda_2=(ABE)=\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{EB}|}=-(b:a)$。这两点 D 和 E 叫作**调和共轭点**，这两点以相同的比在线段 $\overrightarrow{AB}$ 的内部和外部把线段 $\overrightarrow{AB}$ 分成两段，并且把这两个分割比的比 $\lambda_1:\lambda_2$ 叫作**交比** $(A, B; D, E)$。因此，对调和共轭点而言，交比之值是 $-1=[+(b:a)]:[-(b:a)]$。

阿波罗尼斯定理：对三角形 ABC，给出边 $|AB|$ 以及另外两条边之比 $|AC|:|BC|=\lambda$ 是常数，那末所有满足上述条件的三角形 ABC 的顶点 C 的轨迹是以线段 $|DE|$ 为直径的一个圆，而端点 D 和 E 就是分割比为 λ 的边 $|AB|$ 的内外定比分点。

在证明上面定理的图 13.3-9 中，如果把线段 AB 和它的内外定比分点 D 和 E 看作给定的，不管这一个三角形 ABC，当然也存在其他的三角形 ABC，它也具有角 γ 和 γ' 的角平分线通过 D 和 E 这种性质。因为直线 CD 和 CE 是角平分线，因而它们必须相互垂直，即 C 点必在以线段 DE 为直径的圆周上。而对所有这些点 C，它与两个定点 A 和 B 的距离

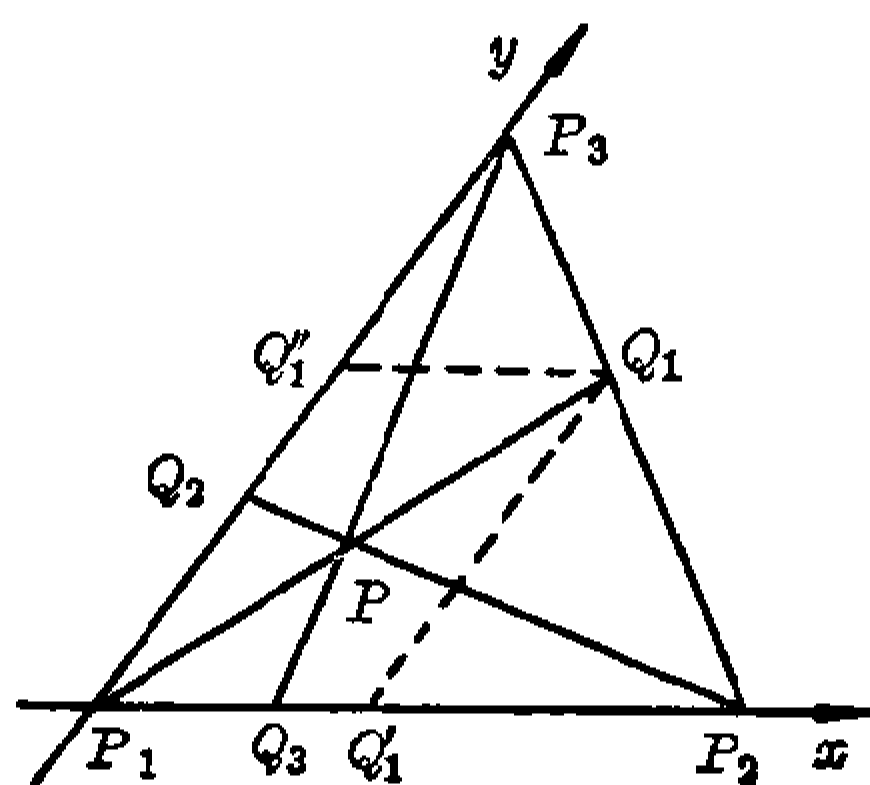


图 13.3-10　西瓦定理

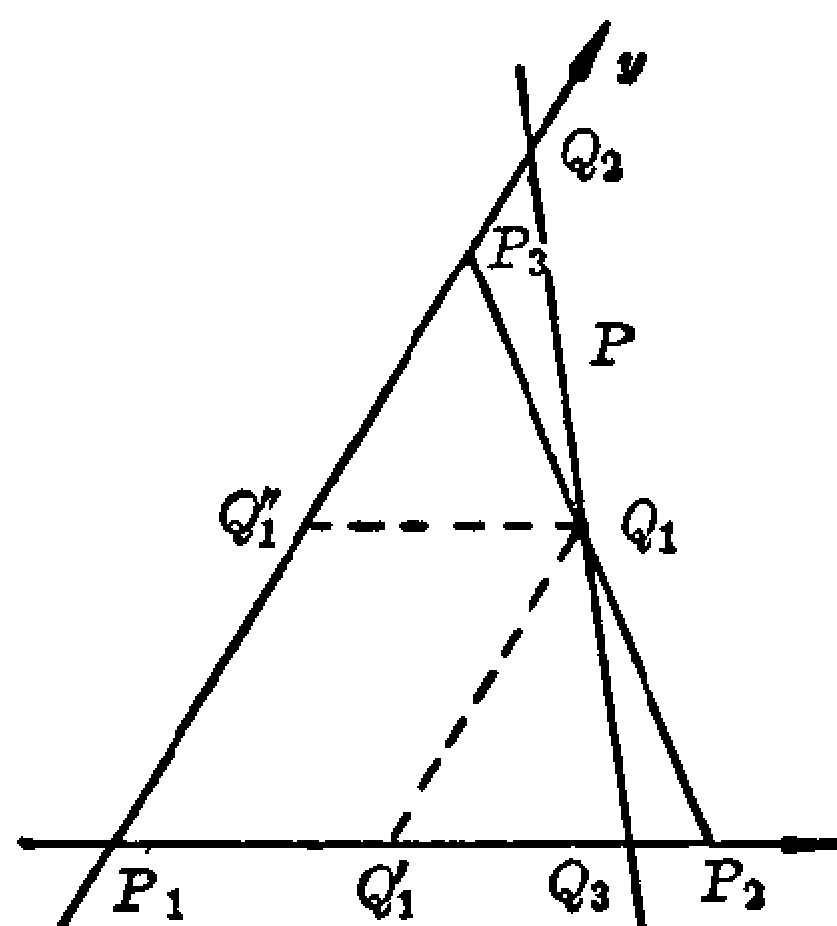


图 13.3-11　梅内劳斯定理

之比 $(b:a)=\lambda$ 都具有相同的值 $\lambda=|AD|:|DB|$。因此正如阿波罗尼斯定理所说明的那样，这个圆就是所有的点 C 的轨迹。

西瓦(Ceva)定理和梅内劳斯(Menelaus)定理 这些定理以乔万尼·西瓦(1648～1734年)和亚历山大里亚的梅内劳斯(约公元前98年)的名字命名。它们的对偶特性(参看 **II**. 第12章)能从下面两个命题中看出(见图13.3-10和图13.3-11)。

西瓦定理 过三角形的三个顶点，并且不与三角形的边重合的三条直线，在什么条件下相交于一点？

梅内劳斯定理 在三角形的三条边上，并且不与三角形的顶点重合的三个点，在什么条件下位于一条直线上？

西瓦定理：有三条直线，每一条直线通过三角形的一个顶点，则它们相交于一点的充要条件是它们把对边分成两段的分割比之乘积等于1。

如果用 P_1, P_2, P_3 来表示三角形的顶点，而用 Q_1, Q_2, Q_3 来表示三条直线跟对边的交点，那末它们形成的分割比是：$\lambda_1=\overrightarrow{P_2Q_1}:\overrightarrow{Q_1P_3}$; $\lambda_2=\overrightarrow{P_3Q_2}:\overrightarrow{Q_2P_1}$; $\lambda_3=\overrightarrow{P_1Q_3}:\overrightarrow{Q_3P_2}$。取一个斜坐标系，使得过 P_1 和 P_2 之直线为 x 轴，而过 P_1 和 P_3 的直线为 y 轴；并取点 P_2 的坐标为 $(1, 0)$ 和 P_3 的坐标为 $(0, 1)$，那末就能如下面那样计算得到 Q_1, Q_2, Q_3 的坐标：

$$\overrightarrow{P_1Q_2}:\overrightarrow{Q_2P_3}=1:\lambda_2 \quad \text{或} \quad \overrightarrow{P_1Q_2}:\overrightarrow{P_1P_3}=1:(1+\lambda_2)=y_2;\ x_2=0;$$
$$\overrightarrow{P_1Q_3}:\overrightarrow{Q_3P_2}=\lambda_3 \quad \text{或} \quad \overrightarrow{P_1Q_3}:\overrightarrow{P_1P_2}=\lambda_3:(1+\lambda_3)=x_3;\ y_3=0;$$
$$\overrightarrow{P_1Q_1'}:\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_3Q_1}:\overrightarrow{P_3P_2}=1:(1+\lambda_1)=x_1;$$
$$\overrightarrow{P_1Q_1''}:\overrightarrow{P_1P_3}=\overrightarrow{P_2Q_1}:\overrightarrow{P_2P_3}=\lambda_1:(1+\lambda_1)=y_1。$$

如果交点 P 的坐标是 x 和 y，那末下面三个线性方程必须同时成立：

(1) 过 Q_1, P 和 P_1 的直线：$(y_1-0)/(x_1-0)=y/x$ 或 $\lambda_1=y/x$;

(2) 过 Q_2, P 和 P_2 的直线：$(y_2-0)/(x_2-1)=y/(x-1)$ 或

$$\left[\frac{1}{1+\lambda_2}\right]:(-1)=y/(x-1);$$

(3) 过 Q_3, P 和 P_3 的直线：$(y_3-1)/x_3=(y-1)/x$ 或

$$(-1):\left(\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\right)=(y-1)/x。$$

从(1)，(2)和(3)消去 y，就得到：

$$(2')\quad -\frac{1}{1+\lambda_2}=\frac{x\lambda_1}{x-1};\ 1-x=x(\lambda_1+\lambda_1\lambda_2), x=\frac{1}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2};$$

(3′)　$-\frac{1+\lambda_3}{\lambda_3}=\frac{x\lambda_1-1}{x}$, $x+x\lambda_3=\lambda_3-x\lambda_1\lambda_3$, $x=\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3+\lambda_1\lambda_3}$。

从(2′)和(3′)中消去x，得到:

$$\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1+\lambda_3+\lambda_1\lambda_3,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1。$$

定理证毕。

梅内劳斯定理：一条横截线与三角形的边相交，这些交点按一定的分割比把这三条边分成两段，那末这些分割比的乘积具有值 -1。

正如在西瓦定理中所做的那样，设

$$\lambda_1=\overrightarrow{P_2Q_1}:\overrightarrow{Q_1P_3},\ \lambda_2=\overrightarrow{P_3Q_2}:\overrightarrow{Q_2P_1},\ \lambda_3=\overrightarrow{P_1Q_3}:\overrightarrow{Q_3P_2}$$

是交点把三条边分成两段的分割比；三角形的三个顶点的坐标仍旧取为$P_1(0, 0)$, $P_2(1, 0)$, $P_3(0, 1)$。除了其中一个分割比λ_2（或者所有三个分割比）的值是负的外，交点Q_1, Q_2, Q_3的坐标与前面求过的值相同，如果点Q_1, Q_2, Q_3位于一条直线上，那末

$$(y_2-y_3):(x_2-x_3)=(y_1-y_3):(x_1-x_3),$$

$$\frac{1}{1+\lambda_2}:\frac{-\lambda_3}{1+\lambda_3}=\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}:\left(\frac{1}{1+\lambda_1}-\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\right),$$

$$-\frac{1+\lambda_3}{\lambda_3(1+\lambda_2)}=\frac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{1+\lambda_3-\lambda_3(1+\lambda_1)},$$

$$-(1+\lambda_3)+\lambda_3(1+\lambda_1)=\lambda_1\lambda_3(1+\lambda_2),$$

$$-1-\lambda_3+\lambda_3+\lambda_1\lambda_3=\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

$$-1=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

定理证毕。

	Q_1	Q_2	Q_3
x	$\frac{1}{1+\lambda_1}$	0	$\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}$
y	$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$	$\frac{1}{1+\lambda_2}$	0

13.4　圆

圆的方程

在直角坐标系中圆的方程　圆就是平面上与一个定点$C(c, d)$的距离r保持不变的所有的点$P(x, y)$的轨迹；其中C叫作圆心，而r叫作圆

在一般位置的圆的方程; 圆心 $C(c, d)$, 半径 r	$(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$
圆心在原点,半径为 r 的圆的方程	$x^2+y^2=r^2$

的半径。由毕达哥拉斯定理(见图 13.4-1)就得到所需要的方程 $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$。如果圆心在原点,那么 $c=d=0$,于是圆的方程就是 $x^2+y^2=r^2$。

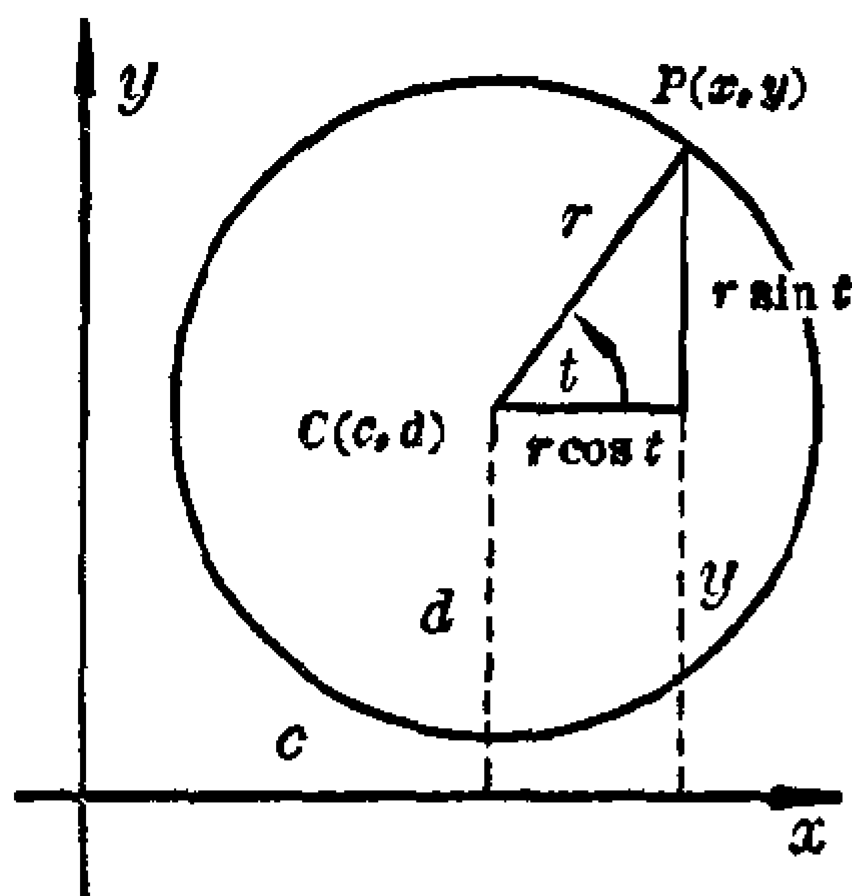


图 13.4-1 导出圆的方程

【例 1】 圆心在 $C(4, 3)$ 而半径为 2 的圆的方程是

$$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2。$$

【例 2】 点 $P_0(1, 2)$ 不在圆 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=5^2$ 上,这是因为它的坐标 $x_0=1, y_0=2$ 不满足圆的方程,即 $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+(2-2)^2\neq 25$。

【例 3】 在圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=61$ 上,点 P_1 和 P_2 的横坐标为 6,问它们的纵坐标是多少?

需要求的是点 $P_1(6, y_1)$ 和 $P_2(6, y_2)$ 的纵坐标 y_1 和 y_2。如果我们把 $x=6$ 代到圆的方程中去,再解出 y,就得到 $y-2=\pm\sqrt{61-(6-1)^2}$,即 $y_1=8$, $y_2=-4$。

在极坐标系中圆的方程 有一个半径为 r 的圆,它的圆心 C 的极坐

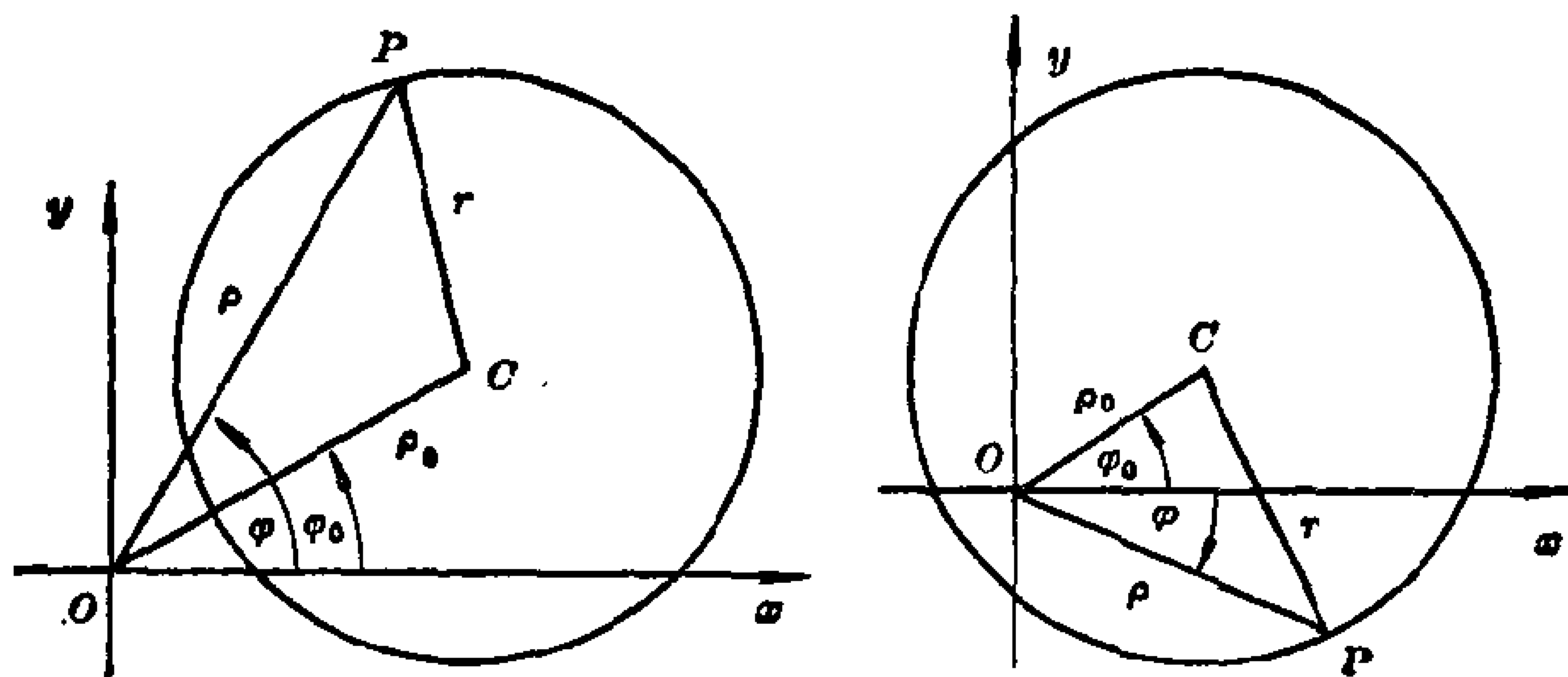


图 13.4-2 在极坐标系中圆的方程

$(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ 上，那末过这一点的法线斜率为 $(y_1-d)/(x_1-c)$，从而它的方程就是 $(y-y_1)/(x-x_1)=(d-y_1)/(c-x_1)$ 或者 $y-y_1=\left(\frac{y_1-d}{x_1-c}\right)(x-x_1)$。

过圆上一点 $P_1(x_1, y_1)$ 的法线方程，分成圆在任意位置和圆心在原点这两种情况	$y-y_1=\frac{y_1-d}{x_1-c}(x-x_1)$ $y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$

【例】 过圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 上的一点 $P_1(5, -3)$ 的法线方程是 $y+3=\left(\frac{-3-1}{5-2}\right)(x-5)$，或者用笛卡尔正则形式来写就是

$$y=-\left(\frac{4}{3}\right)x+\frac{11}{3}。$$

圆的切线 如果给出与圆 $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ 相切的切线的切点 $P_1(x_1, y_1)$，那末 $m_1=\frac{y_1-d}{x_1-c}$ 就是过切点的半径的斜率，于是 $m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{x_1-c}{y_1-d}$ 就是切线的斜率(见图13.4-4)。

用点斜式写出的切线方程就是 $y-y_1=-\left(\frac{x_1-c}{y_1-d}\right)(x-x_1)$，或者把它展开，并且归并同类项就得到 $yy_1-y_1^2-yd+y_1d=-xx_1+x_1^2+cx-cx_1$，即 $xx_1+yy_1-cx-dy=x_1^2+y_1^2-cx_1-dy_1$。如果两边同时加上表达式 $(c^2+d^2-cx_1-dy_1)$，并且心中记住 P_1 是在圆上的点，因此是适合 $(x_1-c)^2+(y_1-d)^2=r^2$ 这个式子的，那末就得到切线方程的形式是

$$(x-c)x_1-(x-c)c+(y-d)y_1-(y-d)d=r^2$$

或

$$(x-c)(x_1-c)+(y-d)(y_1-d)=r^2。$$

过圆上一点 $P_1(x_1, y_1)$ 的切线方程，分成圆在任意位置和圆心在原点这两种情况	
$(x-c)(x_1-c)+(y-d)(y_1-d)=r^2$	$xx_1+yy_1=r^2$

【例】 圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 在点 $P(5, -3)$ 处的切线方程是 $(x-2)(5-2)+(y-1)(-3-1)=25$，或 $3(x-2)-4(y-1)=25$，或用笛卡尔正则形式来表示就是 $y=\frac{3}{4}x-\frac{27}{4}$。

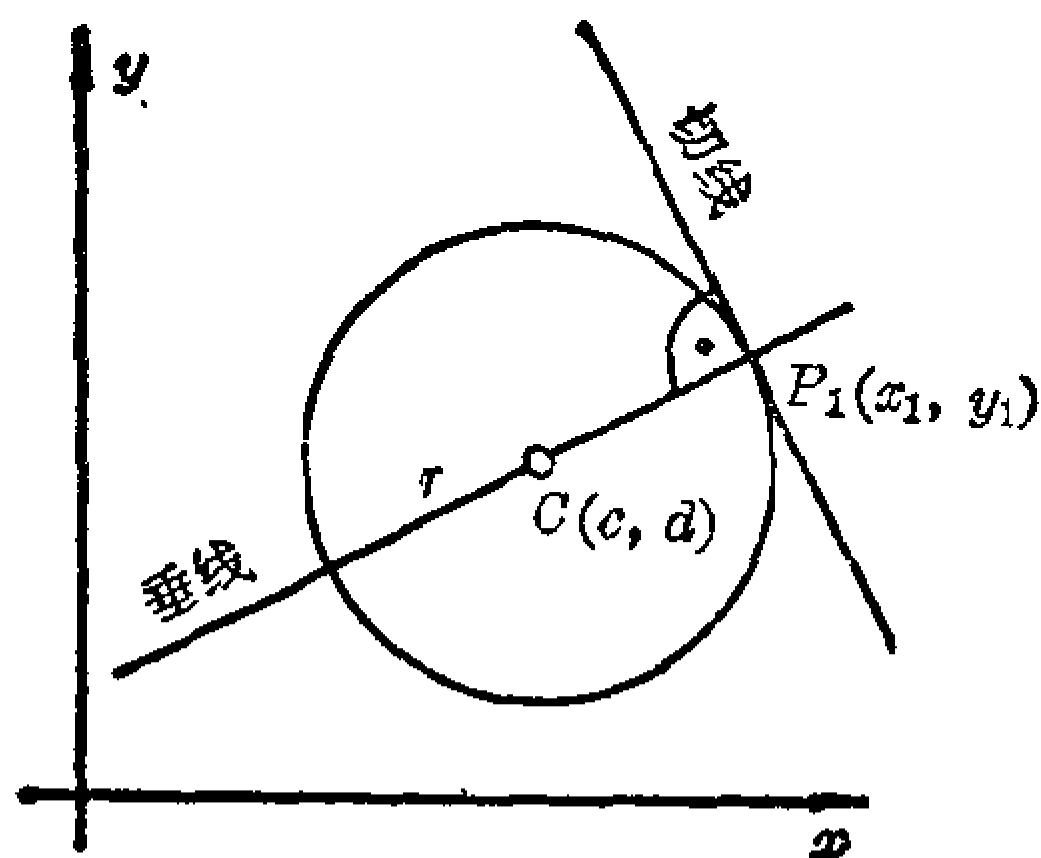


图 13.4-4　圆的切线

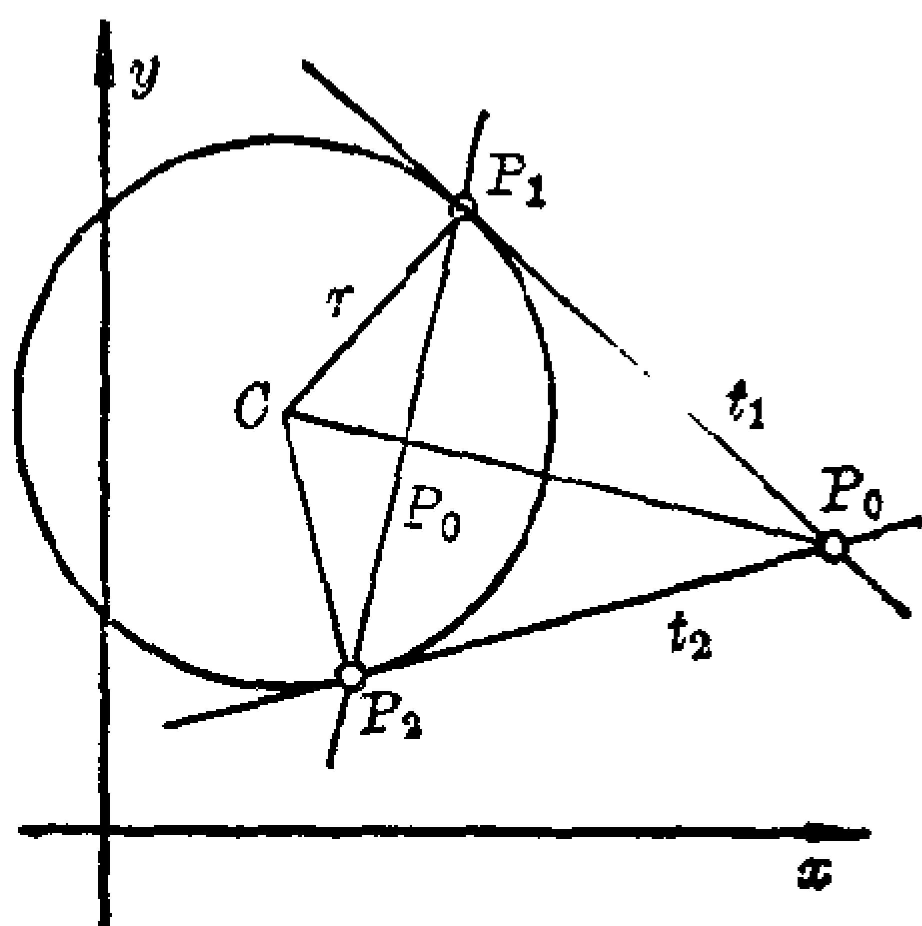


图 13.4-5　从圆外一点向圆作的切线

由微分计算我们也能求得切线的斜率。对圆的方程 $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ 进行微分，就得到 $2(x-c)+2(y-d)y'=0$，或 $y'=-\frac{x-c}{y-d}$。因此在 $P_1(x_1, y_1)$ 处切线的斜率是 $y_1'=-\frac{x_1-c}{y_1-d}$，这个值和前面已经求得的值一致。

从一点向圆作的切线　如果 $C(c, d)$ 是一个半径为 r 的圆的圆心，而 $P_0(x_0, y_0)$ 是圆外一点，则从 P_0 到圆可以作两条切线（见图 13.4-5）。设它们的切点是 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$。则切线方程是

$$(x-c)(x_1-c)+(y-d)(y_1-d)=r^2$$

和

$$(x-c)(x_2-c)+(y-d)(y_2-d)=r^2。$$

点 $P_0(x_0, y_0)$ 的坐标也应满足这两个方程:

$$(x_0-c)(x_1-c)+(y_0-d)(y_1-d)=r^2$$

和

$$(x_0-c)(x_2-c)+(y_0-d)(y_2-d)=r^2。$$

因此，方程

$$(x_0-c)(x-c)+(y_0-d)(y-d)=r^2$$

对两个切点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的坐标都适合。这个线性方程因此就表示了过这两个切点的直线。我们把这条直线叫作极点 P_0 的极线 p_0，而这条直线由圆心 C 的坐标 (c, d)、极点 $P_0(x_0, y_0)$ 的坐标，以及圆的半径 r 所确定。**这条极线与圆的交点就是从 P_0 点到圆的两条切线的切点。**从极点 $P_0(x_0, y_0)$ 的坐标和一个切点的坐标，我们总可以给出切线方程，例如用两点式给出切线方程。

【例】　求从点 $P_0(3, 5)$ 到圆 $(x+2)^2+y^2=5^2$ 的切线的方程。极线方程是 $(3+2)(x+2)+(5-0)(y-0)=5$，或者说 $y=-x-1$。从方程

$y=-x-1$ 和 $(x+2)^2+y^2=5$，我们可以求出这条直线与圆的两个交点 P_1 和 P_2，因此，$x^2+4x+4+x^2+2x+1=5$，或者说 $x^2+3x=0$；$x_1=0$，$x_2=-3$。因此切点就是 $P_1(0,\ -1)$ 和 $P_2(-3,\ 2)$。于是切点在 P_1 的切线方程是 $y=2x-1$，而切点在 P_2 的切线方程是 $y=\frac{x}{2}+\frac{7}{2}$。

两个圆

两个圆的交点　方程为 $(x-c_1)^2+(y-d_1)^2=r_1^2$ 和 $(x-c_2)^2+(y-d_2)^2=r_2^2$ 的两个圆，它们的相互位置能有下列几种情况：这两个圆相交于两点，或者这两个圆相切于一点，或者这两个圆相离，即没有公共点。

为了求得可能存在的交点 $P_0(x_0,\ y_0)$，求解下面的方程组：

$$\left|\begin{array}{l}(x_0-c_1)^2+(y_0-d_1)^2=r_1^2\\(x_0-c_2)^2+(y_0-d_2)^2=r_2^2\end{array}\right|。$$

如果这个方程组有两个不同的实数解 x_{01}，y_{01} 和 x_{02}，y_{02}，则 $P_1(x_{01},\ y_{01})$ 和 $P_2(x_{02},\ y_{02})$ 就是两个交点；在解是一个实的重根时，这两个圆相切。如果这个方程组没有实数解，那末这两个圆就相离。

【例】　把两个圆的方程 $(x+4)^2+(y+5)^2=194$ 和 $(x-3)^2+(y-2)^2=40$ 相减，就得到直线方程 $x+y=9$，它就是这两个圆的公共弦。这条直线与其中一个圆的交点也就是这两个圆的交点；由此求得这两个交点是 $P_1(9,\ 0)$ 和 $P_2(1,\ 8)$。

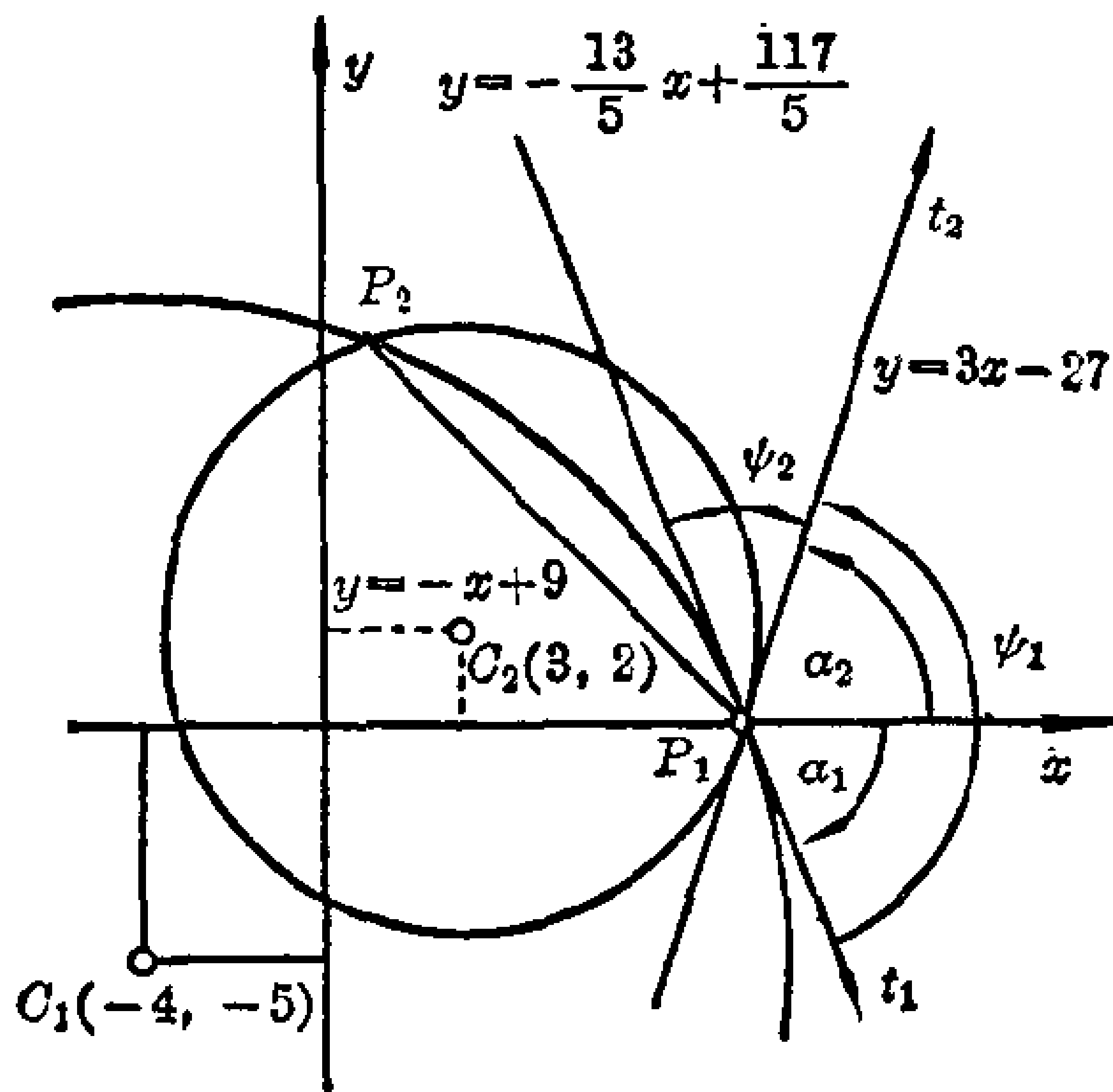


图 13.4-6　两个圆的交点和交角

两个圆的交角　两个圆之间的交角定义为在每一个交点处切线之间的夹角；这个夹角在两个交点处的值是一样的（见图 13.4-6）。

【例】　圆 $(x+4)^2+(y+5)^2=194$ 和圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=40$ 相交于点 $P_1(9,\ 0)$。在这一点处两个圆的切线是

$$(9+4)(x+4)+5(y+5)=194$$

和 $$(9-3)(x-3)+(-2)(y-2)=40,$$

或者用笛卡尔正则形式来写就是 $y=-\left(\frac{13}{5}\right)x+\frac{117}{5}$ 和 $y=3x-27$。对这两条直线的交角 ψ，我们从 $m_1=-\frac{13}{5}$ 和 $m_2=3$ 求得 $\tan\psi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=-\frac{14}{17}$，因此 $\psi_2=-39°28'$ 和 $\psi_1=140°32'$；而从 $m_1=\tan\alpha_1=-\frac{13}{5}$，求得 $\alpha_1=-68°58'$，从 $m_2=\tan\alpha_2=+3$，求得 $\alpha_2=+71°34'$，因此也同样得到 $\psi=\alpha_2-\alpha_1=140°32'$。

13.5 圆锥曲线

圆锥曲线看成是圆锥与平面的交线

在古代，圆锥曲线定义为平面 E 与圆锥的交线。这些交线分别叫作圆、椭圆、双曲线和抛物线。如果截平面 E 包含了(双重)圆锥的顶点 Z，那末它和圆锥的相交部分或者是一个点，也就是顶点 Z；或者是一条**母线**，如果平面 E 与圆锥相切的话；或者是相交于 Z 的**两条母线**，如果平面 E 包含有这个圆锥的内点的话。这些交线都称为**退化的圆锥曲线**。

如果平面 E 不包含顶点 Z，并且与正圆锥的轴垂直，那末它与圆锥的交线是一个圆；如果 E 与切平面平行，那末它与圆锥的交线是一条抛物线；如果 E 既不与切平面平行，也不与圆锥的轴垂直，那末当平面 E 与在 Z 的同边的所有母线相交时，它的交线是一个椭圆，而当平面 E 与在 Z 两边的母线相交时，它的交线就是双曲线。

所有的非退化圆锥曲线都可看作是另一个非退化圆锥曲线的**透视投影**；Z 是透视中心。除了有三个例外情形外，**每一条圆锥曲线在每一条母线上有而且只有一个点**，而这些例外情形可用非寻常点或一条直线的无穷远点（就象在分割比中那样）的概念来消除。对**抛物线**来说，平行于平面 E 的母线 g_0 与过抛物线顶点 V 并且与 g_0 平行的直线 VF（在无穷远处）有一个公共点，这一个点也是抛物线上的点；这条过抛物线顶点 V 的平行线 VF 叫做**抛物线的轴**。在**双曲线**的情形中，有两条母线，这是过 Z 点与平面 E 平行的平面 E' 与圆锥的交线。在射影几何中，这两个平面 E 和 E'(在无穷远处)有一条公共线 l，并且这两条母线中的每一条都与 l（在无穷远处）有一个公共点，这一点既是与这条母线平行的每一条平行

线上的一点并且也是双曲线上的一点；特别地，我们把过双曲线的中心且与这两条母线平行的两条直线叫作渐近线。

戴德林(Dandelin)球　皮埃尔·戴德林(1794～1847年)是第一个利用与圆锥及截平面 E 相切的球来导出圆锥曲线性质的人。

抛物线。如果 E 是一个与圆锥的切平面平行的平面，此切平面沿着母线 g_0 与圆锥相切，那末*只存在一个戴德林球*，这个球与圆锥和平面 E 都相切；它的直径是 g_0 与 E 的距离（见图13.5-1）。这个球与平面 E 相切于 F 点，并且沿着圆 C 与圆锥相切，圆 C 与 g_0 相交于点 D。过圆 C 的平面 E_1 与 E 相交于直线 l，这条直线 l 叫作准线并且与过 g_0 和圆锥轴的平面 Σ 垂直。平面 Σ 与平面 E 相交于**抛物线的轴**；抛物线在这根轴上的(有限)点就是抛物线的顶点 V。让平面 Σ 绕着母线 g_0 旋转，我们就得到这个平面与 E 的交线，例如 BP 这条交线与抛物线的轴平行，即与准线垂直。绕着 g_0 旋转所得到的平面 Σ_A 与圆锥相交于过点 Z, A 和 P 的第二条母线，其中 A 在圆 c 上，而 P 在平面 Σ_A 和平面 E 的交线上；因此 P 也

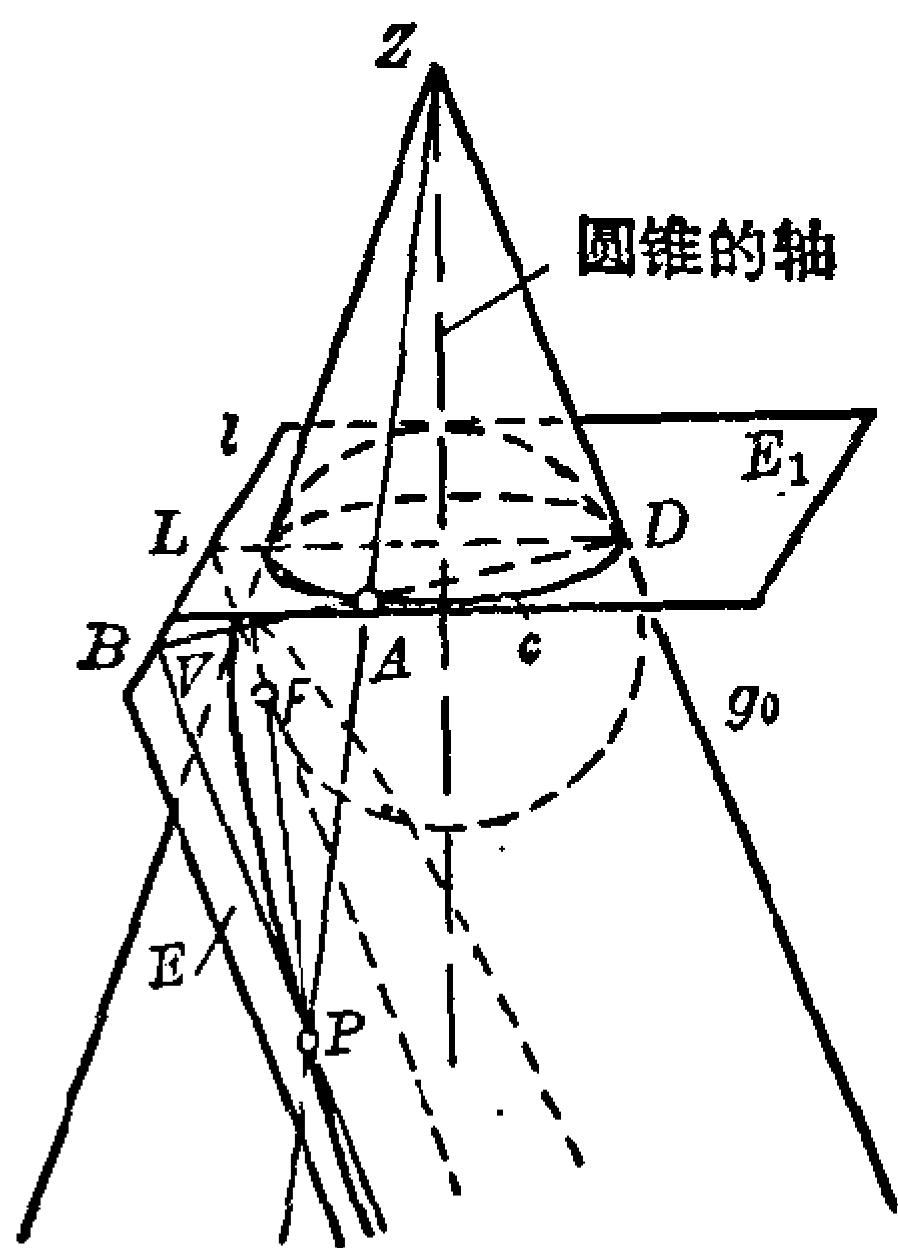


图 13.5-1　抛物线看作平面和圆锥的截线

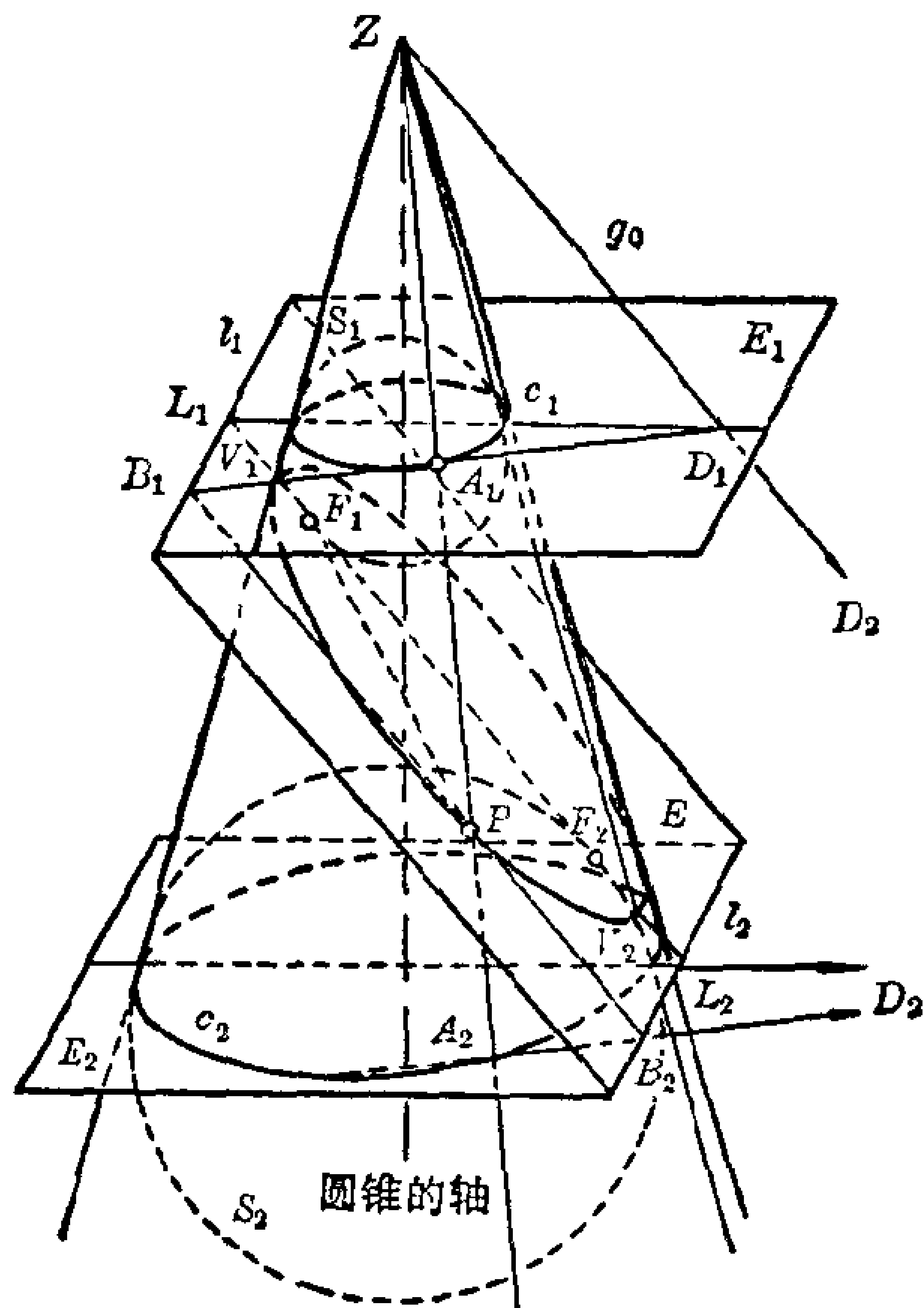


图 13.5-2　椭圆看作圆锥和平面的截线

是抛物线上的一点。作为从 P 点到球面的切线，线段 PF 和 PA 具有相同的长度。再因直线 ZP 和 DB 相交于 A，并且被平行线 BP 和 DZ 所截，因此 $|BP|:|PA|=|DZ|:|ZA|=1$，即 $|BP|=|PA|$，也就是说线段 PA 和 PB 也具有相同的长度。从而 PF 和 PB 相等。

抛物线是平面上离开一个定点 F 和一条定直线 l 具有相同距离的所有的点 P 的轨迹。比例 $|PF|:|PB|=\varepsilon$ 的值是 1 并且称 ε 为数值偏心率。

椭圆和双曲线。 如果平面 E 与圆锥的切平面不平行，那末有两个戴德林球分别与平面 E 相切于点 F_1 和 F_2，与圆锥相切于圆 c_1 和 c_2，这两个圆 c_1 和 c_2 所在的平面 E_1 和 E_2 与平面 E 相交于一对互相平行的准线 l_1 和 l_2。过圆锥的轴并垂直于准线的平面 Σ 与平面 E 相交于**椭圆的轴**或者**双曲线的轴**(见图 13.5-2)。

在这个平面 Σ 上，过圆锥的顶点 Z 并且与圆锥曲线的轴平行的直线 g_0 与平面 E_1 相交于 D_1 点而与平面 E_2 相交于 D_2 点。如果 Σ 绕着 g_0 旋转，那末它与平面 E 的交线，例如 B_1B_2，与圆锥曲线的轴保持平行，即与准线 l_1 和 l_2 垂直。平面 Σ_A 包含母线 ZA_1A_2；B_1B_2 与 A_1A_2 的交点 P 是圆锥曲线上的一点。作为从 P 点到球 S_1 的切线，线段 PF_1 和 PA_1 具有相同的长度；类似地有 $|PF_2|=|PA_2|$。因为对**椭圆**来说，球 S_1 和 S_2 在平面 E 的两边，故有 $|PF_1|+|PF_2|=|A_1A_2|$，而对**双曲线**来说，球 S_1 和 S_2 在平面 E 的同一边，故有 $|PF_1|-|PF_2|=|A_1A_2|$。

椭圆是平面上离开两个定点 F_1 和 F_2（焦点）的距离之和保持常数的所有点 P 的轨迹；由于对称性，这个常数 $(2a)$ 等于在平面 Σ 上的椭圆的顶点 V_1 和 V_2 之间的距离。

双曲线是平面上离开两个定点 F_1 和 F_2（焦点）的距离之差保持常数的所有的点 P 的轨迹；同样，也能得到在 Σ 平面上的顶点 V_1 和 V_2 之间的距离是 $|V_1V_2|=2a=|A_1A_2|$。

在 Σ 平面绕着 g_0 旋转而得的平面 Σ_A 中，直线 ZP 和 B_1D_1 相交于点 A_1，而 B_1P 与 ZD_1 平行。因此 $|PA_1|:|PB_1|=|ZA_1|:|ZD_1|=|PF_1|:|PB_1|=\varepsilon$。

在圆锥曲线上的一点 P，它与焦点 F_1 的距离 $|PF_1|$ 和它与对应的准线 l_1 的距离 $|PB_1|$ 之比是一个常数 ε，这个常数 ε 叫作数值偏心率；对椭圆来说，$0<\varepsilon<1$ $(|ZA_1|<|ZD_1|)$，而对双曲线来说 $\varepsilon>1$($|ZA_1|>$

$|ZD_1|$)。

圆锥曲线的方程 为了导出圆锥曲线的解析表达式，必须选取适当的坐标系。根据圆锥曲线的定义，圆锥曲线关于它的轴是对称的。从上面的考虑可知，椭圆和双曲线还必须关于 F_1F_2 的垂直平分线对称；这条垂直平分线与圆锥曲线的轴的交点就是圆锥曲线的中心 C。因此对椭圆或者双曲线而言，最好的坐标系是把圆锥曲线的轴作为 x 轴，而过中心 C 的垂线作为 y 轴的笛卡尔坐标系，那时我们就讲圆锥曲线是在它的中心位置上。如果 x 轴同上面一样，而 y 轴是过一个顶点的切线，则称圆锥曲线是在它的顶点位置上。把圆锥曲线的轴作为零方向，而一个焦点作为极点的极坐标系对于所有三种类型的圆锥曲线都是适合的，并且那时这些曲线有一个公共的方程。对双曲线而言，还可形成一个很自然的斜平行坐标系，这个坐标系的轴就是两条相交于圆锥曲线中心的渐近线。

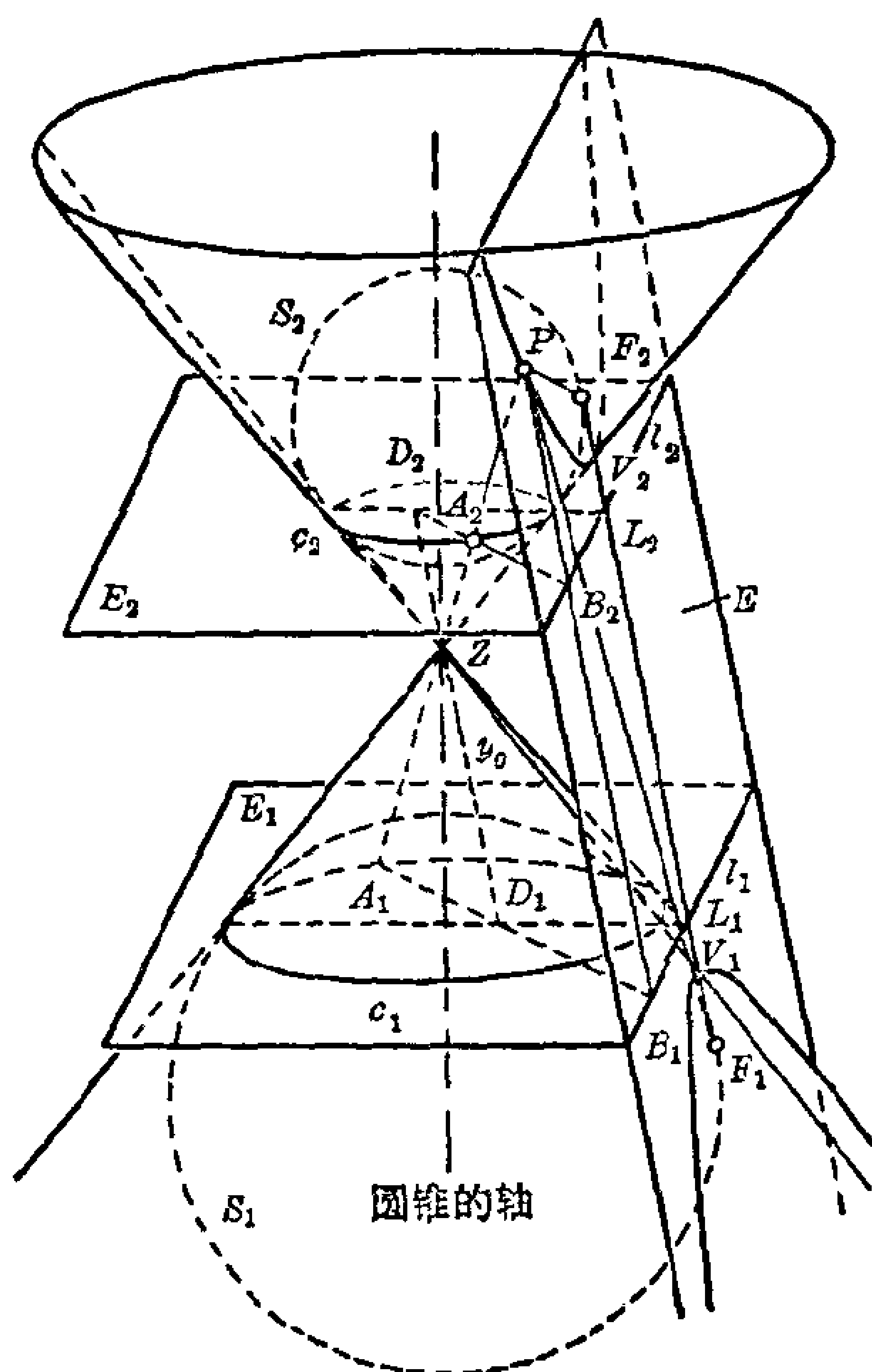


图 13.5-3 双曲线看作圆锥与平面的交线

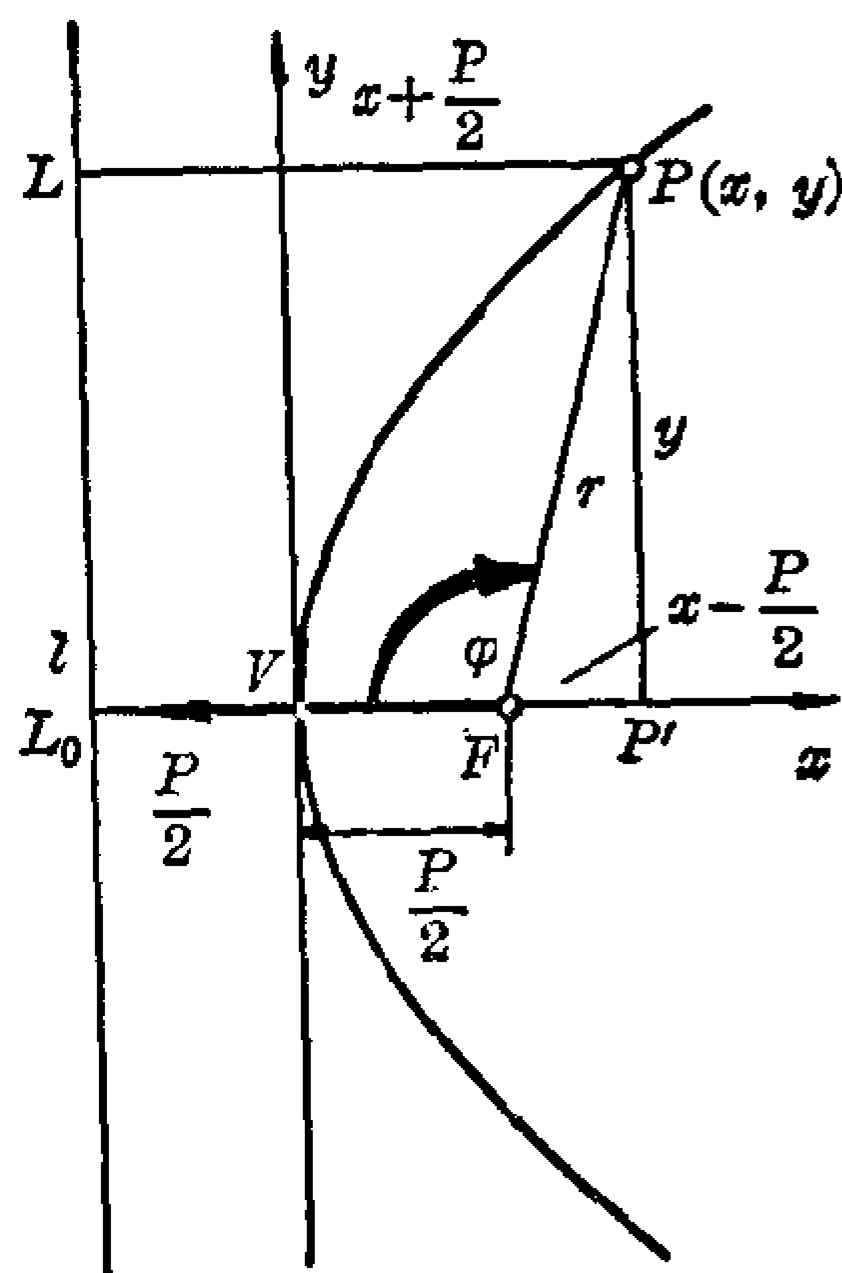


图 13.5-4 抛物线方程的导出

抛物线方程

顶点型方程 笛卡尔坐标系是这样选取的，使它的 x 轴为抛物线的

轴，而 y 轴为过顶点的切线(见图 13.5-4)。从抛物线的定义，抛物线上每一点 P 与焦点 F 的距离与准线 l 的距离相等。因此顶点 V 必定平分从 F 到 l 的垂线 FL_0。在抛物线上有两点，它们的纵坐标就等于它们离开准线的距离。这个纵坐标的绝对值 p 叫作抛物线的半参数；$|L_0F|=p$，因此焦点坐标是 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$。而抛物线上任意点 $P(x, y)$ 与焦点 F 的距离是 $|FP|=\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}$，它与准线的距离是 $|PL|=\frac{p}{2}+x$。由抛物线的定义，

$$\left(\frac{p}{2}+x\right)^2=y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 \quad \text{或} \quad y^2=2px。$$

抛物线的顶点型方程	$y^2=2px$

这个方程说明 x 轴是对称轴，顶点是原点；对每一个横坐标 $x>0$，在抛物线上有两点，它们的横坐标是 x，而它们的纵坐标数值相等但符号相反。半参数确定了抛物线的形状。p 的值越小，焦点和准线与 y 轴的距离就越近，并且 y 的值增加得越慢。在极限情况当 $p\to 0$ 时，抛物线退化成来回描过的正 x 轴。另一方面，如果 p 取非常大的值，则焦点和准线分开极大的距离；而当 $p\to\infty$ 时，因为 $x\to 0$，所以抛物线退化成 y 轴。

方程 $x^2=2py$，$y^2=-2px$ 和 $x^2=-2py$ (其中 $p>0$)，也表示了抛物线，正如能从图中看到的那样(见图 13.5-5)，只要 ξ，η 坐标系旋转一个适当的角度 ψ 就能使抛物线 $\eta^2=2p\xi$ 变成给出的方程之一。而旋转变换式是 $\xi=x\cos\psi-y\sin\psi$ 和 $\eta=x\sin\psi+y\cos\psi$。

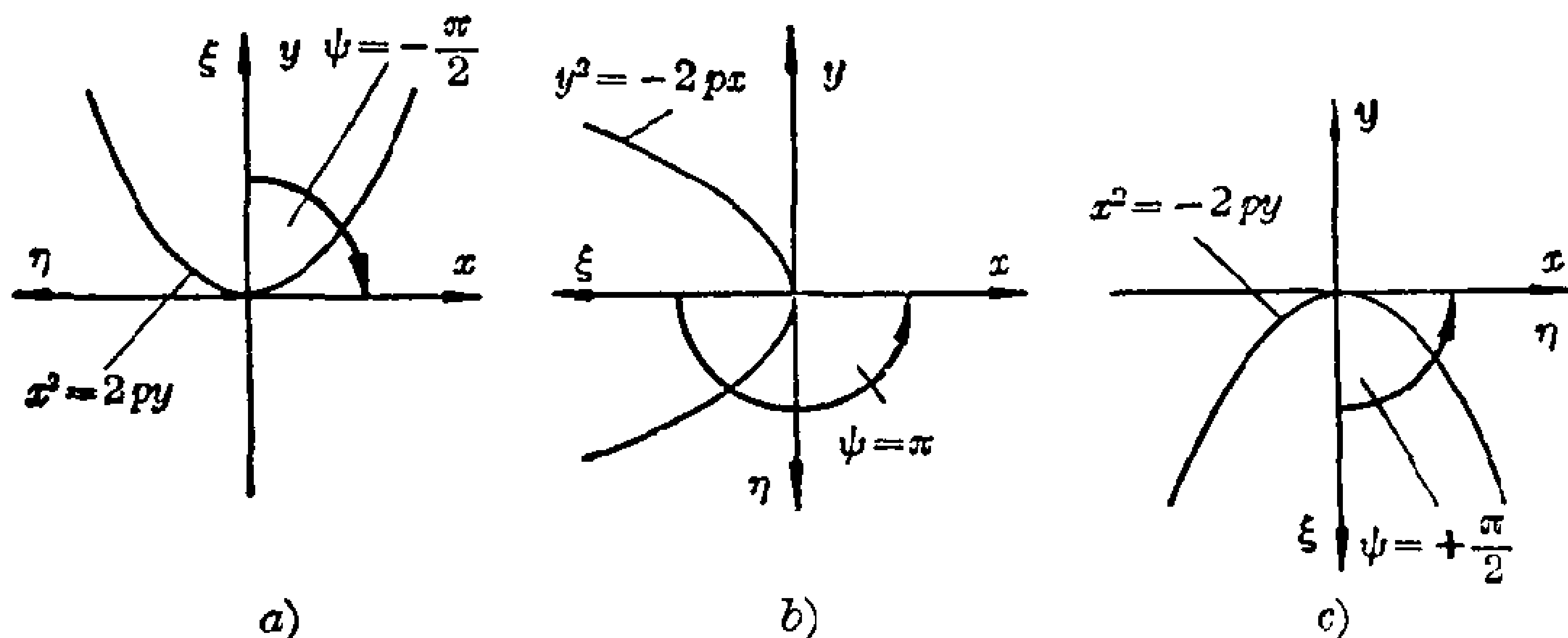


图 13.5-5 在 ξ，η 坐标系的旋转之下，抛物线 $\eta^2=2p\xi$ 的位置

抛物线	ψ	变换式	变换成的抛物线方程	图13.5-5	区间 对 x	区间 对 y
$\eta^2=2p\xi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\xi=y,\ \eta=-x$	$x^2=2py$	a	$-\infty<x<+\infty$	$0\leqslant y<+\infty$
$\eta^2=2p\xi$	$+\pi$	$\xi=-x,\ \eta=-y$	$y^2=-2px$	b	$-\infty<x\leqslant 0$	$-\infty<y<+\infty$
$\eta^2=2p\xi$	$+\frac{\pi}{2}$	$\xi=-y,\ \eta=x$	$x^2=-2py$	c	$-\infty<x<+\infty$	$-\infty<y\leqslant 0$

如果在坐标系平移以后，顶点坐标是$(c,\ d)$，则抛物线的方程取下列形式$(p>0)$：

$$(y-d)^2=2p(x-c);\quad (x-c)^2=2p(y-d);$$
$$(y-d)^2=-2p(x-c);\quad (x-c)^2=-2p(y-d)。$$

【例1】 求在顶点位置的抛物线方程，这条抛物线以x轴为它的轴，并且过点$P_0(2,\ 4)$。

抛物线方程$y^2=2px$必须满足P_0的坐标：$4^2=2P\cdot 2$；因此$P=4$。于是抛物线方程是$y^2=8x$。

【例2】 抛物线的顶点在$V(2,\ 3)$，开口向下，并且过点$P_0(4,\ 1)$。此方程是由方程$x^2=-2py$通过坐标轴的平移而得；因此它的方程是$(x-2)^2=-2p(y-3)$。因为它通过点$P_0(4,\ 1)$，所以有$(4-2)^2=-2p(1-3)$，即$p=+\frac{4}{4}=+1$。因此抛物线方程是$(x-2)^2=-2(y-3)$。它的焦点是在沿着抛物线轴的方向离开顶点$\frac{1}{2}p=\frac{1}{2}$距离处，即它的坐标是$F(2,\ 2.5)$。

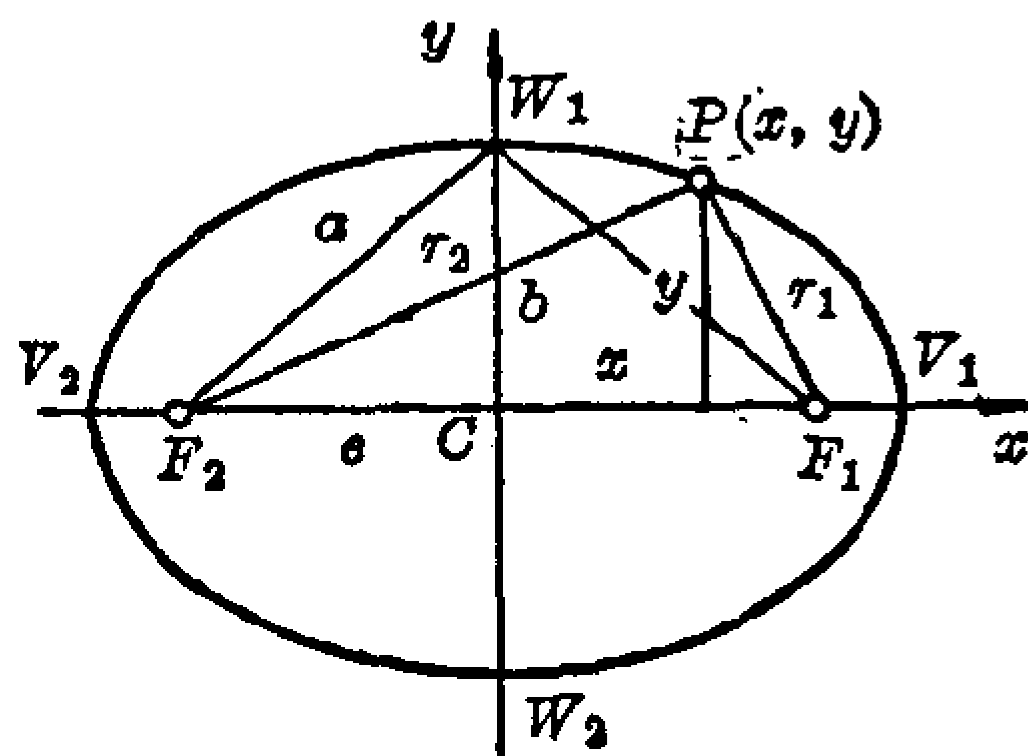


图13.5-6　在中心位置的椭圆方程

椭圆方程

椭圆的中心型方程(标准方程) x轴与椭圆的轴一致，而y轴与两个顶点之间线段V_1V_2的垂直平分线一致(见图13.5-6)。y轴与椭圆相交于称为第二对顶点的两点W_1和W_2。长度$|V_1V_2|=2a$叫作长轴，长度$|W_1W_2|=2b$叫作短轴；而$|F_1F_2|/2=e$叫作线性偏心率。因为$|W_1F_1|+|W_1F_2|=2a$，线段a，b和

e 形成一个直角三角形，因此 $e^2+b^2=a^2$。于是焦点坐标是 $F_1(+e,\ 0)$ 和 $F_2(-e,\ 0)$。椭圆上的任一点 $P(x,\ y)$ 离开焦点的距离是 $|PF_1|=r_1=\sqrt{y^2+(e-x)^2}$ 和 $|PF_2|=r_2=\sqrt{y^2+(e+x)^2}$。从椭圆的定义可得，$r_1+r_2=2a$ 或 $r_1=2a-r_2$。如果代入 r_1 和 r_2，并把两边平方，式中仍有一项平方根:

$$y^2+(e-x)^2=4a^2-4a\sqrt{y^2+(e+x)^2}+y^2+(e+x)^2$$

或
$$a\sqrt{y^2+(e+x)^2}=a^2+ex。$$

再两边平方得:

$$a^2y^2+a^2e^2+\cancel{2a^2ex}+a^2x^2=a^4+\cancel{2a^2ex}+e^2x^2.$$

由于 $e^2=a^2-b^2$，这个方程可以简化成:

$$a^2y^2+\cancel{a^4}-a^2b^2+\cancel{a^2x^2}=\cancel{a^4}+\cancel{a^2x^2}-b^2x^2$$

或
$$x^2/a^2+y^2/b^2=1。$$

椭圆的中心型方程	$x^2/a^2+y^2/b^2=1$

方程 $x^2/b^2+y^2/a^2=1$，这里 $a>b$，也表示了一个椭圆，只要将 $\xi,\ \eta$ 坐标旋转 $\psi=-\pi/2$ 的角度就可看出。经过变换（参看抛物线方程）$\xi=y,\ \eta=-x$，椭圆方程 $\xi^2/a^2+\eta^2/b^2=1$ 就变成了 $x^2/b^2+y^2/a^2=1$。

如果在坐标系平移后，椭圆的中心坐标是 $(c,\ d)$，那末椭圆的中心型方程对于 $a>b$ 取下列形式之一:

$$(x-c)^2/a^2+(y-d)^2/b^2=1 \quad 或 \quad (x-c)^2/b^2+(y-d)^2/a^2=1。$$

【例1】 在中心位置的一个椭圆，其半轴长是 3 和 4，则其方程是 $x^2/16+y^2/9=1$ 或 $x^2/9+y^2/16=1$，按照它的长轴是位于 x 轴还是位于 y 轴而定(见图 13.5-7)。

【例2】 一个位于中心位置的椭圆，它有一个半轴的长度是 5，并且过点 $P_0(3,\ -8)$。因为 $8>5$，因此 $b=5$ 一定是短半轴。把 $x_0=3,\ y_0=-8$ 代入中心方程，就可求得 a: $3^2/5^2+(-8)^2/a^2=1$ 或者 $64/a^2=(25-9)/25=16/25$，即 $a=\sqrt{(25\cdot 64/16)}=10$。因此椭圆的方程是 $x^2/5^2+y^2/10^2=1$。

数值偏心率 与椭圆的 y 轴平行，且与中心的距离为 $|CL_1|=a^2/e$ 的直线叫作准线 l_1。顶点 V_1 与此准线的距离是 d'，这里 $d'=|V_1L_1|=$

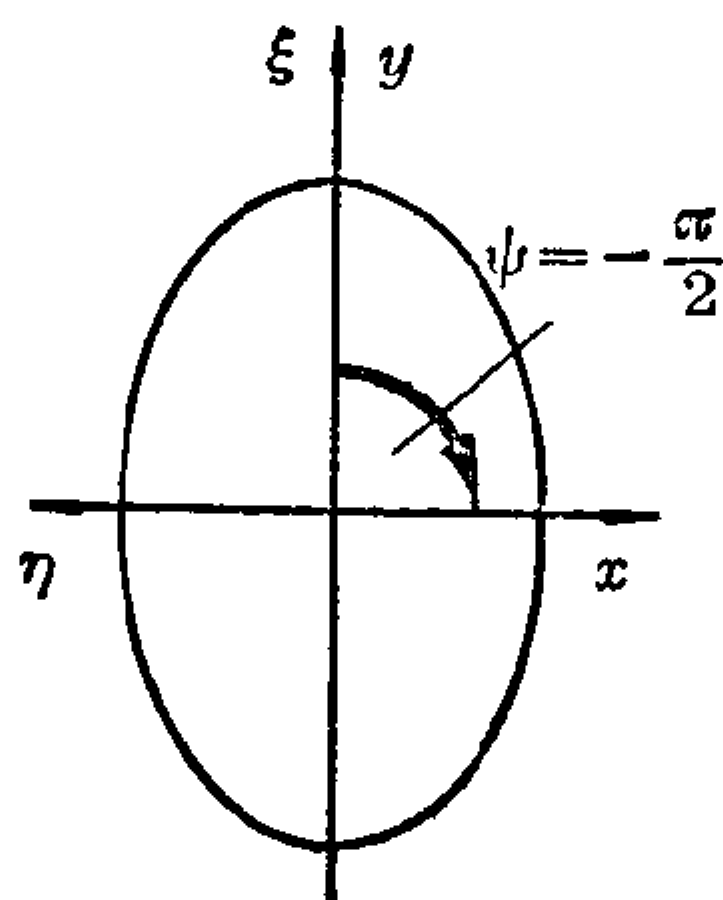


图 13.5-7　ξ,η 坐标系的旋转和椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

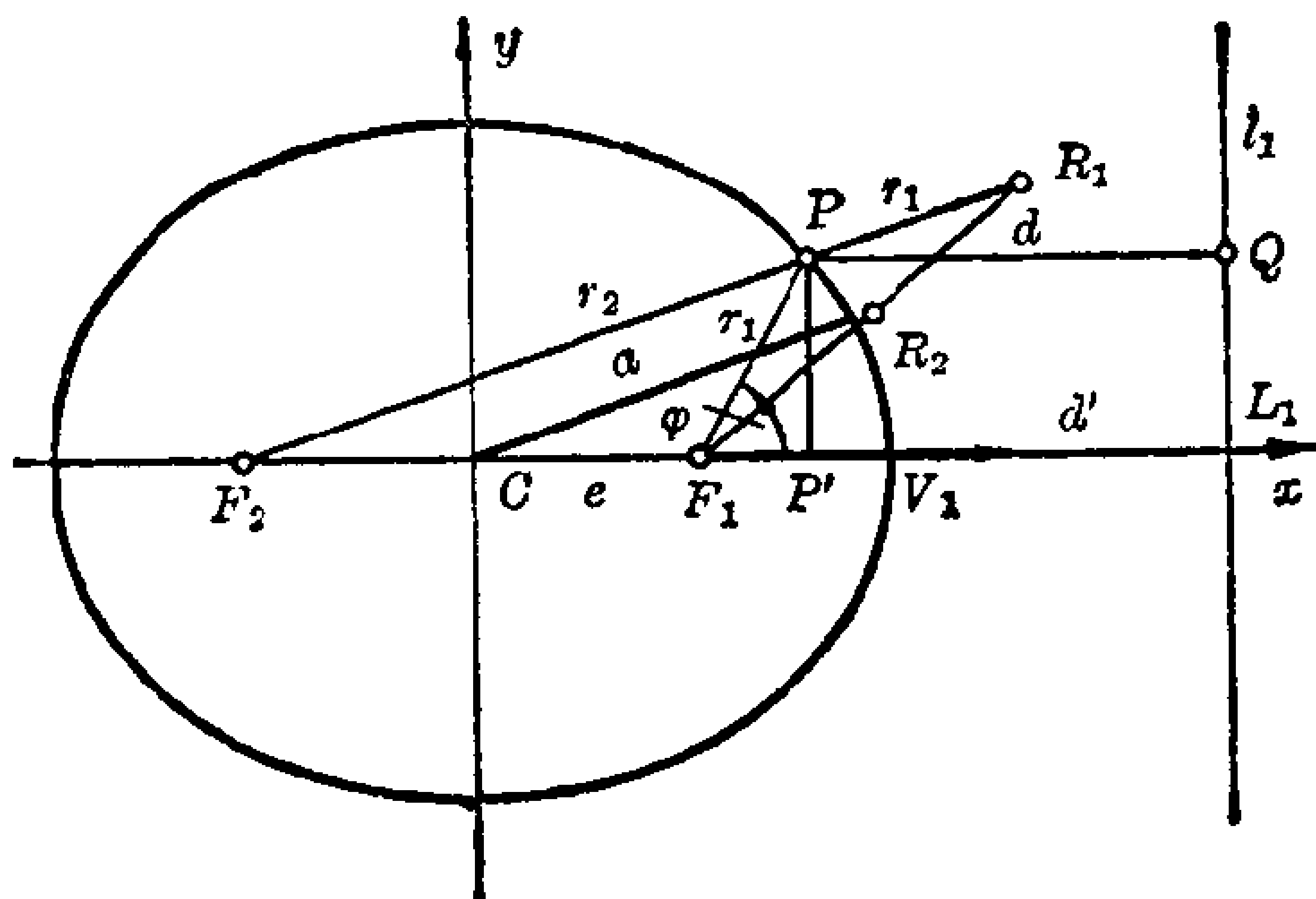


图 13.5-8　椭圆的数值偏心率

$(a^2/e)-a=(a/e)(a-e)$。而椭圆上任一点 P 与此准线的距离是 d,这里 $d=|PQ|=a^2e-x$。对于 P 点离开焦点 F_1 和 F_2 的距离 r_1 和 r_2，由毕达哥拉斯定理可得 $r_2^2=r_1^2+(2e)^2-2\cdot2e(e-x)=r_1^2+4e^2-4e^2+4ex$ 或 $r_2^2-r_1^2=4ex$。因为 $r_1+r_2=2a$，由除法得到 $r_2-r_1=2ex/a$，因此 $r_2=a+ex/a$ 和 $r_1=a-ex/a$。如果我们将从最后一个方程得出的 $x=(a^2-r_1a)/e$ 代入 d 的表达式中，我们得到 $d=r_1\cdot(a/e)$，即比例 $d:r_1=a:e$ 与所选的点 P 无关。它的倒数 $\varepsilon=e/a$ 叫作数值偏心率。图 13.5-8 中表明了怎样以两根线段的比来作出 ε：由 $|PR_1|=r_1$ 在 F_2P 上作出 R_1 点，而由 $CR_2\parallel F_2R_1$ 在 F_1R_1 上作出 R_2 点，然后 $|CF_1|:|CR_2|=e:a=\varepsilon$。

设点 P 与焦点 F_1 的距离是 r_1，与对应的准线 l_1 的距离是 d，则椭圆是平面上所有满足比例 $r_1:d$ 为常数 $\varepsilon=e:a$ 的点的轨迹。

椭圆的参数表达式　椭圆可视为圆 $\xi^2+\eta^2=a^2$ 按比例 $y:\eta=b:a$ 缩小所有的纵坐标而得的仿射映象。在这里，$\xi=x$，$\eta=y\,a/b$ 这种变换使圆变成了椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$。作图可按下面的方法进行：过原点作一条射线与半径为 a 和 b 的圆 c_a 和 c_b 交于点 A 和 B，过 A 和 B 作两轴的平行线，其交点就是椭圆上的点 P。可以看出，条件 $y:\eta=b:a$ 是满足的。如果 t 是任意一条射线与 x 轴的夹角，我们可得到参数表达式 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，它满足椭圆方程(见图 13.5-9)。

椭圆的参数表达式	$x=a\cos t,\ y=b\sin t$

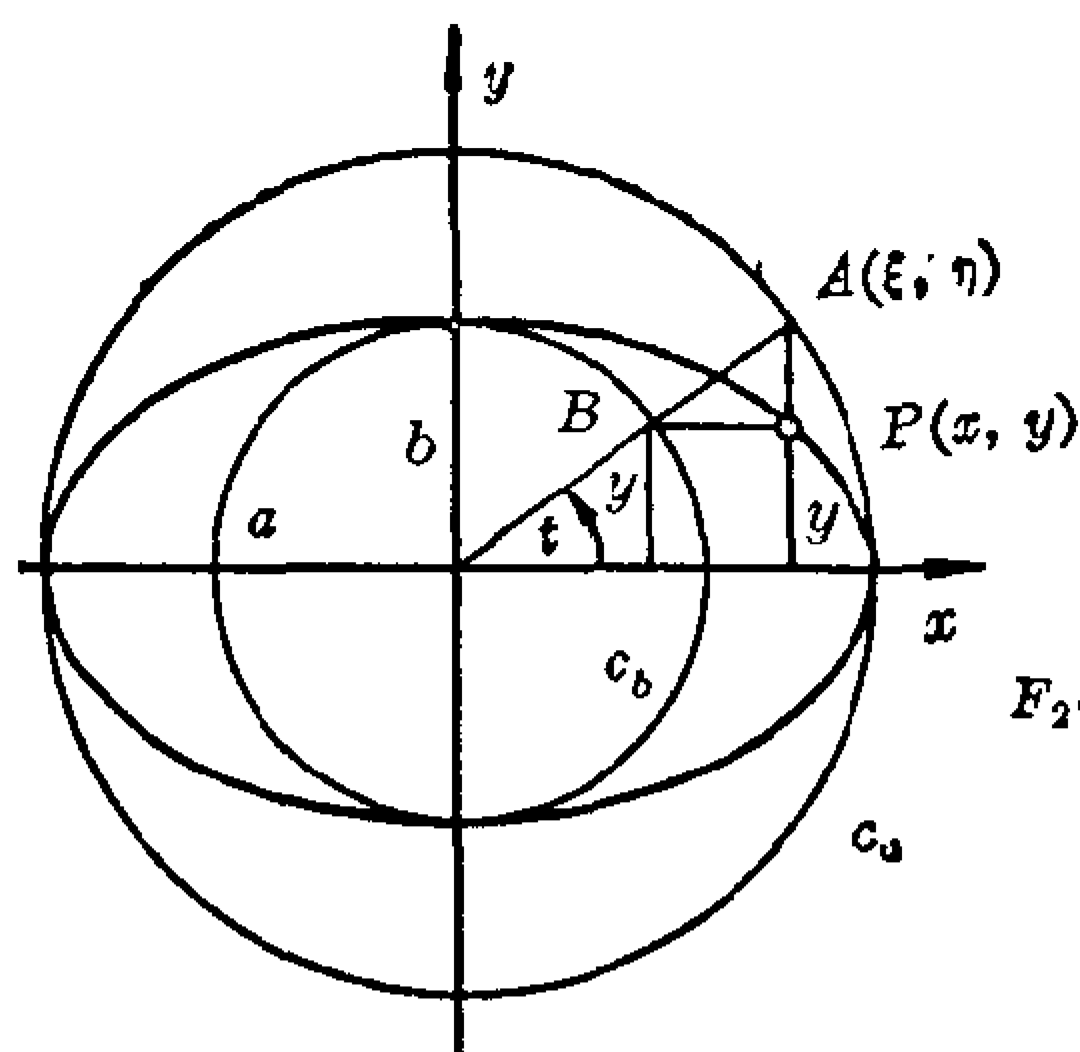


图 13.5-9 椭圆的参数表示

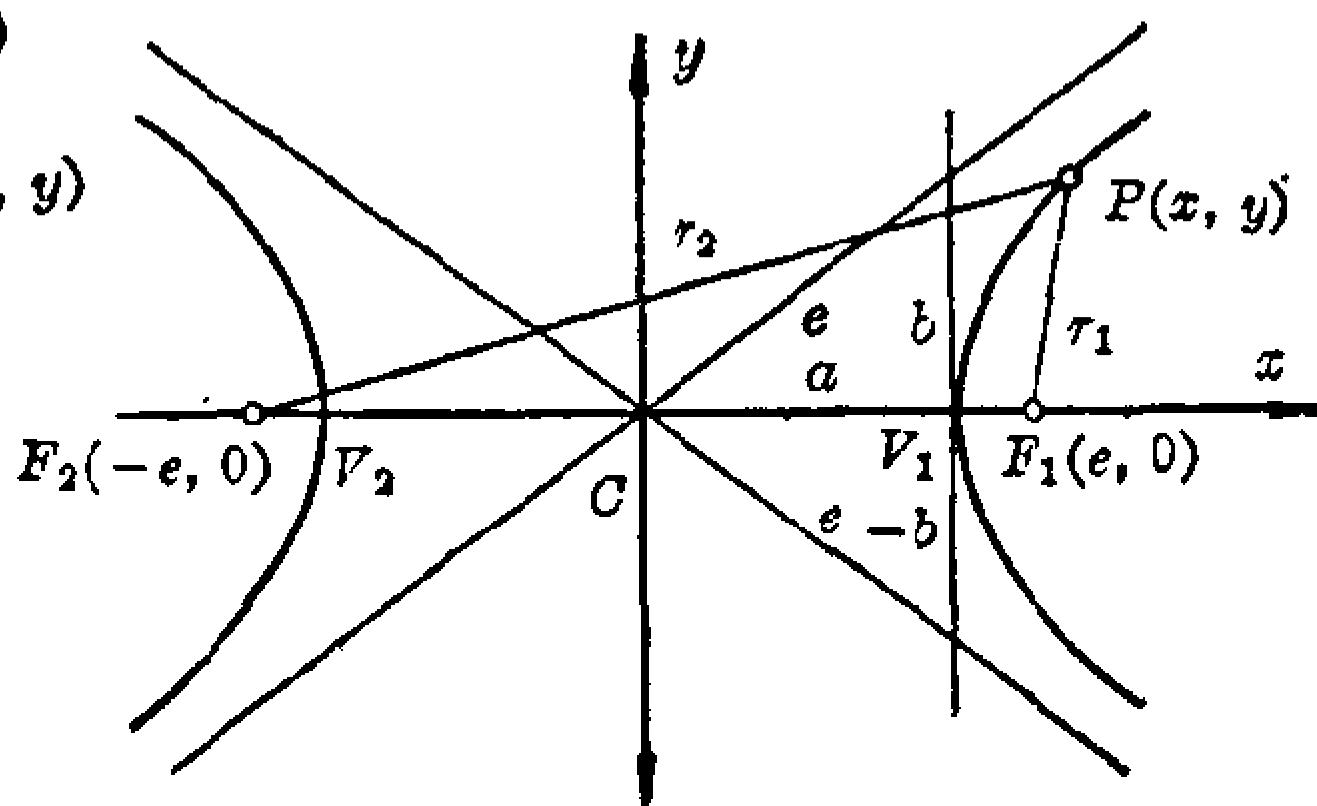


图 13.5-10 在中心位置的双曲线方程

双曲线方程

和椭圆一样，双曲线关于过顶点 V_1 和 V_2 的轴是对称的，以及关于垂直于这条轴并过中心 C，$|CV_1|=|CV_2|$ 的直线对称。线段 $|CV_1|$ 用 a 表示，而线段 $|CF_1|=|CF_2|$ 用 e 表示。双曲线没有短半轴；然而因为 $e>a$，存在一条由 $b^2=e^2-a^2$ 给出的线段 b。

双曲线的中心型方程（标准方程） 由于双曲线的对称性，存在一个特别适合的笛卡尔坐标系，在此坐标系中，x 轴与双曲线的轴重合，而 y 轴与过 C 并垂直于此轴的直线相一致。焦点的坐标是 $F_1(+e, 0)$ 和 $F_2(-e, 0)$（见图 13.5-10）。双曲线上任意一点 $P(x, y)$ 与焦点的距离是

$$|PF_1|=r_1=\sqrt{y^2+(x-e)^2}$$

和

$$|PF_2|=r_2=\sqrt{y^2+(x+e)^2}。$$

从双曲线的定义有：$r_2-r_1=2a$ 或 $r_2=2a+r_1$。如将 r_1 和 r_2 的表达式代入，两边平方后剩下一项平方根：

$$\cancel{y^2}+(x+e)^2=4a^2+4a\sqrt{y^2+(x-e)^2}+\cancel{y^2}+(x-e)^2$$

或

$$ex-a^2=a\sqrt{y^2+(x-e)^2}。$$

再两边平方可得：

$$e^2x^2+a^4-\cancel{2a^2ex}=a^2y^2+a^2x^2-\cancel{2a^2ex}+a^2e^2。$$

因为 $e^2=a^2+b^2$，这个方程能简化成:

$$\cancel{a^2x^2}+b^2x^2+\cancel{a^4}=a^2y^2+\cancel{a^2x^2}+\cancel{a^4}+a^2b^2$$

或
$$x^2/a^2-y^2/b^2=1。$$

双曲线的中心型方程	$x^2/a^2-y^2/b^2=1$

数 b 的意义可从下面重新加以整理过的方程中看出:

$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2),$$
$$y/x=\pm(b/a)\sqrt{1-a^2/x^2}。$$

当 $x\to\infty$ 时，这个表达式的极限值是 $\lim\limits_{x\to\infty}y/x=\pm b/a$。把这两极限值作为斜率的两根直线 $\eta=\pm(b/a)\xi$ 就是双曲线的渐近线。

由于对称性，只考虑双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 和直线 $\eta=(b/a)\xi$ 在第一象限中的特性就已足够了。

双曲线的渐近线	$y=\pm(b/a)x$

如果从（渐近线上的）一点(ξ, η)，其中 $\xi>a$，向 x 轴作一垂线，它与双曲线相交于点 $P(x, y)$。那末 $\xi=x$，并从 $\eta=(b/a)x$ 和 $y=(b/a)x\sqrt{1-(a^2/x^2)}$ 可有 $y<\eta$，因为因子 $\sqrt{1-a^2/x^2}$ 总是小于 1。由于从双曲线方程可得到$(x/a-y/b)=[x/a+y/b]^{-1}$，在 $x\to\infty$ 时，$(x/a+y/b)\to\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x/a)-(y/b)]=0$ 或者当 $x\to\infty$ 时，$[(b/a)x-y]=(\eta-y)\to0$。由此得知 x 越大，则差 $\eta-y$ 越小。对 x 较大的值，双曲线任意地接近直线 $\eta=(b/a)\xi$。这条直线就是双曲线的渐近线。从直角边为 a 和 b 及斜边为 e 的直角三角形可求得它对 x 轴的倾角。

方程 $y^2/a^2-x^2/b^2=1$ 表示一双曲线（见图 13.5-11），其中 a 是主半轴并在 y 轴上，把 $\xi-\eta$ 坐标系旋转 $\psi=-\pi/2$ 的角度就可以看出。在 $\xi=y$, $\eta=-x$ 这种变换下（参见抛物线的方程），双曲线 $\xi^2/a^2-\eta^2/b^2=1$ 就变成了 $y^2/a^2-x^2/b^2=1$。

如果坐标系平移后，双曲线的中心坐标是(c, d)，则双曲线的中心型方程会变成下列形式之一:

$$(x-c)^2/a^2-(y-d)^2/b^2=1\quad 或\quad (y-d)^2/a^2-(x-c)^2/b^2=1。$$

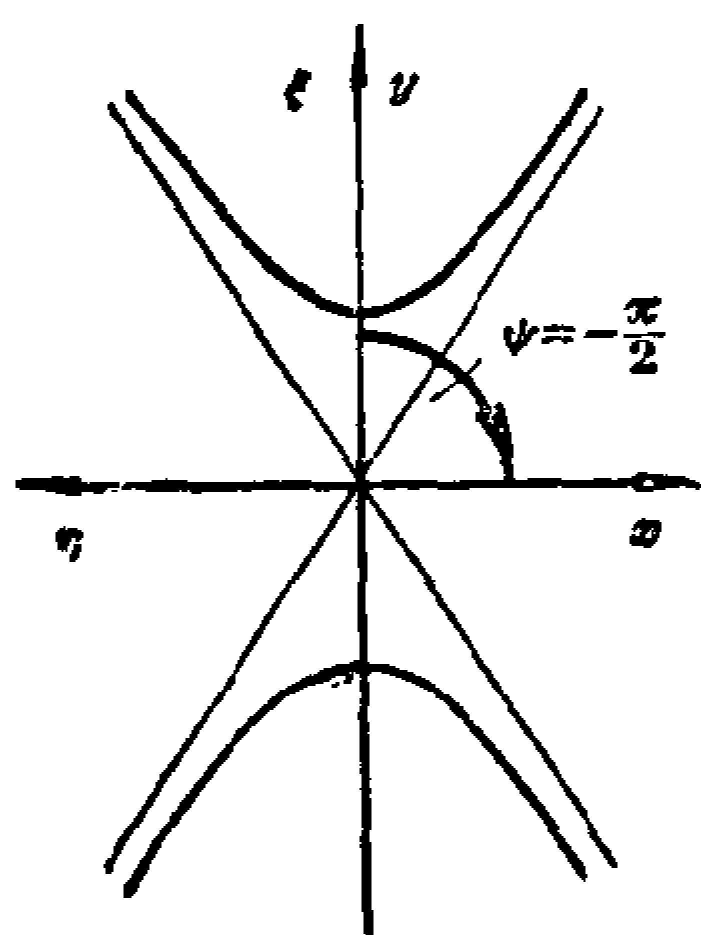


图 13.5-11 ξ-η 坐标系的旋转和双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$

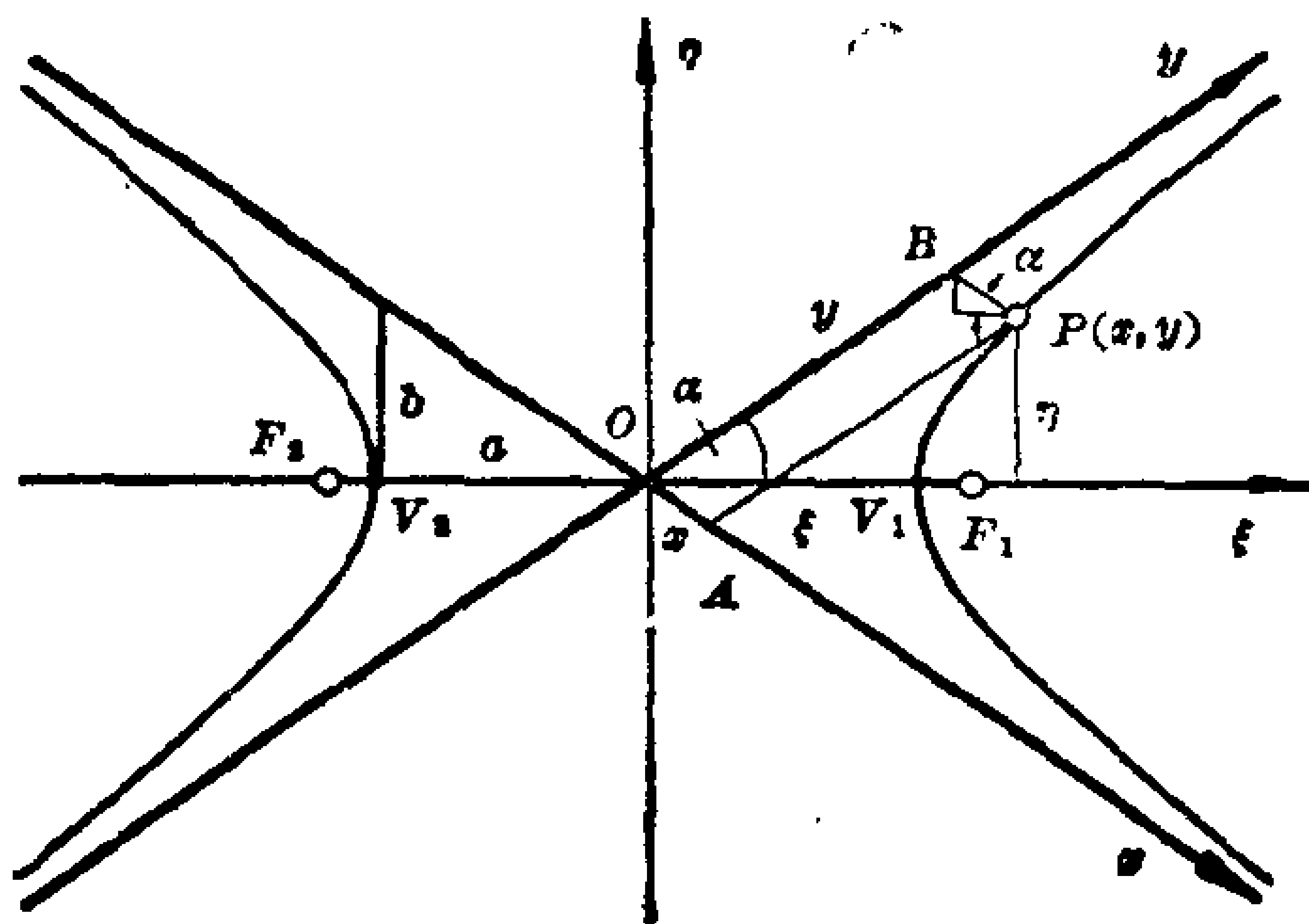


图 13.5-12 双曲线的渐近线方程

【例】 双曲线 $x^2/25-y^2/4=1$ 的顶点是 $V_1(5,\ 0)$和 $V_2(-5,\ 0)$，焦点是 $F_1(\sqrt{25+4},\ 0)$和 $F_2(-\sqrt{29},\ 0)$，而渐近线 $y=\pm(2/5)x$。

在另一方面，双曲线 $y^2/25-x^2/4=1$ 的顶点是 $V_3(0,\ 5)$ 和 $V_4(0,\ -5)$，焦点是 $F_3(0,\ \sqrt{29})$与 $F_4(0,\ -\sqrt{29})$ 和渐近线 $y=\pm(5/2)x$。

双曲线的渐近线方程 如果把双曲线的渐近线作为坐标系的轴，则双曲线的方程就变得特别简单(见图 13.5-12)。设 ξ 和 η 表示原来直角坐标系的坐标，而 x 和 y 是把渐近线取为斜坐标系的轴时的坐标。则在中心位置的双曲线方程是 $\xi^2/a^2-\eta^2/b^2=1$，而其渐近线方程是 $\eta=\pm(b/a)\xi$。如果 $\tan\alpha=b/a$，则坐标之间满足下列关系：

$$\left|\begin{matrix}\eta=y\sin\alpha-x\sin\alpha\\ \xi=x\cos\alpha+y\cos\alpha\end{matrix}\right| \quad 或 \quad \left|\begin{matrix}\eta=(y-x)\sin\alpha\\ \xi=(y+x)\cos\alpha\end{matrix}\right|。$$

代入中心型方程，得：

$$[(y+x)^2\cos^2\alpha]/a^2-[(y-x)^2\sin^2\alpha]/b^2=1$$

或
$$(y+x)^2b^2\cos^2\alpha-(y-x)^2a^2\sin^2\alpha=a^2b^2。$$

因为 $b^2\cos^2\alpha=a^2\sin^2\alpha$，这给出 $2xy(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha)=a^2b^2$，因此 $4xy\cos^2\alpha=a^2$ 和 $4xy\sin^2\alpha=b^2$，相加后得：$4xy=a^2+b^2$。并且由于 $\sin 2\alpha=2ab/(a^2+b^2)$，最后可得 $xy\sin 2\alpha=ab/2$。这个方程说明平行四边形 $OAPB$ 总是有相同的面积。

双曲线关于它渐近线的方程具有形式 $xy=$常数。反之，具有这个形式的任何函数表示了一条双曲线。

以渐近线为坐标轴的双曲线方程
$xy=(a^2+b^2)/4=e^2/4=$常数

数值偏心率　与双曲线的 y 轴平行，并且距离为 $|CL_1|=a^2/e$ 的直线叫作准线 l_1(见图 13.5-13)。顶点 V_1 与此准线的距离是 d'，这里 $d'=|V_1L_1|=a-a^2/e=a(e-a)/e$。而双曲线上任意一点 P 与准线的距离是 d，这里 $d=x-a^2/e$。由毕达哥拉斯定理，在三角形 F_1F_2P 中，$r_2^2=r_1^2+(2e)^2-2\cdot 2e(e-x)$ 或 $r_2^2-r_1^2=4ex$。因为 $r_2-r_1=2a$，我们有 $r_2+r_1=2ex/a$，因此 $r_2=a+ex/a$ 和 $r_1=ex/a-a$。把 $x=(r_1a+a^2)/e$ 代入到 $d=x-a^2/e$，可得 $d=r_1a/e$，即 $r_1:d=e:a=\varepsilon$。这个常数 ε 叫作数值偏心率。

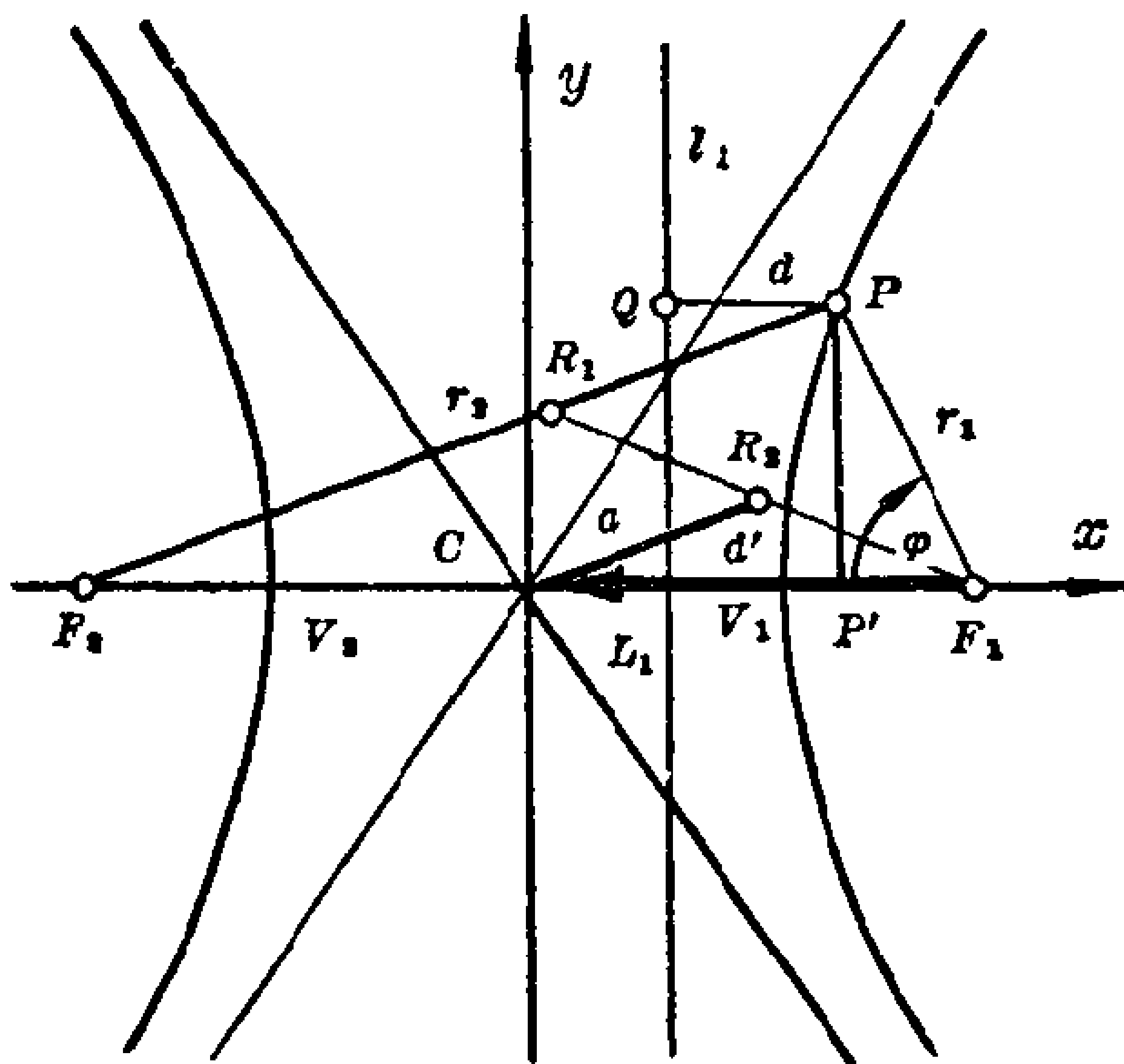


图 13.5-13　双曲线的数值偏心率

平面上的点 P 与焦点 F_1 的距离是 r_1，与对应准线 l_1 的距离是 d，则满足比例 $r_1:d$ 为常数值 $\varepsilon=e:a$ 的所有点 P 的轨迹是一双曲线。

如果在 F_2P 上由 $|PR_1|=r_1$ 决定 R_1 点，而在 R_1F_1 上由 $CR_2 \parallel F_2P$ 决定 R_2 点，那末 $|CF_1|:|CR_2|=e:a$。

圆锥曲线和直线

圆锥曲线和直线的交点　作为平面和圆锥的交线，在用戴德林球引进圆锥曲线时，可以很清楚地看到戴德林球的切圆 c 上每一点 P 与圆锥曲线上的一点 P' 相对应。在切圆平面 E_1 或 E_2 上的一条直线 l 与截面 E 上的一条直线 l' 相对应，这条直线就是平面 E 和由直线 l 和圆锥顶点 Z 所决定的平面的交线。就象任何投影映射一样，在 E_1 或 E_2 中的交点对应投影平面 E 内的交点。按照直线 l 与圆 c_1 或 c_2 相交、相切或不相交，其投影直线 l' 是圆锥曲线的割线、切线或与圆锥曲线没有公共点；圆

上还有一些点，其投影是圆锥曲线的无穷远点，因此这就必须单独处理。

1．在**抛物线**的情况下，这是圆 c 的点 D；它具有离开准线 l 的最大距离（参看图 13.5-1）。**过点 D 的圆 c 的每一条割线，其投影是一条平行于抛物线轴的直线**（例如，DA 的投影是 BP），因此它与抛物线只交于一个有限点 P。圆 c 在 D 点的**切线**与准线平行，因此其投影是 E 的**无穷远直线**。

2．在**双曲线**的情况下，过圆锥的顶点 Z 与平面 E 平行的平面与圆相交于两点 P_2 和 P_3，它们的投影是在渐近线的无穷远处。**过这两点的直线把 E 的无穷远直线作为投影**。而**过其中一点**，例如 P_2 的圆 c_1 或 c_2 的**割线**，把**平行于渐近线的直线**作为它的投影，它与双曲线只有一个在有限处的交点。而圆在 P_2 和 P_3 处的**切线**与**渐近线**重合，因此它们的交点是双曲线中心 C 的逆投影。

要求得圆锥曲线与直线的交点，从直线方程的笛卡尔正则形式很容易求得，而不管一条割线只有一个交点的这种特殊情况是否发生(对于抛物线，$mP=0$；对于双曲线，$m_h=\pm(b/a)$)。在所有情况，只要把从线性方程得到的 y 值代到圆锥曲线的方程中去就得到一个二次方程，其判别式给出了交点的个数。

【例 1】 求直线 $y=-x/2+2$ 与抛物线 $x^2=4y$ 的交点坐标，我们只要求出这两个方程组成的方程组即可。用代入法得到：

$$x^2=-2x+8 \quad \text{或者} \quad x^2+2x+1=9,$$

$$x_1=2,\ x_2=-4 \quad \text{和} \quad y_1=1,\ y_2=4。$$

因此交点坐标是 $P_1(2,\ 1)$ 和 $P_2(-4,\ 4)$。

【例 2】 圆锥曲线 $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$，它的轴与坐标轴平行，这是因为方程中没有混合积的项。方程能写成：

$$16x^2+32x+16+25y^2-100y+100-16-100-284=0$$

或

$$16(x+1)^2+25(y-2)^2=400,$$

或

$$(x+1)^2/25+(y-2)^2/16=1。$$

圆锥曲线中心 C 的坐标是 $(-1,\ 2)$，直线 $5y=28x-62$ 与此椭圆相交于点 $P_1(2,\ -6/5)$ 和 $P_2(3,\ 22/5)$。因为用代入法，把直线方程代入椭圆方程，得到二次方程 $x^2-5x+6=0$，其根是 $x_1=2$，$x_2=3$。

切线的斜率。圆锥曲线的切线方程 就象圆那样，用解析几何方法可以得到抛物线、椭圆和双曲线的切线方程。然而，用**微分**的方法更加方

便。圆锥曲线方程在 x_1 点处的导数就给出了圆锥曲线在点 $P_1(x_1, y_1)$ 处的切线斜率，这里 y_1 是函数值，即在 x_1 处圆锥曲线的纵坐标。把圆锥曲线的方程考虑进去，直线方程的点向式给出了切线方程：例如，对于抛物线 $y^2=2px$，用微分可得 $2yy'=2p$ 或 $y'=p/y$。因此（在点 P_1 处）切线的斜率 y_1' 是 p/y_1，而切线方程是

$$y_1'=(y-y_1)/(x-x_1) \quad 或 \quad (p/y_1)x-(p/y_1)x_1=y-y_1,$$

$$px-px_1=yy_1-y_1^2=yy_1-2px_1,$$

圆锥曲线	方　　程	在点 $P_1(x_1, y_1)$ 的切线	
		斜　率	方　　程
	抛　物　线　顶　点　在　V		
$V(0, 0)$	$y^2=2px$	p/y_1	$yy_1=p(x+x_1)$
$V(c, d)$	$(y-d)^2=2p(x-c)$	$p/(y_1-d)$	$(y-d)(y_1-d)=p(x-c+x_1-c)$
	椭　圆　中　心　在　C		
$C(0, 0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$	$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$
$C(c, d)$	$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{(y-d)^2}{b^2}=1$	$-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1-c}{y_1-d}$	$\frac{(x-c)(x_1-c)}{a^2}+\frac{(y-d)(y_1-d)}{b^2}=1$
	圆　中　心　在　C		
$C(0, 0)$	$x^2+y^2=r^2$	$-x_1/y_1$	$xx_1+yy_1=r^2$
$C(c, d)$	$(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$	$-\frac{x_1-c}{y_1-d}$	$(x-c)(x_1-c)+(y-d)(y_1-d)=r^2$
	双　曲　线　中　心　在　C		
$C(0, 0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$	$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$
$C(c, d)$	$\frac{(x-c)^2}{a^2}-\frac{(y-d)^2}{b^2}=1$	$\frac{b^2}{a^2}\frac{(x_1-c)}{(y_1-d)}$	$\frac{(x-c)(x_1-c)}{a^2}-\frac{(y-d)(y_1-d)}{b^2}=1$

即
$$p(x+x_1)=yy_1。$$
对于椭圆和双曲线，如果 $P_1(x_1, y_1)$ 是切点，$x_1^2/a^2 \pm y_1^2/b^2=1$; $2x_1/a^2 \pm 2y_1y_1'/b^2=0$; $y_1'=\mp(b^2x_1)/(a^2y_1)$ 是斜率，而切线方程是

$$y_1'(x-x_1)=y-y_1,\ \mp(xx_1/a^2)(b^2/y_1)\pm(x^2/a^2)(b^2/y_1)=y-y_1,$$
$$(xx_1/a^2)\pm(yy_1/b^2)=x_1^2/a^2\pm y_1^2/b^2 \quad 或者 \quad xx_1/a^2\pm yy_1/b^2=1。$$

对抛物线 $x^2=2py$, $y^2=-2px$ 和 $x^2=-2py$，椭圆 $x^2/b^2+y^2/a^2=1$ 以及双曲线 $y^2/a^2-x^2/b^2=1$ 可进行相应的推导。546 页的表包含了这些最重要的结果。

【例】 求圆锥曲线在一点的切线。椭圆 $(x+1)^2/25+(y-2)^2/16=1$ 在点 $P_1(2, -6/5)$ 处的切线方程是

$$(x+1)(x_1+1)/a^2+(y-2)(y_1-2)/b^2=1$$
或
$$16(x+1)(2+1)+25(y-2)(-6/5-2)=400,$$
$$48x+48-80y+160=400,\ y=(3/5)x-12/5。$$

圆锥曲线和直线的交角 这交角定义为这条直线和圆锥曲线在该交点处的切线之间的夹角，它可视为两直线的交角来计算。直线 $y=-x/2+2$ 和抛物线 $x^2=4y$ 相交于点 $P_1(2, 1)$，抛物线在 P_1 点处的切线 t_1 的方程是 $y=x-1$，它对 x 轴的倾角 α_2 的值是 $\alpha_2=45°$，而直线的倾角是 $\alpha_1=-26.56°$；因此它们之间的交角 ψ 是 $\psi=\alpha_2-\alpha_1=71.56°$（见图 13.5-14）。

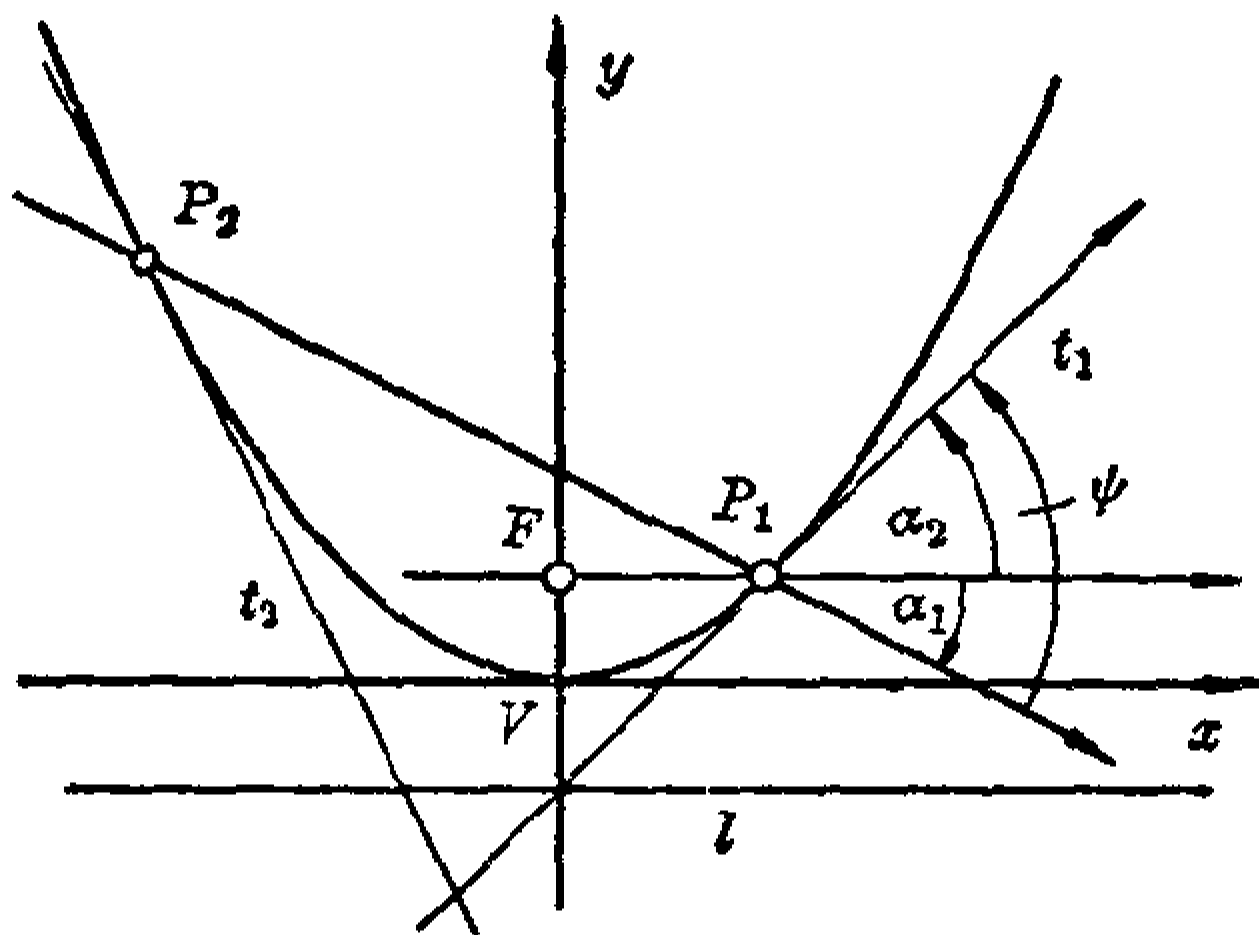


图 13.5-14 直线和抛物线的交点和交角

圆锥曲线的切线具有给定的斜率。 具有给定值 m_1 的斜率必须等于圆锥曲线的斜率。在抛物线的场合，由 m_1 给出的方向必须不是抛物线轴的方向，因为抛物线在这个方向上没有切线。从 $y_1'=m_1=p/y_1$，我们可得到一个坐标 $y_1=p/m_1$；而另一坐标能从抛物线的方程得到，因为切点的坐标必须满足此方程。在椭圆或双曲线的情形下（$m_1=\mp b^2x_1/a^2y_1$）我们得到切点坐标 x_1 和 y_1 的比值，代到圆锥曲线的方程中去，得到 $x_1^2=a^4m_1^2/(a^2m_1^2\pm b^2)$，对所有的椭圆和 $|m_1|>b/a$ 的双曲线，这个纯二次方程有

两个数值相等的根。这个结果与下面的几何性质相对应：**对于任何方向，总有两条平行的切线与椭圆相切**，并且切点关于中心对称。但对双曲线而言，这种情况只发生于**按给定方向过原点的直线位于渐近线以外的区域时**。如果所需之切线平行于直线 $y=mx+c$，那末由 $m_1=m$ 就决定 m_1；如果切线与直线 $y=mx+c$ 垂直，那末 $m_1=-1/m$；最后，如果两条直线之间交角是 ψ，那末从 $\tan\psi=(m_1-m)/(1+m_1m)$ 得到值 $m_1=(m+\tan\psi)/(1-m\tan\psi)$。

【例】 如给出椭圆 $36x^2+100y^2=9$ 和直线 $y=-(4/5)x$，则 $m=-4/5$。因 $\dfrac{x^2}{(9/36)}+\dfrac{y^2}{(9/100)}=1$，椭圆的半轴长是 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=3/10$。对于平行于此直线的切线，$-4/5=-(9/25)(x_1/y_1)$，即 $y_1=(9/20)x_1$。进一步，切线的切点位于椭圆上，即 $36x_1^2+100y_1^2=9$。从这两个方程用代入法得到 $36x_1^2+(100\cdot 81/400)x_1^2=9$ 或者 $x_1^2=36/225$，因此 $x_{1,2}=\pm 2/5$，$y_{1,2}=\pm 9/50$。故切点是 $B_1(2/5,\ 9/50)$ 和 $B_2(-2/5,\ -9/50)$；切线方程是 $y=-(4/5)x+\dfrac{1}{2}$ 和 $y=-(4/5)x-\dfrac{1}{2}$。

双曲线的任一条切线与渐近线形成的三角形(P_2CP_3)，其面积为常数 $A=ab$。

双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 在点 $P_1(x_1,y_1)$ 处的切线 $xx_1/a^2-yy_1/b^2=1$ 与渐近线 $y=\pm(b/a)x$ 相交于点 P_2 和 P_3（见图13.5-15）。用代入法求得其坐标:

$$x[x_1/a^2\mp y_1/(ab)]=1 \quad 或 \quad x_{2,3}=a^2b/(bx_1\mp ay_1)$$

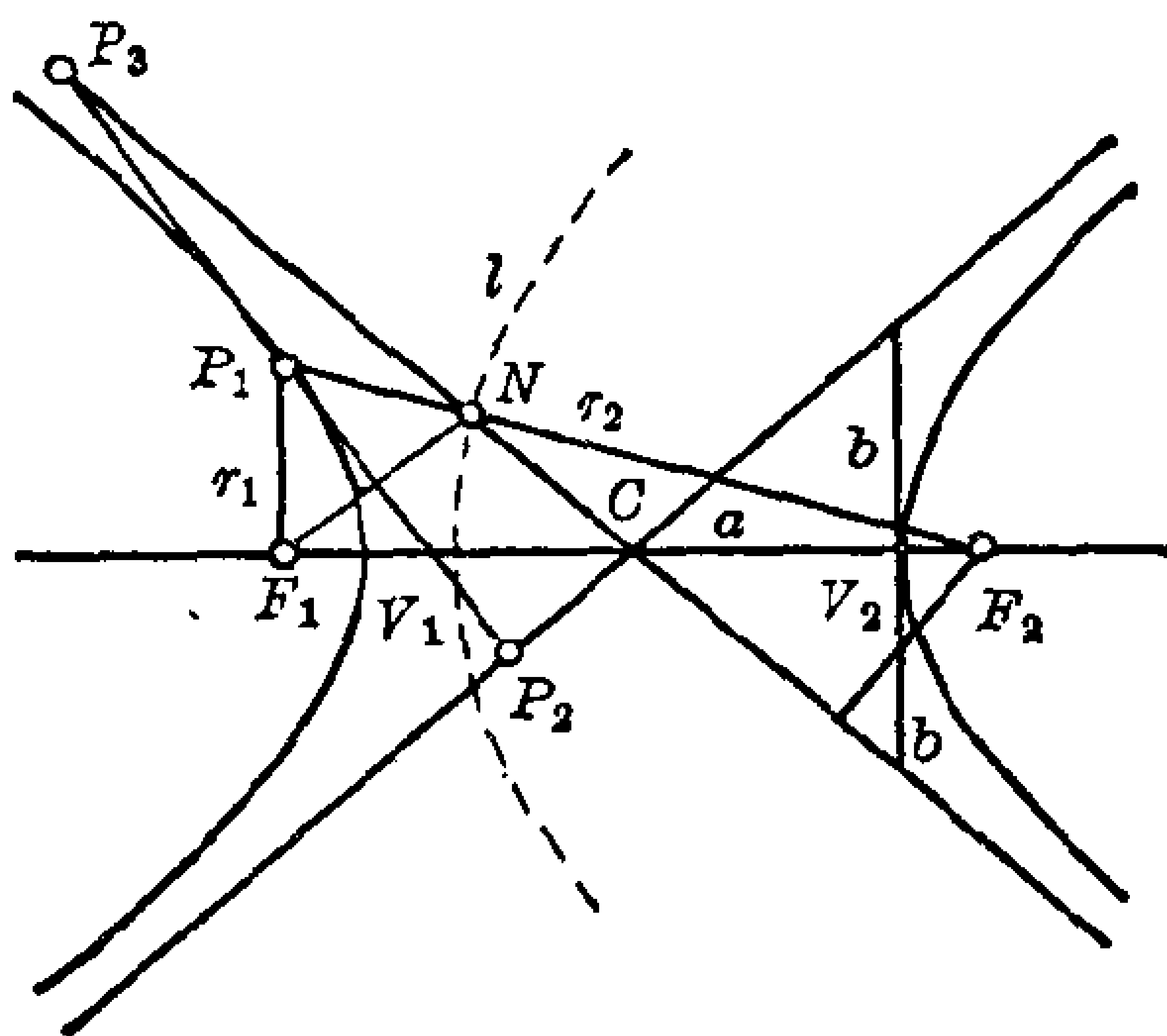


图13.5-15　由双曲线的切线和渐近线形成的三角形

和　　$y[\pm x_1/(ab)-y_1/b^2]=1$　或　$y_{2,3}=ab^2/(\pm bx_1-ay_1)$。

对三角形 CP_3P_2 的面积 A 有:

$$A=1/2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & x_3 & y_3\\ 1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

$$=1/2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a^2b/(bx_1+ay_1) & ab^2/(-bx_1-ay_1)\\ 1 & a^2b/(bx_1-ay_1) & ab^2/(bx_1-ay_1)\end{vmatrix}$$

$$=1/2[a^3b^3/(b^2x_1^2-a^2y_1^2)+a^3b^3/(b^2x_1^2-a^2y_1^2)]$$

$$=a^3b^3/(b^2x_1^2-a^2y_1^2)=ab/[x_1^2/a^2-y_1^2/b^2]=ab。$$

圆锥曲线的法线和极线

法线斜率和法线方程　法线是在切点 $P_1(x_1, y_1)$ 处与切线垂直的直线，于是我们可从圆锥曲线切线斜率表得到法线的斜率。因此由点向式得到法线方程，最重要的情形有:

圆锥曲线方程	法线斜率	在点 $P_1(x_1, y_1)$ 处法线的方程
$y^2=2px$	$-y_1/p$	$y-y_1=-(y_1/p)(x-x_1)$
$x^2/a^2+y^2/b^2=1$	$[a^2y_1/(b^2x_1)]$	$y-y_1=[a^2y_1/(b^2x_1)](x-x_1)$
$x^2/a^2-y^2/b^2=1$	$-[a^2y_1/(b^2x_1)]$	$y-y_1=-[a^2y_1/(b^2x_1)](x-x_1)$

【例】 双曲线 $x^2/16-y^2/9=1$ 在点 $P_1(5, -9/4)$ 处的法线方程是

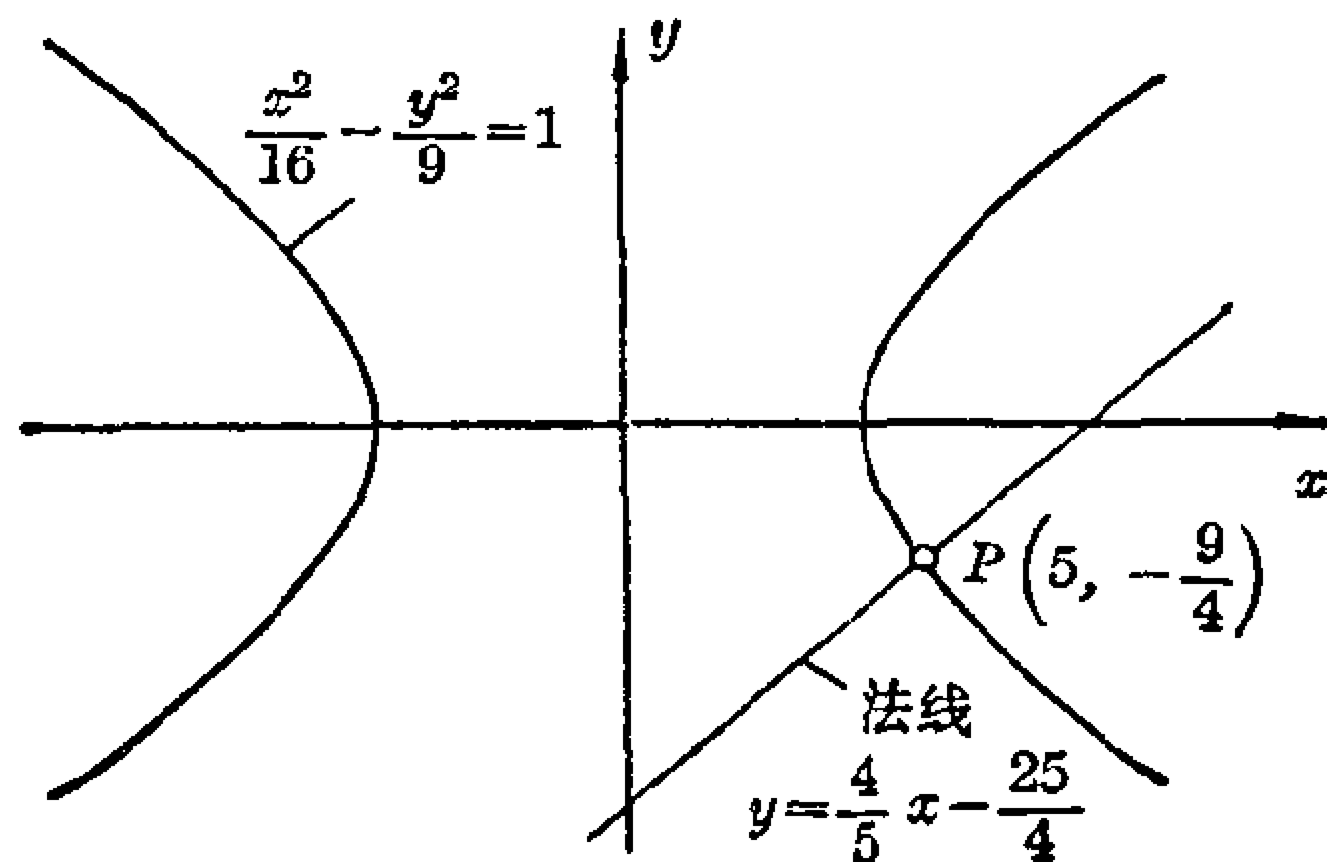


图 13.5-16　双曲线的法线

$y+\frac{9}{4}=-\frac{16(-9/4)}{9\times5}(x-5)$，即 $y+\frac{9}{4}=\frac{4}{5}x-4$ 或 $y=\frac{4}{5}x-\frac{25}{4}$（见图13.5-16）。

关于圆锥曲线法线的重要定理

连接抛物线上一点 P_1 和焦点的直线以及过 P_1 点与抛物线轴平行的直线与抛物线在 P_1 处的法线成相同的角，因为它们与在 P_1 点的切线也相交成相同的角。

在椭圆上一点 P_1 处的法线等分连接 P_1 和两个焦点的直线所组成的角，这是因为这两条线与在 P_1 点处的切线也组成相同的角。

椭圆在 P_1 点的切线和法线以及连接 P_1 和焦点的两条直线形成调和线束，因为在任一三角形 F_1F_2P 中（在 P_1 处）一个角的内角和外角平分线与构成这个角的两边成调和共轭。

双曲线在 P_1 点的切线和法线以及连接 P_1 和焦点的两条直线形成调和线束，因为在 P_1 点的切线和法线是三角形 F_1F_2P 在 P_1 点这个角的内角平分线和外角平分线。法线等分由 P_1 和两个焦点连线所形成的角的补角。

极线方程　和圆的情况一样，从外面一点 $P_0(x_0, y_0)$ 向圆锥曲线引切线可以用极点 p_0 的极线 p_0 来求得。极线 p_0 定义为连接切线 t_1 和 t_2 的切点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的直线（见图13.5-17）。例如，从两条关于一个处于中心位置的椭圆的切线方程

$$(t_1)\ x_1x/a^2+y_1y/b^2=1$$

和

$$(t_2)\ x_2x/a^2+y_2y/b^2=1$$

得到方程

$$(p_0)\ xx_0/a^2+yy_0/b^2=1,$$

这就是极线方程。因为这是一条直线的方程，并且点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的坐标满足此方程。

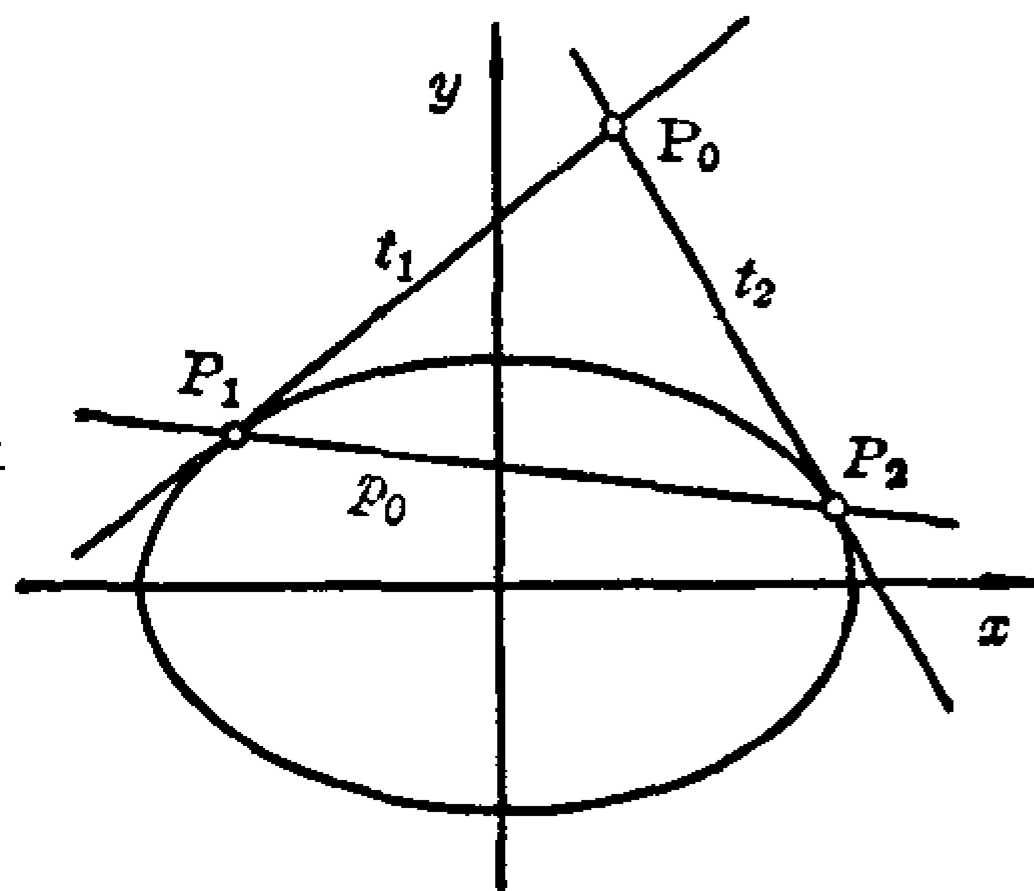


图 13.5-17　从椭圆外一点 P_0 向椭圆引的切线；极线 P_0

这个方程在形式上与切线方程一样，但是这里的常数 x_0, y_0 是极点的坐标，而不是切点的坐标。如果用同样的方法导出其他圆锥曲线的极线方程，可得到下面的表格：

圆锥曲线方程和极点 $P_0(x_0, y_0)$ 的极线方程			
抛物线	椭圆	圆	双曲线
$y^2=2px$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$x^2+y^2=r^2$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$yy_0=p(x+x_0)$	$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$	$xx_0+yy_0=r^2$	$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$

与圆锥曲线(例如双曲线)没有公共点的直线 q 可解释为圆锥曲线内部一点 Q 的极线。如取 q 上两个不同点 $Q_1(\xi_1, \eta_1)$ 和 $Q_2(\xi_2, \eta_2)$ 作为极点,则它们的极线 q_1 和 q_2 的方程是 $\xi_1 x/a^2-\eta_1 y/b^2=1$ 和 $\xi_2 x/a^2-\eta_2 y/b^2=1$。从这两个方程可以计算出极线 q_1 和 q_2 的交点 $Q(x_0, y_0)$。这给出 $xx_0/a^2-yy_0/b^2=1$,是过 Q_1 和 Q_2 的直线方程,因此是 Q 的极线 q。

【例】 方程 $(x-2)^2/16-(y+3)^2/100=1$ 和 $y=-70x+217$ 决定了一条双曲线和一条直线 q,它们互不相交(见图 13.5-18)。点 $Q_2(3\,^{31}/_{113}, -12^{23}/_{113})$ 和点 $Q_1(3, 7)$ 在 q 上。Q_1 的极线 q_1 的方程是 $(x-2)(\xi_1-2)/$

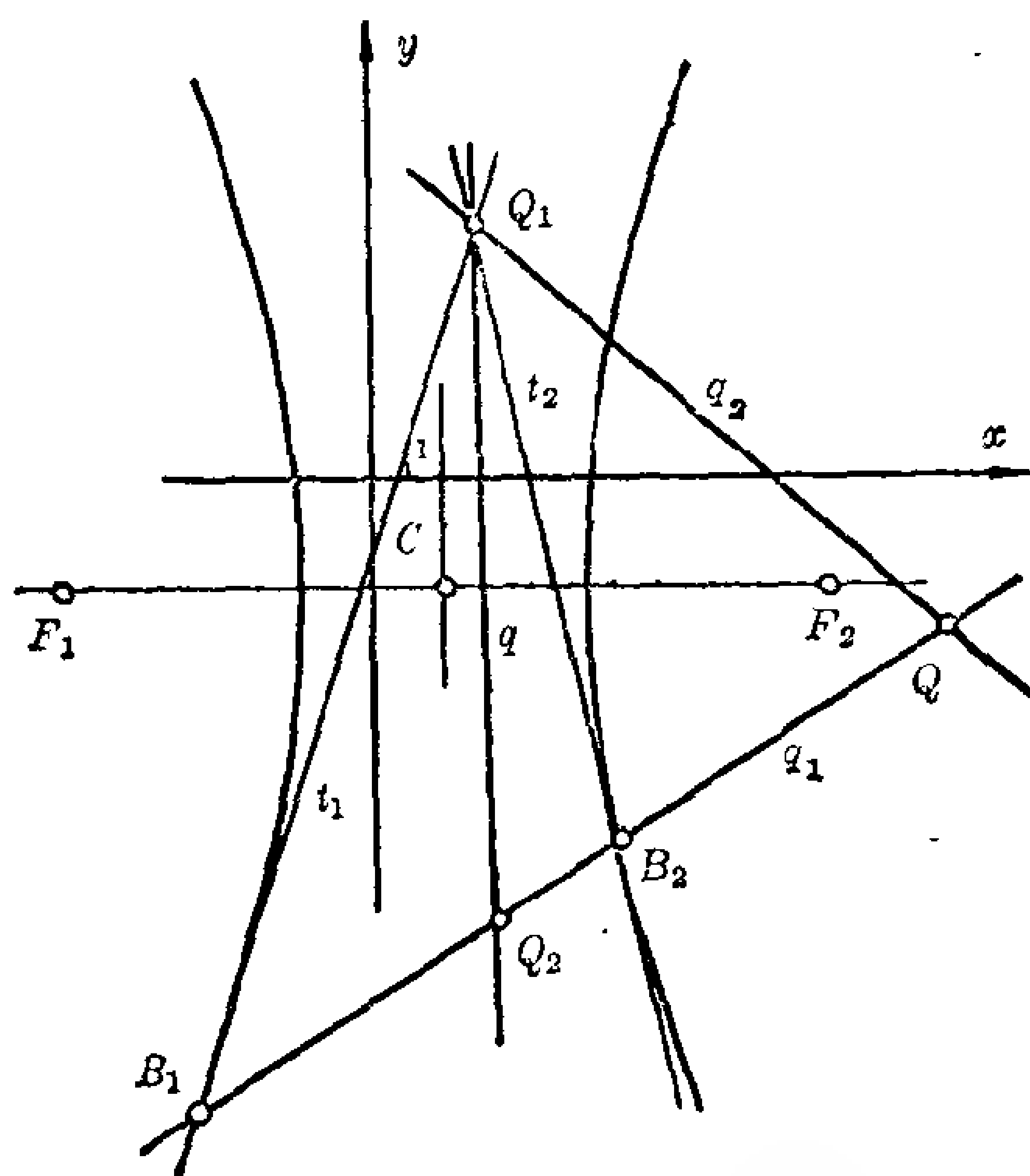


图 13.5-18 由 $(x-2)^2/16-(y+3)^2/100=1$ 给出的双曲线

$16-(y+3)(\eta_1+3)/100=1$，因为 $\xi_1=3$，$\eta_1=7$，故得到 $y={}^5/_8x-114/8$。

类似地，Q_2 的极线 q_2 的方程是 $100(x-2)(3^{31}/_{113}-2)-16(y+3)\cdot(-12^{23}/_{113}+3)=1600$ 或 $y=-{}^{45}/_{52}x+9^{31}/_{52}$。由这两个方程给出 q_1 和 q_2 交点 Q 的坐标，求得 $x_0=16$，$y_0=-4\frac{1}{4}$ 是直线 q 的极点 Q 的坐标。在三角形 QQ_1Q_2 中，每个顶点是其对边的极点。

从一点到圆锥曲线的切线 如果要画圆锥曲线外一点 P 到它的切线，那末取 P 的极线 p 与圆锥曲线的交点比较方便。这两交点 B_1 和 B_2 就是切线的切点。

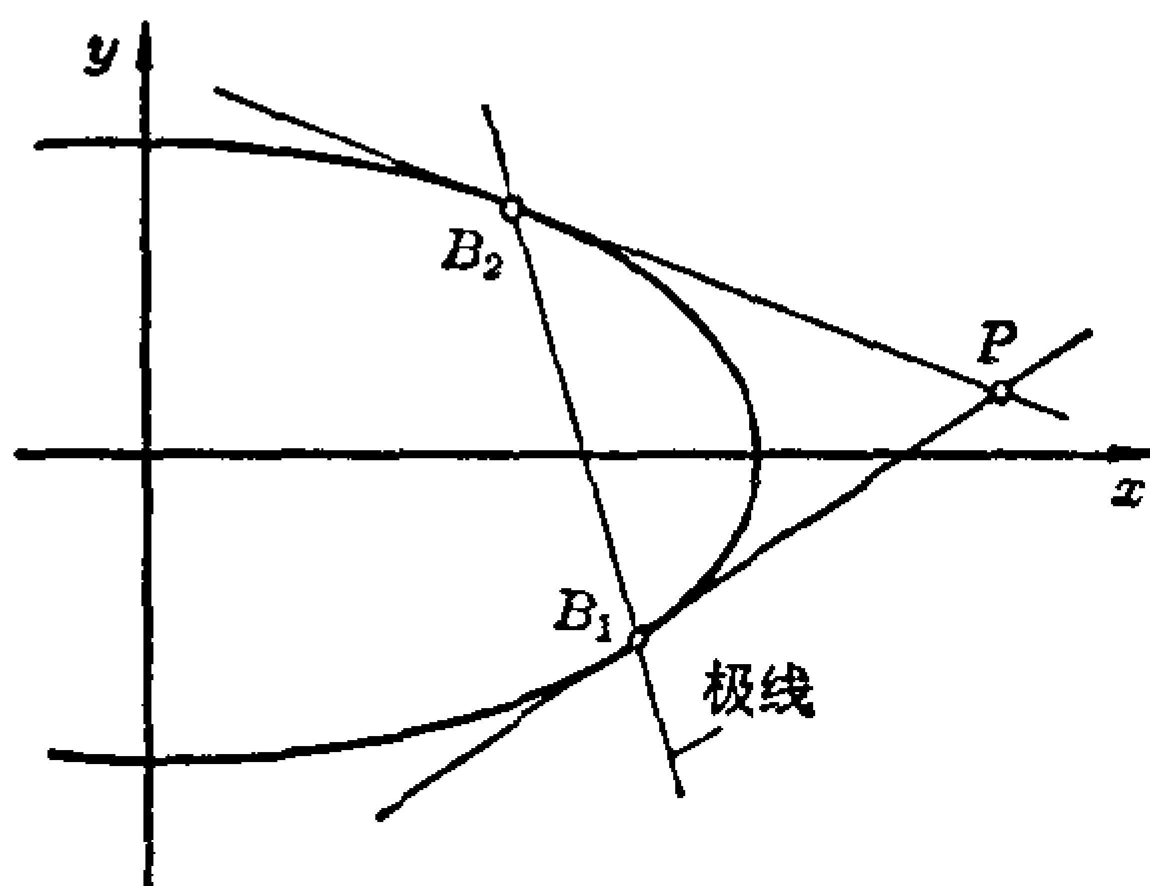


图 13.5-19 从点 P 到椭圆的切线

【例】 点 $P(14,1)$ 关于椭圆 $x^2+4y^2=100$ 的极线方程是 $14x/100+y/25=1$ 或 $14x+4y=100$，$y=-(7/2)x+25$（见图 13.5-19）。它与椭圆相交于点 $B_1(8,\ -3)$ 和 $B_2(6,\ 4)$，因 $x^2+4(49x^2/4-175x+625)=100$，$x^2-14x=-18$，$x_1=6$，$x_2=8$；$y_1=4$，$y_2=-3$。

因此，切线方程是 $y=(2/3)x-25/3$ 和 $y=-(3/8)x+25/4$。

两条圆锥曲线

两条圆锥曲线的交点 为了决定两个圆锥曲线的交点，必须解对应的方程组。其实数解就给出了交点的坐标。

【例 1】 抛物线 $y^2=12x$ 和圆 $(x+3)^2+y^2=72$ 相交于点 $S_1(3,\ 6)$ 和 $S_2(3,\ -6)$，因为它们的坐标满足这两个方程。从方程组

$$\left|\begin{aligned}(x_0+3)^2+y_0^2&=72\\ y_0^2&=12x_0\end{aligned}\right|$$

可以得出，它的解为 $x_1=3$，$y_1=6$ 和 $x_2=3$，$y_2=-6$。

【例 2】 为了决定椭圆 $(x+6)^2/80+(y-2)^2/20=1$ 和抛物线 $(x+6)^2=4(y-2)$ 的交点，必须解方程组（见图 13.5-20）。

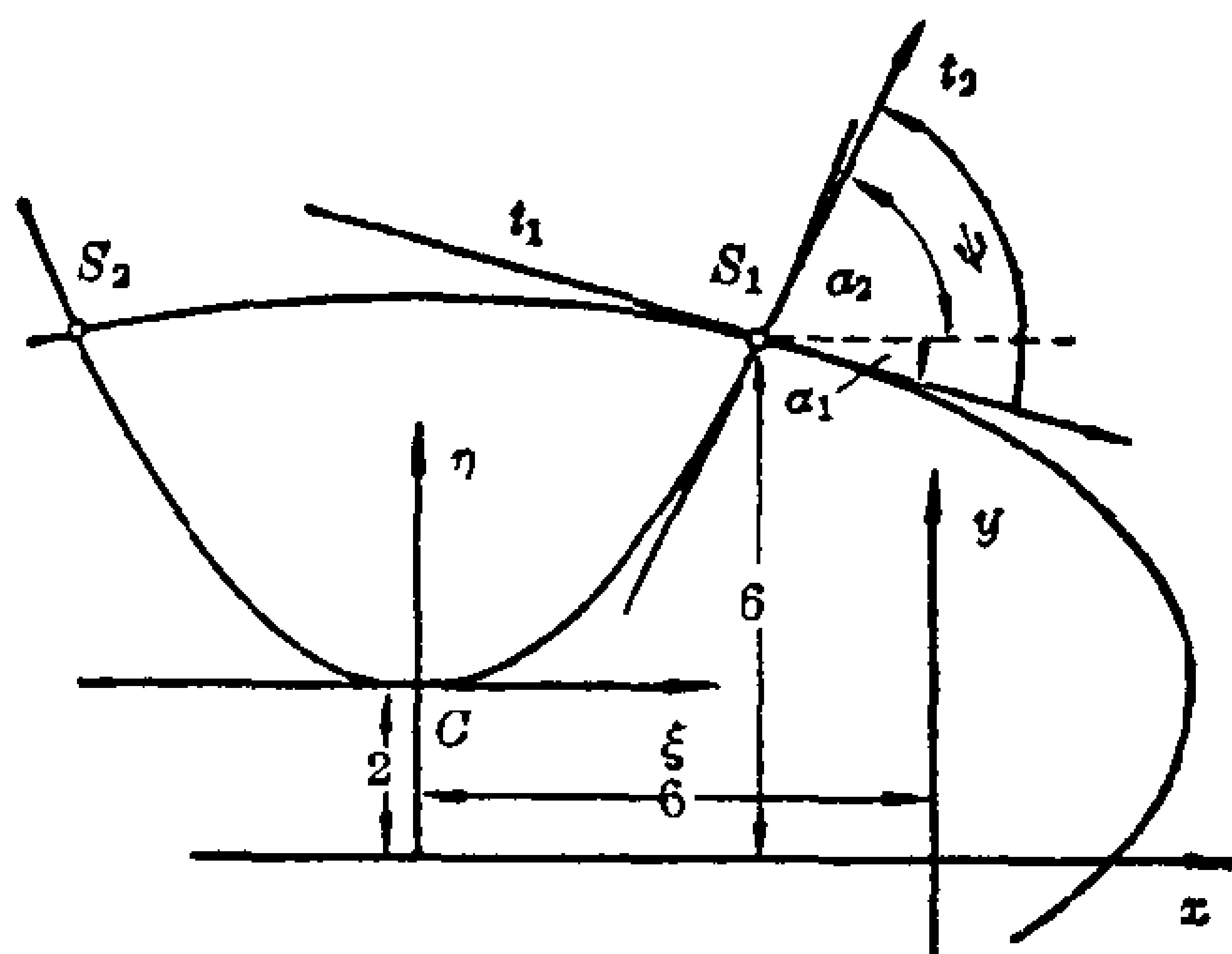


图 13.5-20 椭圆和抛物线的交点和交角

$$\left|\begin{array}{l}(x_0+6)^2/80+(y-2)^2/20=1\\(x_0+6)^2=4(y_0-2)\end{array}\right|$$

经 $x_0+6=\xi$, $y_0-2=\eta$ 坐标变换后，方程变成 $20\xi^2+80\eta^2=1600$ 和 $\xi^2=4\eta$。消去 ξ，得到 $80\eta+80\eta^2=1600$, $\eta^2+\eta+1/4=81/4$, $\eta_{1,2}=-1/2\pm 9/2$, $\eta_1=4$, $\eta_2=-5$ 和 $\xi_{1,2}=\pm 4$, $\xi_{3,4}=\pm 2\sqrt{5}i$。于是 $x_1=\xi_1-6=-2$, $x_2=\xi_2-6=-10$, $y_1=\eta_1+2=6$, $y_2=\eta_1+2=6$。因此这两条圆锥曲线有两个交点 $S_1(-2,6)$ 和 $S_2(-10,6)$。

两条圆锥曲线不一定要有（实的）交点，它们也可以相切于一点或两点。能够证明**两条非退化的圆锥曲线最多只有四个交点**。如果（双重）圆锥的一个截线是由相交于顶点的两条母线所组成，而另一个截线是由一条母线所组成，那末，对于截线的适当位置，这两条退化的圆锥曲线有无限多个公共点。

两条圆锥曲线的交角 两条圆锥曲线的交角定义为在交点处它们切线之间的夹角。因此我们必须求得切线方程，并计算交角。

【例 1】 抛物线 $y^2=12x$ 和圆 $(x+3)^2+y^2=72$ 交于点 $S_1(3,6)$ 和 $(3,-6)$。在 S_1 点圆的切线方程是 $y=-x+9$，而抛物线的切线方程是 $y=x+3$。因为它们的斜率互为负倒数，故在 S_1 处抛物线和圆相交成直角。类似地，在 S_2 处也成直角。

【例 2】 椭圆 $(x+6)^2/80+(y-2)^2/20=1$ 和抛物线 $(x+6)^2=4(y-2)$ 相交于点 $S_1(-2,6)$ 和 $S_2(-10,6)$。在 S_1 点椭圆的切线方程是 $(x+6)(x_1+6)/80+(y-2)(y_1-2)/20=1$ 或 $y=-(1/4)x+11/2$，而抛

物线的切线方程是$(x+6)(x_1+6)=2(y-2+y_1-2)$或$y=2x+10$。因为$\tan\alpha_1=-1/4$, $\alpha_1=-14°2'$和$\tan\alpha_2=+2$, $\alpha_2=+63°26'$，因此交角是$\psi=\alpha_2-\alpha_1=77°28'$。

圆锥曲线的公共顶点型方程

圆锥曲线的参数　在顶点位置的抛物线$y^2=2px$，其参数$2p$定义为过焦点并垂直于轴的抛物线的弦长；这就好比测量抛物线在焦点处的宽度。这个定义也能用到其他的圆锥曲线上去。

圆锥曲线的参数定义为过焦点并垂直于主轴的弦长。

主轴位于x轴的圆锥曲线，其参数可通过计算在焦点处正的纵坐标y_F的2倍来得出。即把焦点的横坐标x_F代入圆锥曲线的方程中，然后求解这个方程就得到y_F:

抛物线：$y^2=2px$, $x_F=p/2$, 因此$y_F=p$。

椭圆：$x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $x_F=e$, $e^2/a^2+y_F^2/b^2=1$, 因此$y_F=\pm(b/a)\cdot\sqrt{(a^2-e^2)}$，或因为$a^2-e^2=b^2$, $y_F=b^2/a$。

双曲线：$x^2/a^2-y^2/b^2=1$, $x_F=e$, $e^2/a^2-y_F^2/b^2=1$, 因此$y_F=\pm\sqrt{(e^2-a^2)}$，或因为$e^2-a^2=b^2$, $y_F=b^2/a$。

参　数	抛物线	$2p$
	椭　圆	$2p=2b^2/a$
	双曲线	$2p=2b^2/a$

圆锥曲线的顶点型方程　从圆锥曲线的顶点型方程可以很清楚地看出它们之间的内部关系。对于抛物线，这是$y^2=2px$。而对于椭圆和双曲线可通过坐标系的平移由中心型方程得出顶点型方程。

椭圆。从ξ, η坐标系中的中心型方程$\xi^2/a^2+\eta^2/b^2=1$，把原点移到顶点$V_2(-a, 0)$，即用$x=\xi+a$, $y=\eta$的变换，得到新坐标系中的方程$(x-a)^2/a^2+y^2/b^2=1$；这个方程能重新排成$y^2=2b^2x/a-b^2x^2/a^2$，或者使用椭圆的半参数$p=b^2/a$就变成$y^2=2px-(p/a)x^2$（见图13.5-21）。它与抛物线顶点型方程的关系是很明显的：从抛物线$2px$这一项中减去$(p/a)x^2$这一项就得到椭圆。这就解释了在英语中为什么用ellipse（椭

圆）这个名字：与抛物线相比，它是“缺少”了什么点的（希腊文中有缺陷这字为 *elleipsis*）。

椭圆的顶点型方程
$y^2=2px-(p/a)x^2,\ p=b^2/a$

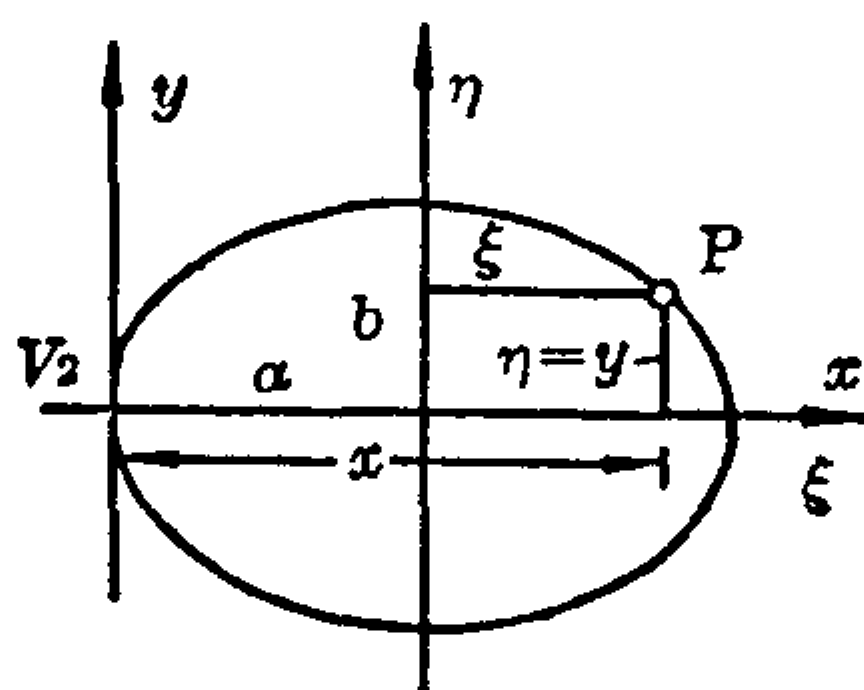


图 13.5-21 一椭圆变换到顶点位置

双曲线的顶点型方程
$y^2=2px+(p/a)x^2,\ p=b^2/a$

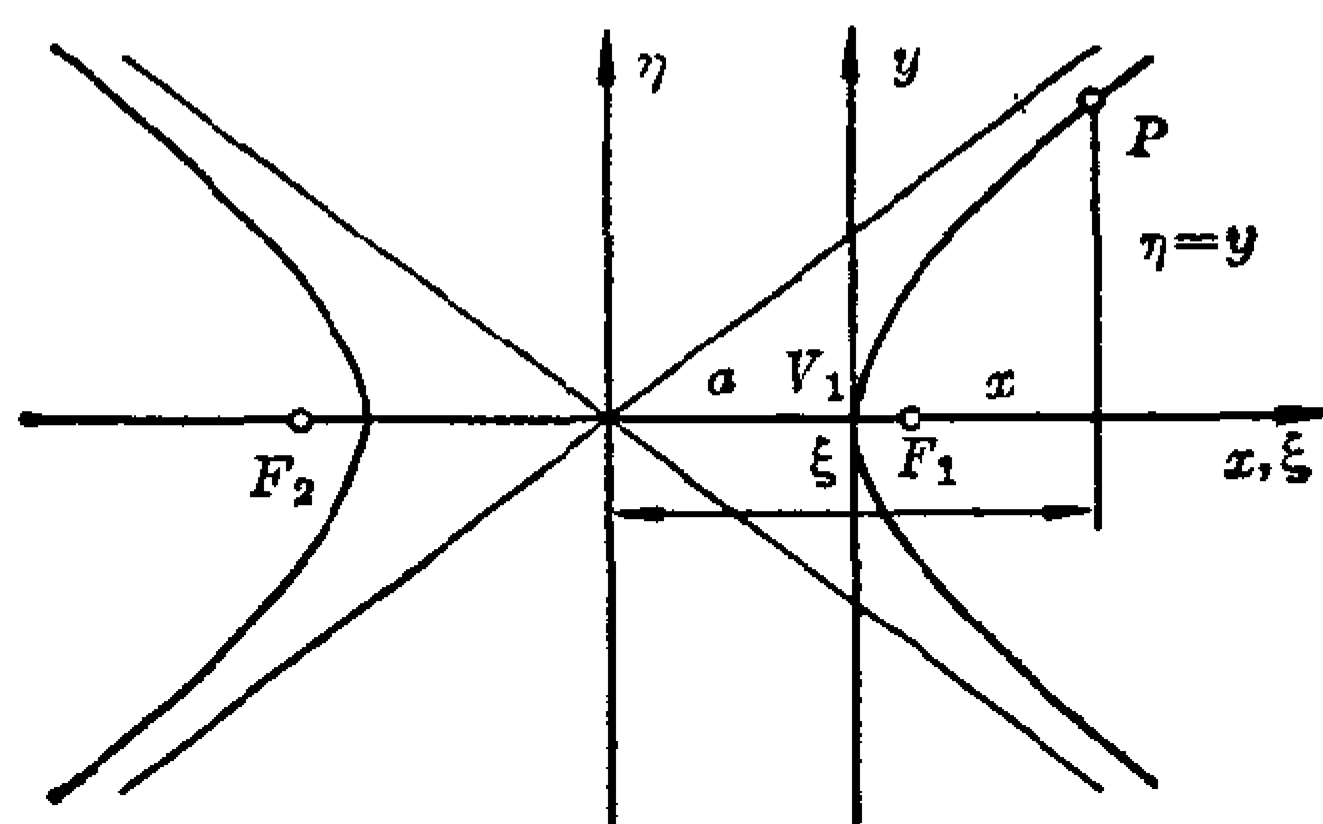


图 13.5-22 一双曲线变换到顶点位置

双曲线。从 ξ-η 坐标系中的中心型方程 $\xi^2/a^2-\eta^2/b^2=1$，把原点移到顶点 $V_1(a,\ 0)$，即用 $x=\xi-a,\ y=\eta$ 变换，就得到在新坐标系中的方程 $(x+a)^2/a^2-y^2/b^2=1$。把这个方程重新排列成 $y^2=2b^2/a+b^2x^2/a^2$，或者用双曲线的半参数 $p=b^2/a$，就变成 $y^2=2px+(p/a)x^2$（见图 13.5-22）。与抛物线 $y^2=2px$ 相比较，它多出一项 $(p/a)x^2$。这就解释了在英语中为什么要用 hyperbola（双曲线）这个名字（希腊文 *hyperbole* 表示过剩的

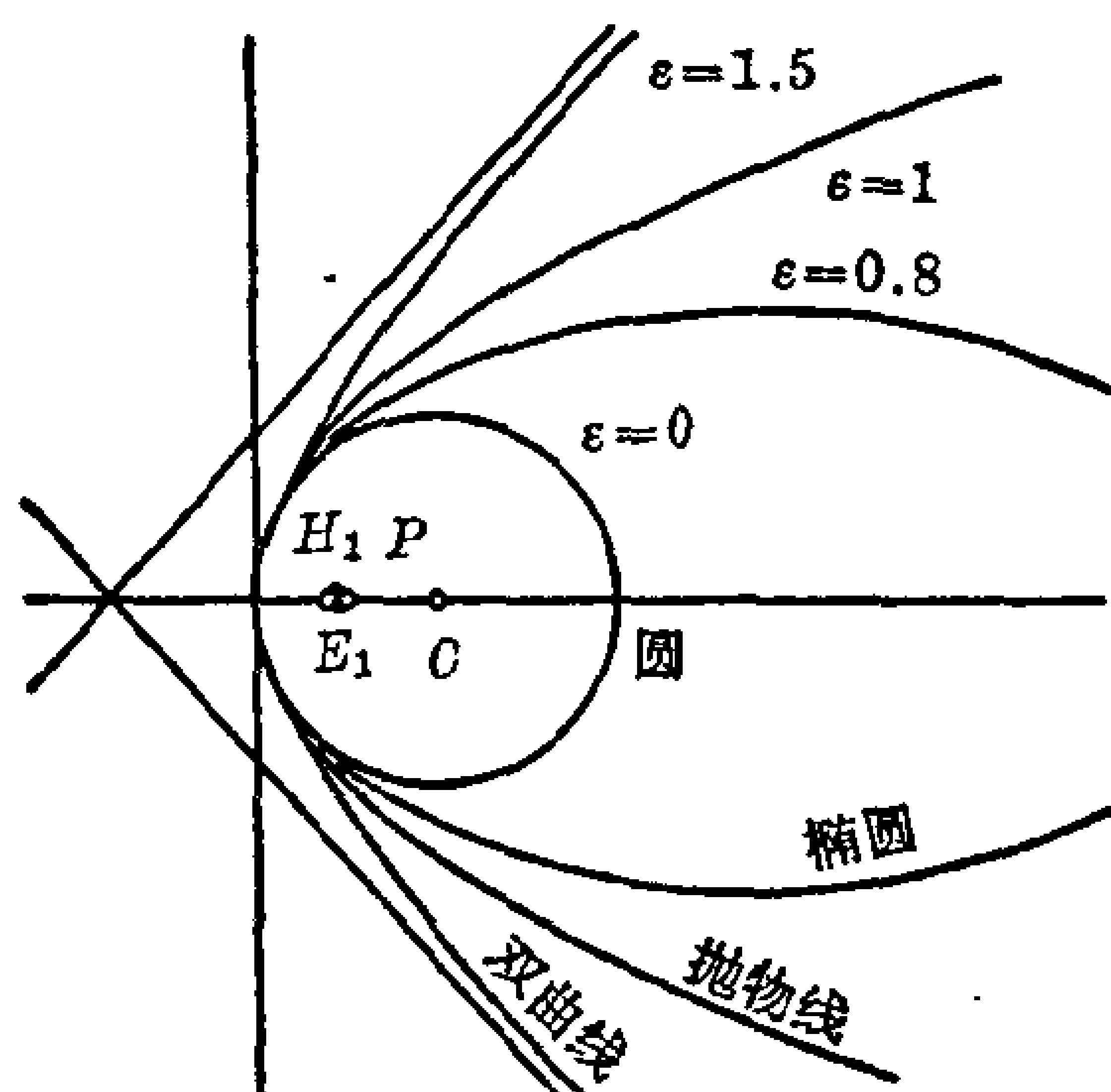


图 13.5-23 圆锥曲线和数值偏心率的依赖关系

意思)。

圆锥曲线的公共顶点型方程 引进数值偏心率 $\varepsilon=e/a$，对椭圆有 $0<\varepsilon<1$，对双曲线有 $\varepsilon>1$ 和对抛物线 $\varepsilon=1$。这样，所有这三种圆锥曲线方程可有一公共的顶点型方程。对椭圆而言，$p/a=b^2/a^2=(a^2-e^2)/a^2=1-\varepsilon^2>0$，因为 $0<\varepsilon<1$；在另一方面，对双曲线而言，$p/a=b^2/a^2=(e^2-a^2)/a^2=\varepsilon^2-1>0$，因此 $1-\varepsilon^2$ 总是负的。对 $\varepsilon=1$，很明显 $(1-\varepsilon^2)x^2$ 总是取值为零。因此方程 $y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2$ 根据 ε 的值总是描述了三种圆锥曲线中的一种。

圆锥曲线的公共顶点型方程
$y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2$

圆的顶点型方程也包括在这个方程之内。如果令 $p=r$ 和 $\varepsilon=0$，可得 $y^2=2rx-x^2$ 或 $y^2=x(2r-x)$。根据直角三角形中高的定理，这个关系式是满足圆的方程的。

在公共顶点型方程中，圆锥曲线是由参数 $2p$ 和数值偏心率 ε 所决定，这些量直到现在还被用来描述圆锥曲线的特征。如果我们考虑到 $y_0=0$ 给出了 $x_0=2a$ 以及对于椭圆和双曲线有 $p=b^2/a$，对于圆有 $p=r$，那末半轴 a 和 b 以及线性偏心率 e（半焦距）能用 p 和 ε 来表示。我们发现对椭圆而言有 $a=p/(1-\varepsilon^2)$，$b=p/\sqrt{(1-\varepsilon^2)}$，$e=p\varepsilon/(1-\varepsilon^2)$；对双曲线而言有 $a=p/(\varepsilon^2-1)$，$b=p/\sqrt{(\varepsilon^2-1)}$，$e=p\varepsilon/(\varepsilon^2-1)$。如果我们取 $p=1$，那末，例如对 $\varepsilon=0.8$，一些四舍五入过的值是 $a=2.78$，$b=1.67$，$e=2.22$。而对 $\varepsilon=1.5$，$a=0.8$，$b=0.89$，$e=1.2$（见图 13.5-23）。

圆锥曲线的极坐标方程

为了用极坐标描述圆锥曲线的方程，很自然把圆锥曲线的轴取作零

方向。对椭圆和双曲线可以选取其中心作为极点，但更常用的是选取焦点作为极点。

把中心取为极点的圆锥曲线极坐标方程 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 就把椭圆的中心方程 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 变成了极坐标方程，这里极点就是椭圆的中心。因此极坐标方程是:

$$(r^2/a^2)\cos^2\varphi+(r^2/b^2)\sin^2\varphi=1$$

或

$$\begin{aligned}1&=(r^2/b^2)(b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi)/a^2\\&=(r^2/b^2)(b^2\cos^2\varphi+a^2-a^2\cos^2\varphi)/a^2\\&=(r^2/b^2)[a^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi]/a^2\\&=(r^2/b^2)[1-(e^2/a^2)\cos^2\varphi]\\&=(r^2/b^2)(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi),\end{aligned}$$

即

$$r^2=b^2/(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)。$$

类似地可得到双曲线的极坐标方程。

以中心为极点的极坐标方程	椭圆 $r^2=b^2/(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)$
	双曲线 $r^2=b^2/(\varepsilon^2\cos^2\varphi-1)$

把焦点作为极点的圆锥曲线极坐标方程 这些圆锥曲线在天文学中有许多应用，特别是因为开普勒第一定律表明了按椭圆运动的行星把太阳作为一个焦点。很自然地，把行星离开太阳的距离和在轨道中的角度作为行星运动的坐标，因此我们采用把椭圆的一个焦点作为极点的极坐标系。同时，在天文学中用数值偏心率 ε 来度量椭圆轨道与圆形轨道的偏差。选择偏心率这个词是最恰当不过的了：在圆中，圆心与引力中心相一致；椭圆拉得越长，那末椭圆的中心与引力中心离得越远，因此轨迹也越是偏心。考虑到那时已知的所有行星中，火星具有最大的偏心率 $\varepsilon=0.0933$，开普勒发现行星实际上是按椭圆而不是在按圆运动。地球轨道的偏心率只是 $\varepsilon=0.0168$，还有流星、彗星和人造卫星，如果它们在太阳系内作周期运动，那末它们也是按椭圆轨道运动的。如果它们不是作周期运动，也就是说，它们的动能已足以把它们带出太阳系，假定其他行星引力引起的扰动可忽略不计，那末它们是按抛物线或双曲线轨道运动的。

椭圆的极坐标方程 在图 13.5–8 中，把焦点 F_1 取为极坐标系的极点，而其零方向是从 F_1 到 V_1 的 x 轴方向。在三角形 F_1PF_2 中，因为 $r_2=$

$2a-r_1$ 和 $|F_2F_1|=2e$, 余弦定律给出:

$$(2a-r_1)^2=(2e)^2+r_1^2+2\cdot 2er_1\cos\varphi$$

或

$$4a^2-4ar_1+r_1^2=4e^2+r_1^2+4er_1\cos\varphi,$$

$$r_1=(a^2-e^2)/(a+e\cos\varphi)=a(1-\varepsilon^2)/(1+\varepsilon\cos\varphi)$$
$$=b^2/[a(1+\varepsilon\cos\varphi)]=p/(1+\varepsilon\cos\varphi),$$

其中令:

$$\varepsilon=e/a \quad 和 \quad b^2/a=p。$$

双曲线的极坐标方程 在图13.5-13中，焦点 F_1 取为极坐标系的极点，而其零方向是从 F_1 到 V_1 的 x 轴方向。在三角形 F_1PF_2 中，因为 $r_2=2a+r_1$ 和 $|F_1F_2|=2e$, 余弦定律给出:

$$(2a+r_1)^2=(2e)^2+r_1^2-2\cdot 2er_1\cos\varphi$$

或

$$4a^2+4ar_1+r_1^2=4e^2+r_1^2-4er_1\cos\varphi,$$

$$r_1=(e^2-a^2)/(a+e\cos\varphi)=b^2/[a(1+\varepsilon\cos\varphi)]=p/(1+\varepsilon\cos\varphi)。$$

抛物线的极坐标方程 在图13.5-4中，把焦点 F 取为极坐标系的极点，而其零方向是从 F 到 V 的 x 轴方向。因为 $|L_0F|=p$, 由抛物线的定义给出:

$$p-r\cos\varphi=r \quad 或 \quad r=p/(1+\cos\varphi)。$$

因此在极坐标系中所有的圆锥曲线方程具有相同的形式 $r=p/(1+\varepsilon\cos\varphi)$, 此极坐标系的零方向是从极点到最近的一个顶点，它们所不同的只是数值偏心率的值。对于椭圆而言，它是小于1的正数；对双曲线而言，它是大于1的数；而对抛物线而言它等于1。取 $\varepsilon=0$, 使向径为常数 $r=p$, 于是圆也可以包括在内。

把焦点作为极点的圆锥曲线的极坐标方程	$r=p/(1+\varepsilon\cos\varphi)$	$\varepsilon>1$ 双曲线 $\varepsilon=1$ 抛物线 $0<\varepsilon<1$ 椭圆 $\varepsilon=0$ 圆

对于抛物线 ($\varepsilon=1$), 当 $\varphi=\pi$ 时，r 没有定义。如果 $\varepsilon=0$ 或 $0<\varepsilon<1$, 亦即对于圆或者椭圆，则任一角度对应着 r 的唯一值。最后，如果 $\varepsilon>1$, 对满足 $1+(e/a)\cos\varphi=0$ 即 $\cos\varphi=-a/e$ 的任何值 φ_1, 也就是当角 φ_1 或 $-\varphi_1$ 的自由边与渐近线平行时，r 是没有定义的。

【例】 近日点定义为行星轨道中离开太阳的最近点，而远日点定义

为离开太阳的最远点。火星的远日点离开太阳的距离是多少呢？从天文观察知道，火星轨道的长半轴 a 按四舍五入是地球轨道半径的 1.52 倍（一个地球轨道半径大约是 92.6×10^6 英里），它的偏心率 $\varepsilon=0.0933$，在远日点处 $\varphi=\pi$。因为 $p=b^2/a=a(b^2/a^2)=a(a^2-e^2)/a^2=a(1-\varepsilon^2)$，以地球轨道半径为单位进行测量 $r=a(1-\varepsilon^2)/1-\varepsilon=a(1+\varepsilon)=1.52\times1.0933\approx1.66$。这就是说火星在远日点离开太阳的距离大约是 154×10^6 英里。

偏近点角。在天文学中和在椭圆轨道或人造卫星的计算中，采用了由开普勒引进的偏近点角 E。从零方向到 CP'' 测得的角就是角 E，这里 C 是椭圆的中心而 P'' 是辅助圆上对应于椭圆上点 P 的一个点（见图 13.5-24）。在平面几何中，是用半径为 a（半长轴）的辅助圆和半径为 $b=\sqrt{(a^2-e^2)}$（半短轴）的同心圆来作出椭圆的。正如椭圆参数表达式所表明的那样，椭圆中所有垂直于长轴 V_2V_1 的弦与辅助圆中对应的弦之比是 $b:a$。如果 P 是椭圆的一点，则线段 $|P'P|$ 和 $|P'P''|$ 是这两条弦的一半，因此 $|P'P|:|P'P''|=b:a$。在图中的直角三角形中，$|P'P|=r\sin\varphi$，$|P'P''|=a\sin E$，因此 $ba\sin E=ar\sin\varphi$ 或者 $r\sin\varphi=b\sin E$。在长轴上，因为 $|CF_1|=e$ 和 $|CP'|=a\cos E$，可得到 $r\cos\varphi=a\cos E-e$。利用等式 $1=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi$ 和 $e^2=a^2-b^2$，r 可表示为 E 的函数：

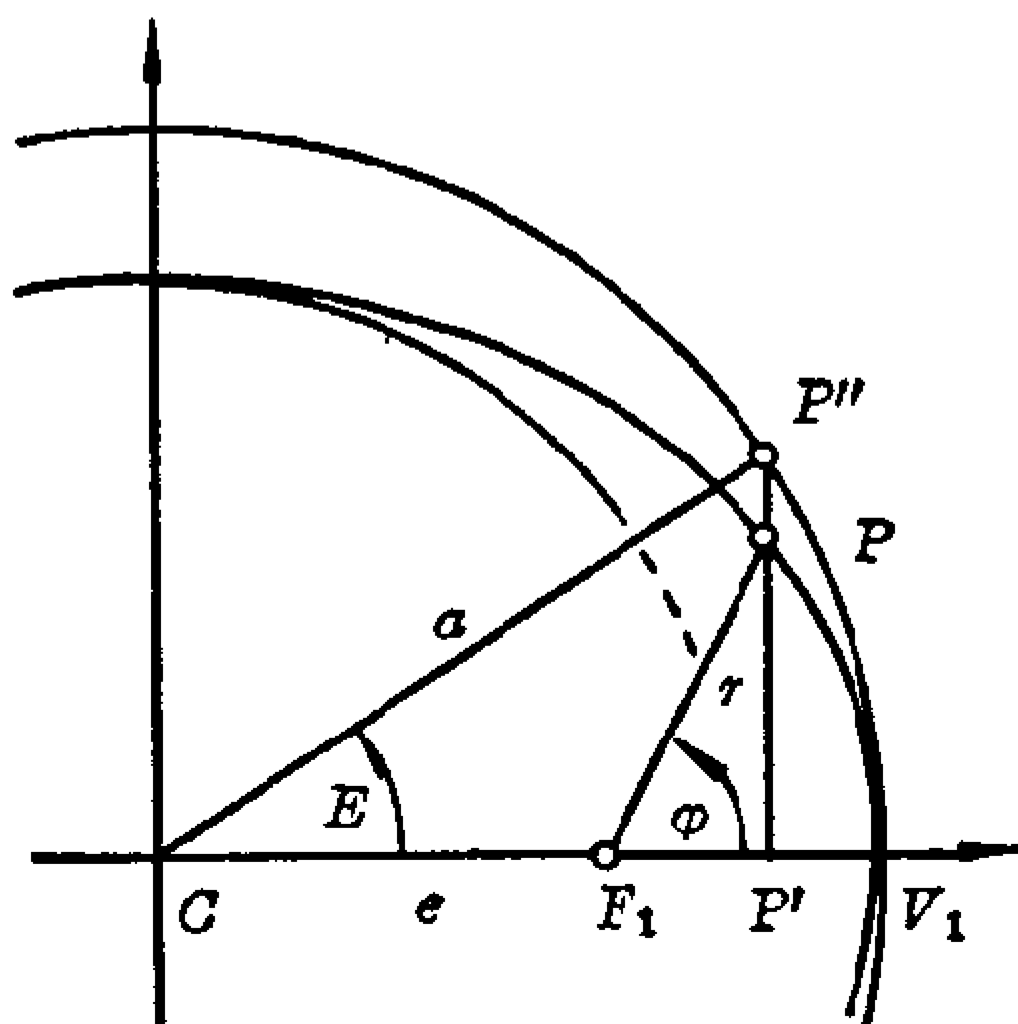


图 13.5-24　偏近点角

$$
\begin{aligned}
r^2&=b^2\sin^2E+(a^2\cos^2E-2ae\cos E+e^2)\\
&=b^2\sin^2E+a^2\cos^2E-2ae\cos E+a^2-b^2\sin^2E-b^2\cos^2E\\
&=(a^2-b^2)\cos^2E-2ae\cos E+a^2=(a-e\cos E)^2,
\end{aligned}
$$

而因为 $a>e$ 和 $r>0$，故 $r=a-e\cos E$。

这个等式包含了**开普勒第一定律**，按照这个定律，行星围绕太阳在椭圆轨道上运动，而太阳是椭圆的一个焦点。

近点角 φ 和偏近点角 E 之间的关系由两个方程给出：

$$\cos\varphi=(1/r)(a\cos E-e)=(a\cos E-e)/(a-e\cos E),$$

$$\sin\varphi=(1/r)b\sin E=\sqrt{(a^2-e^2)}\sin E/(a-e\cos E),$$

这也能用$\tan(\varphi/2)=\sqrt{(a+e)/(a-e)}\tan(E/2)$的形式来表达。为了得出作为$E$的函数的时间$t$，这些方程之一，例如第二个，可对$t$进行微分，这里关于$t$的微分照例用该函数上面加一点来表示：

$$\cos\varphi\cdot\dot\varphi=\frac{b\cos E\cdot\dot E(a-e\cos E)-e\sin E\cdot\dot Eb\sin E}{(a-e\cos E)^2}$$
$$=b\cdot\dot E\cdot\frac{a\cos E-e\cos^2 E-e\sin^2 E}{(a-e\cos E)^2}$$
$$=b\cdot\dot E\cdot\frac{a\cos E-e}{(a-e\cos E)^2}。$$

于是得到

$$\dot\varphi=\frac{d\varphi}{dt}=b\dot E\cdot\frac{a\cos E-e}{(a-e\cos E)^2}\cdot\frac{a-e\cos E}{a\cos E-e}$$

或 $$\dot\varphi=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{b\dot E}{a-e\cos E}=\frac{b\dot E}{r}。$$

由**开普勒第二定律**，在给定时间内由径向扫过的面积是一个常数：$r^2\dot\varphi=C$。在最后一个关系式中引进常数C后有：

$$\dot E=\frac{dE}{dt}=\frac{r^2\dot\varphi}{br}=\frac{C}{br}=\frac{C}{b(a-e\cos E)}\quad 或\quad dt=\frac{b}{C}(a-e\cos E)dE,$$

于是可通过积分得出所需的函数$t=t(E)$：

$$t=\frac{b}{C}(Ea-e\sin E)=\frac{\sqrt{a^2-e^2}}{C}(Ea-e\sin E)。$$

当E从 0 增加到2π，就可得到**轨道周期**T：

$$T=\frac{b}{C}\cdot 2\pi a=\frac{2\pi a\sqrt{(a^2-e^2)}}{C}。$$

由**开普勒第三定律**，对于每一个行星，存在一个常数$\mu/(4\pi^2)$，对这常数有$a^3/T^2=\mu/(4\pi^2)$，或者对T代入上面的值，得到$\mu=aC^2/(a^2-e^2)$。因此对所有的关系式而言，只要有四个常数中的三个就足够了。通常取$\varepsilon=e/a$，C和μ，而从$r=p/(1+\varepsilon\cos\varphi)=b^2/[a(1+\varepsilon\cos\varphi)]$导出：

$$r=C^2/[\mu(1+\varepsilon\cos\varphi)]=C^2(1-\varepsilon\cos E)/[\mu(1-\varepsilon^2)],$$
$$\cos\varphi=(-\varepsilon+\cos E)/(1-\varepsilon\cos E),$$
$$\sin\varphi=\sqrt{(1-\varepsilon^2)}\sin E/(1-\varepsilon\cos E),$$
$$t=C^3(E-\varepsilon\sin E)/[\mu^2(1-\varepsilon^2)^{3/2}]。$$

一般二次方程的讨论

两个变量 x 和 y 的一般二次方程的形式是:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

这里 a, b, c, d, e, f 是任意的实系数。实际上,只有当 a, b, c 不全是零时,它才是真正的二次方程。这个方程在 $x-y$ 坐标系中定义了一条曲线。以后总是假定在直角坐标系中进行讨论,曲线的类型依赖于系数的值。讨论表明下面的定理是有效的。

一般二次方程总是表示一条圆锥曲线。

混合项的消去 用坐标系旋转,即采用变换

$$x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha,\ y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha,$$

选择适当的角度 α,总能消除混合项 $\xi\eta$。如果平方项的系数 a 和 c 相等($a=c$),我们选择 $\alpha=45°$;如果它们不相等,则选择 α 使得 $\tan 2\alpha=2b/(a-c)$,这可以把变换方程代入原始方程中去看出。这样可以得到用 ξ 和 η 表示的、经过变换的方程,而把这些变量仍写成 x 和 y 是较为方便的。于是方程的形式是

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0。$$

这意味着圆锥曲线的轴现在与坐标轴平行了。

一次项的消去 椭圆和双曲线的中心型方程是没有一次项的,因此我们寻找坐标系的一种平移 $x=\xi+c,\ y=\eta+d$(这里 c 和 d 是常数),使得一次项可以消去。通过变换得到:

$$A\xi^2+C\eta^2+2(Ac+D)\xi+2(Cd+E)\eta$$
$$+Ac^2+Cd^2+2Dc+2Ed+F=0。$$

讨论:

(1) 如果 $A\neq0$ 和 $C\neq0$,选择 $c=-D/A$ 和 $d=-E/C$ 就能把两个一次项都消去。然后方程变成 $A\xi^2+C\eta^2=N$,这里 $N=D^2/A+E^2/C-F$。对 N 可能有三种情况:$N>0,\ N=0,\ N<0$。

$N>0$:情形1:A 和 C 都是正的。曲线是一个椭圆,中心方程为 $\dfrac{\xi^2}{(N/A)}+\dfrac{\eta^2}{(N/C)}=1$,两个半轴是 $\sqrt{N/A}$ 和 $\sqrt{N/C}$。情形2:A 和 C 是负数,不存在实的曲线。情形3:A 和 C 的符号相反,曲线是双曲线。

$N=0$:情形1:如果 A 和 C 符号相同,则只有对 $\xi=\eta=0$ 此方程才

[illegible] $Ed+F=0$。方程变成 $\eta^2=-2(D/C)\xi$，曲线是一抛物线。情形 2[illegible]方程是关于 η 的二次方程，因此表示一对平行线，如果 E^2-F[illegible]这两条平行线重合，因此表示一对重合直线。

[illegible] $C=0$：情形 1：$E\neq0$。曲线是抛物线。情形 2：$E=0$。曲线是一对[illegible]对重合直线。

$A=0$[illegible]情形 1：D 和 E 不全是 0。曲线是一条直线。情形 2：$D=E=$[illegible]定为 0。

注意：[illegible]线的情形可以看成是平行于轴的平面与圆锥交线的特殊情形，这[illegible]的顶点在无穷远处，因此这个圆锥实际上就是一个圆柱了。

【例 1】 在方程 $3x^2-30x+8y+65=0$ 中，系数值是 $A=3\neq0$，$C=0$，$D\neq0$；因此曲线是抛物线。为了求得顶点、焦点和参数，我们用 3 去除上述方程，并进行配方。从方程 $x^2-10x+25=-(8/3)y-65/3+75/3$ 或者 $(x-5)^2=-(8/3)(y-5/4)$，我们可以看到抛物线的凹口是向下的，顶点是在 $V(5, 5/4)$，而参数是 $p=4/3$。

【例 2】 方程 $25x^2+49y^2+150x-196y-804=0$，因为 $A=25\neq0$，$C=49\neq0$，$N>0$，故它表示了一椭圆，其主轴平行于 x 轴。通过两次配方，此方程能写成中心型：$(x+3)^2/49+(y-2)^2/25=1$。椭圆中心在 $C(-3, 2)$，长半轴 $a=7$，短半轴 $b=5$。

【例 3】 方程 $64x^2-25y^2+256x+300y-2244=0$，我们立刻可以看出它表示一条双曲线。从原方程得到 $64(x^2+4x)-25(y^2-12y)=2244$，两次进行配方，有 $64(x^2+4x+4)-25(y^2-12y+36)=2244+256-900$ 或 $64(x+2)^2-25(y-6)^2=1600$。因此中心方程是 $(x+2)^2/25-(y-6)^2/64=1$，长轴是平行于 x 轴的，中心在 $C(-2, 6)$，半轴是 5 和 8。

【例 4】 对圆锥曲线 $9x^2-4y^2=0$，$AC\neq0$ 但 $N=0$，因为 $AC<0$，因此圆锥曲线是一对相交直线。事实上，$9x^2-4y^2=(3x-2y)(3x+2y)=0$。每一个因式给出一条直线，直线的方程是 $y=(3/2)x$ 和 $y=-(3/2)x$，这两条直线相交于原点。